NATURWISSENSCHAFT UND TECHNIK IN LEHRE UND FORSCHUNG
HERAUSGEGEBEN VON F. DOFLEIN UND K. T. FISCHER

H. HOHENNER

GEODÄSIE

G. E. STECHERT & Co.
Alfred Hafner
New York

1914 12

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

NATURWISSENSCHAFT UND TECHNIK

IN LEHRE UND FORSCHUNG.

EINE SAMMLUNG VON LEHR- UND HANDBÜCHERN.

Herausgegeben von

Dr. F. DOFLEIN
Professor der Zoologie a. d. Universität München und II. Konservator der Zoolog. Staatssammlung

Dr. K. T. FISCHER
Professor der Physik an der Kgl. Technischen Hochschule in München

Gr. 8. In Leinwand geb.

Diese Büchersammlung soll in wissenschaftlich strenger, kritischer, aber objektiver und nicht nur dem Fachmann verständlicher Darstellung das enthalten, was die Naturwissenschaften Positives geleistet haben und gegenwärtig leisten.

Gegenüber einer verflachenden Popularisierung der Naturwissenschaften und einer Überschätzung der Resultate einzelner Zweige derselben macht sich in ernsten Lehrer- und Laienkreisen das Bedürfnis nach einer gediegenen sachlichen Klarlegung ihrer Probleme und wirklichen Errungenschaften immer mehr geltend. Dieses Bedürfnis kann nur befriedigt werden, wenn die einzelnen Wissensgebiete von gründlichen Fachmännern dargestellt werden, die auf Grund ihrer wissenschaftlichen Tätigkeit mit den Quellen unseres positiven Wissens vertraut sind.

Redaktion und Verlag setzen sich das Ziel, in einer Serie von Lehr- und Handbüchern die großen Werte, welche im Stoffe und in der Methode der naturwissenschaftlichen Forschung, in den rein wissenschaftlichen Resultaten und in deren praktischen Anwendungen verborgen liegen, hervorzuheben und nutzbringend zu machen, damit es den Naturwissenschaften leichter werde, in unserem heutigen Leben den sehr nötigen und heilsamen Einfluß zu gewinnen, den jeder ernste, ehrliche Forscher an sich erfahren hat und gerne als ein Gemeingut aller sehen möchte.

Äußerlich wird die ganze Serie in zwei Hauptgruppen eingeteilt: in eine physikalisch-chemische und eine biologisch-erdgeschichtliche. Der Umfang der einzelnen Bände soll durchschnittlich 10 bis 25 Bogen betragen.

I. PHYSIK UND CHEMIE.

Redigiert von K. T. Fischer.

In dieser Abteilung werden die Ergebnisse der Forschung und die Problemstellungen unserer Zeit wissenschaftlich und sachlich im engen Anschluß an die Originalarbeiten von Spezialgelehrten im Zusammenhange dargestellt werden; eingehende Literaturnachweise und ausführliche Namen- und Sachregister, z. T. chronologisch geordnet, sollen diese Bände zu bequemen Nachschlagequellen gestalten. Damit der jeweils neueste Stand der Wissenschaft in dieser Handbuchserie Aufnahme finden kann, werden, soweit nicht Neuauflagen dies überflüssig machen, in Abständen von einem oder mehreren Jahren Ergänzungsbände erscheinen, so daß die Serie dauernd und vollständig über den wirklichen Fortschritt der Wissenschaft unterrichtet. Auf unwichtige Einzelheiten soll nicht weiter als mit einem Literaturhinweis eingegangen werden, da solche genügend leicht in den bekannten großen Handbüchern zu finden sind. Dafür kann alles Wesentliche mit der gebührenden Ausführlichkeit behandelt werden.

II. BIOLOGIE UND ERDGESCHICHTE.

Redigiert von F. Doflein.

Dieser Teil der Serie soll das Gebiet umfassen, welches man früher als dasjenige der „beschreibenden Naturwissenschaften" bezeichnete. Mit Absicht wurde diese althergebrachte Bezeichnung nicht gewählt, um dadurch eine wesentliche Tendenz unserer Bücherserie zum Ausdruck zu bringen. Auch in den biologischen und erdgeschichtlichen Lehr- und Handbüchern sollen die Gesetzmäßigkeiten im Naturgeschehen das Gerüst der Darstellung bilden. Nicht die Beschreibung vieler Einzelformen soll unser Ziel sein, sondern der Nachweis der Gesetze, welche die Vielheit der Formen beherrschen und in ihnen eine Einheit erkennen lassen.

Dabei wollen wir aber versuchen, die Gefahren zu vermeiden, denen die populäre Literatur so oft verfällt, indem sie oberflächlich und ungründlich wird. Unsere Lehr- und Handbücher sollen von dem Leser Arbeit und Hingabe verlangen; sie sollen ihm Tatsachen bieten, nicht ein künstliches Weltbild, welches nur durch Hypothesen zusammengehalten wird. Das ist gerade auf dem Gebiete der Biologie besonders notwendig.

Deswegen ist es erforderlich, daß in der Darstellung eine strenge Scheidung von Tatsachenmaterial und Theorien durchgeführt wird. Denn die Theorien, welche die Forschung in der Gegenwart bewegen, gehören in unser Programm. Nur wenn der Lernende erfährt, welche Probleme den Forscher in seiner Wissenschaft begeistern, welche Endziele eine Disziplin als Ganzes und in ihren Teilen sich gesetzt hat, wird er sie richtig verstehen und bewerten.

Bisher erschienen in dieser Sammlung:

Einleitung in die experimentelle Morphologie der Pflanzen. Von Dr. K. Goebel, Prof. an der Universität München. Mit 135 Abb. [VIII u. 260 S.] gr. 8. 1908. In Leinwand geb. ℳ 8.—

Das Buch gibt zum erstenmal eine ausführlichere Darstellung der bis jetzt vorliegenden Ergebnisse der experimentellen Pflanzenmorphologie und bringt zugleich eine Reihe neuer Untersuchungen des Verfassers in der Absicht, das Interesse für diesen Teil der Botanik auch in weiteren Kreisen anzuregen. Hat doch die experimentelle Behandlung der Gestaltungsverhältnisse in den letzten Jahrzehnten in der Biologie einen gewaltigen Aufschwung genommen. Die Pflanzen sind für solche Untersuchungen ganz besonders geeignet, weil sie viel „plastischer" sind als die Tiere.

Lehrbuch der Paläozoologie. Von Prof. Dr. Ernst Freiherr Stromer von Reichenbach, Privatdozent an der Universität München. In 2 Teilen. gr. 8. In Leinwand geb.

I. Teil: Wirbellose Tiere. Mit 398 Abbildungen. [X u. 342 S.] 1909. ℳ 10.—

II. Teil: Wirbeltiere. [Erscheint im Herbst 1911.]

Der Verfasser war bemüht, im engsten Anschlusse an die besser bekannten und mehr gesicherten Resultate der Zoologie vor allem die Organisation der Tiere klarzulegen und auch ihre Lebensweise kurz zu erörtern. Es wurde Wert darauf gelegt, der allgemeinen Paläozoologie größeren Raum zu gewähren. So folgen im ersten Bande der kurzen Definition und Vorgeschichte der Wissenschaft eine ausführliche Darstellung der Erhaltungsbedingungen von Tierresten, eine Abhandlung über Skelettbildung und eine Klarlegung des Verhältnisses der Paläozoologie zu den anderen beschreibenden Naturwissenschaften. Im speziellen Teile werden dann die Stämme der Wirbellosen nach Bau, Einteilung, räumlicher und zeitlicher Verbreitung sowie in bezug auf die Stammesgeschichte besprochen. In dem zweiten Bande werden die Wirbeltiere ebenso behandelt. Den Schluß bildet eine Ergänzung der allgemeinen Paläozoologie.

Einführung in die Physiologie der Einzelligen (Protozoen). Von Dr. S. von Prowazek, Zool. Assistent am Seemannskrankenhaus und Institut für Schiffs- und Tropenkrankheiten in Hamburg. Mit 51 Abbildungen. [IV u. 172 S.] gr. 8. 1910. In Leinwand geb. ℳ 6.—

Die wichtigsten Tatsachen, die sich auf die Physiologie der Protozoen beziehen, werden hier zum ersten Male in übersichtlicher Weise dargestellt. Gleichzeitig ist der Versuch gemacht, die neuesten Ergebnisse der Morphologie der Protozoen mit der Physiologie in Einklang zu bringen. Die Hauptkapitel sind derart abgefaßt worden, daß der der Protozoenbiologie Fernstehende sich über die wichtigsten Probleme der Kern- und Protoplasmaphysiologie, über Befruchtung, Vermehrung, Ernährung und die verschiedenen Reizerscheinungen der Protozoen orientieren kann.

Planktonkunde. Von Dr. A. Steuer, Privatdozent an der Universität Innsbruck. Mit 365 Abbildungen und einer farbigen Tafel. [XVI u. 722 S.] gr. 8. 1910. In Leinwand geb. ℳ 26.—

Das vorliegende Werk bietet die erste wirklich umfassende Darstellung der Planktonkunde, dieses für Zoologen und Botaniker wie für den Geographen, Paläontologen und endlich auch den praktischen Fischer gleich wichtigen Gebietes. Fußend auf dem Boden eigener Forschung, unter Heranziehung zahlreicher instruktiver Abbildungen, entwirft Verfasser hier ein allseitiges Bild des gesamten Gebietes. Wenn das Buch sich aber auch in erster Linie an die Lehrer und Studierenden der Naturwissenschaft wendet, so wird es doch auch der gebildete Laie mit Interesse zur Hand nehmen, ist doch die Form der Darstellung eine durchaus gemeinverständliche.

Geodäsie. Eine Anleitung zu geodätischen Messungen für Anfänger mit Grundzügen der direkten Zeit- und Ortsbestimmung. Von Dr.-Ing. H. Hohenner, Professor an der Technischen Hochschule zu Darmstadt. [XII u. 352 S.] gr. 8. 1910. In Leinwand geb. ℳ 12.—

In Vorbereitung bezw. unter (*) der Presse befinden sich zunächst folgende Bände:

Einleitung in die Erkenntnistheorie für Naturwissenschaftler. Von Dr. H. Cornelius, Professor an der Univ. München.

*Grundlinien einer Experimentalphysik für Ingenieure, nach Vorlesungen, gehalten an der Techn. Hochschule München. Von Dr. H. Ebert, Prof. an der Techn. Hochschule München. Mit vielen Abbildungen. ca. 600 S. gr. 8.

Biologie. Von Dr. R. Hesse, Professor der Zoologie an der Landwirtschaftlichen Hochschule zu Berlin, und Dr. F. Doflein, Professor an der Universiät München.

Radioaktivität. Von Professor Dr. Stefan Meyer und Prof. Dr. E. von Schweidler, Privatdozenten an der Universität Wien.

Die Wale. Eine Einführung in die Säugetierkunde. Von Dr. W. Kükenthal, Prof. an der Univ. Breslau.

Vergleichende Entwicklungsgeschichte der Tiere. Von Dr. O. Maas, Professor an der Universität München.

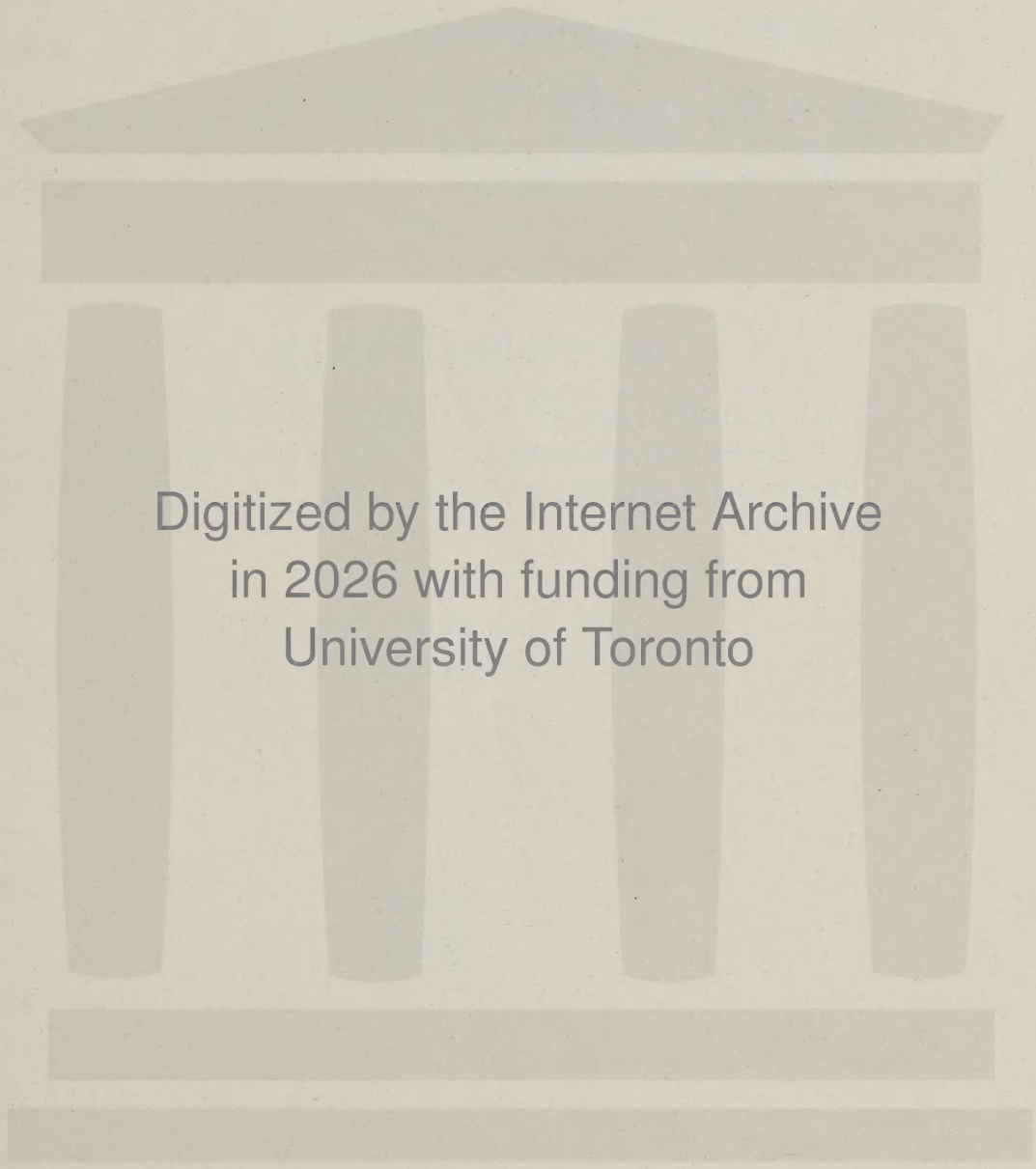
Allgemeine Wirtschaftsgeographie. Von Dr. K. Sapper, Prof. an d. Univ. Tübingen.

Brennstoffe, deren Vorkommen, Gewinnung und Anwendung. Von Dr. Gustav Schultz, Prof. an d. Techn. Hochschule München.

Elektrische Entladungen in Gasen. Von Dr. M. Töpler, Professor an der Technischen Hochschule zu Dresden.

Zellen- und Befruchtungslehre. Von Dr. R. Hertwig, Prof. an der Univ. München.

Die Redaktion steht außerdem noch mit einer größeren Anzahl von Gelehrten zwecks Abfassung weiterer Bände auf den einschlägigen Gebieten in Verhandlung.


Digitized by the Internet Archive
in 2026 with funding from
University of Toronto

https://archive.org/details/geodsieeineanlei00hohe

NATURWISSENSCHAFT UND TECHNIK
IN LEHRE UND FORSCHUNG

EINE SAMMLUNG VON LEHR- UND HANDBÜCHERN

HERAUSGEGEBEN VON

Dr. F. DOFLEIN
A. O. PROF. DER ZOOLOGIE A. D. UNIVERSITÄT MÜNCHEN
UND II. KONSERVATOR DER ZOOLOG. STAATSSAMMLUNG

Dr. K. T. FISCHER
A. O. PROF. DER PHYSIK AN DER KÖNIGL. TECHNISCHEN
HOCHSCHULE IN MÜNCHEN

GEODÄSIE

EINE ANLEITUNG ZU GEODÄTISCHEN MESSUNGEN FÜR ANFÄNGER MIT GRUNDZÜGEN DER HYDROMETRIE UND DER DIREKTEN (ASTRONOMISCHEN) ZEIT- UND ORTSBESTIMMUNG

VON

Dr.-Ing. H. HOHENNER
PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE
ZU BRAUNSCHWEIG

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1910

GEODÄSIE

EINE ANLEITUNG ZU GEODÄTISCHEN MESSUNGEN FÜR ANFÄNGER MIT GRUNDZÜGEN DER HYDROMETRIE UND DER DIREKTEN (ASTRONOMISCHEN) ZEIT- UND ORTSBESTIMMUNG

VON

Dr.-Ing. H. HOHENNER
PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU BRAUNSCHWEIG

MIT 216 FIGUREN IM TEXT

144796.
9/1/18.

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1910

COPYRIGHT 1910 BY B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

ALLE RECHTE,
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

VORWORT.

Der Mitherausgeber der „Naturwissenschaft und Technik in Lehre und Forschung“, Herr Prof. Dr. K. T. Fischer in München, ersuchte den Verf. bereits im Jahre 1906 um Übernahme der Bearbeitung der „Geodäsie“ für die genannte Büchersammlung; aber erst nach wiederholten Verhandlungen übernahm er Ende 1907 die Abfassung des vorliegenden Buches, das zwischen den umfassenden Handbüchern und den kleinen Leitfaden der niedern Geodäsie stehen soll. Die Fertigstellung hat sich leider durch viele Amtsgeschäfte sehr verzögert.

Das Buch enthält in zwölf Abschnitten einen Auszug aus Vorträgen, die der Verf. seit 1898 an den Technischen Hochschulen zu München, Stuttgart und Braunschweig gehalten hat und soll für die meisten technischen Zwecke ausreichen. Deshalb wurden die Grundzüge der Wassermengen- und Wasserkraftmessungen in Wasserläufen aufgenommen, und der Verf. hofft, daß die Beschreibung einiger Arten zur direkten (astronomischen) Bestimmung der geographischen Koordinaten von Punkten der Erdoberfläche sowie der Azimute terrestrischer Richtungen mit Hilfe des Theodolits Manchem erwünscht sein wird. Mit Rücksicht auf den angestrebten Umfang des Buches wurde die Photogrammetrie (mit Stereophotogrammetrie) nicht aufgenommen.

Der Besprechung und Berichtigung der Meßinstrumente ist verhältnismäßig viel Raum zugewiesen, da erfahrungsgemäß das Vertrautsein mit dem Meßgeräte, zu dem natürlich Übung gehört, das beste Mittel ist, das Entstehen unbrauchbarer Messungen zu verhindern. Der Verf. hofft dadurch und durch die unter den vielen Instrumenten getroffene Auswahl den Leser in den Stand zu versetzen, daß er sich auch mit andern, von den abgebildeten Instrumenten mehr oder weniger abweichenden, Konstruktionen bald zurechtfinden wird. Da durch Zahlenbeispiele und Abbildungen viele Weitläufigkeiten im Texte vermieden werden konnten, so wurde an beiden nicht gespart. Einige Figuren stellen wegen der bei der Reproduktion gewählten starken Verkleinerung an die Sehkraft einige Ansprüche; die Deutlichkeit hat aber dadurch nicht wesentlich gelitten.

Hauptsächlich bei der Lesung der Korrekturen wurde der Verf. von dem Assistenten der Technischen Hochschule in Braunschweig, Herrn H. Biersack, unterstützt. Diesem, sowie den feinmechanischen Werkstätten, die einige Bildstöcke zur Verfügung stellten, und der Verlagsbuchhandlung, die das Buch sorgfältig ausstattete, sei auch hier der gebührende Dank erstattet.

Bernried am Starnberger See, im August 1910.

DER VERFASSER.

INHALTSVERZEICHNIS.

§ Seite

Einleitung 1
1. Maßeinheiten 2
2. Punktbezeichnungen 4
3. Abstecken von Geraden ohne Instrumente 6
4. Einiges über Beobachtungsfehler und ihre Fortpflanzung 8
5. Ausgleichen direkter gleich genauer Beobachtungen einer Unbekannten nach der Methode der kleinsten Quadrate 10

I. Abschnitt.

Die wichtigsten Winkelmeßinstrumente und ihr Gebrauch.

1. Kapitel.

Einige einfache Instrumente zur Angabe konstanter Winkel von 90°, 180° und 45°.

6. Die Kreuzscheibe 12
7. Winkelspiegel und Spiegelkreuz 13
8. Winkelprismen und Prismenkreuz 15

2. Kapitel. **Teile zusammengesetzter Meßinstrumente.**

9. Die Glaslinse und deren Wirkung 17
10. Lupen 20
11. Das astronomische Fernrohr 21
12. Ziel- und Ablesefernrohr 24
13. Der Nonius 27
14. Ablesemikroskope; Strich-, Skalen- und Schraubenmikroskop 29
15. Der Transversalmaßstab. Der Meßkeil 31
16. Senkel und Libellen 32
17. Berichtigen der Setzlibelle; Messen des Neigungswinkels einer Unterlage mit unberichtigter Libelle 36
18. Berichtigen der Reit- und Hängelibelle. Parallelstellen der Libellenachse zur Ziellinie an Ringfernrohren. Messen der Ringungleichheit an Ringfernrohren und Achsen 37
19. Lotrechtstellen von Umdrehachsen mit Libellen 38
20. Parallelstellung von Ziellinien und Libellenachsen. Nivellieren aus der Mitte. Prüfung und Gebrauch der Doppelschlifflibelle 40
21. Geteilte Kreise und Achsen 42
22. Stative 45

3. Kapitel. **Der Theodolit und sein Gebrauch.**

23. Der einfache und der Repetitionstheodolit 46
24. Berichtigung des Theodolits 51
25. Einfluß der Achsenfehler auf die Kreisablesungen 54

§ Seite
26. Messung von Horizontalwinkeln durch Richtungsbeobachtungen, Berechnung vollständiger Richtungssätze 58
27. Horizontalwinkelmessung durch Repetition 62
28. Messung von Vertikalwinkeln 64

4. Kapitel. **Einige Magnetinstrumente.**

29. Die magnetische Mißweisung. Streichwinkel, Richtungswinkel und Azimut 68
30. Die Vollkreisbussole 70
31. Messung von Streich- bzw. Richtungswinkeln mit der Vollkreisbussole 72
32. Die Orientierbussole und ihr Gebrauch. Der Röhrenkompaß 73

II. Abschnitt.

Einige Längenmeßinstrumente und ihr Gebrauch.

5. Kapitel. **Meßlatten und Meßbänder.**

33. Meßlatten 76
34. Bestimmung der Lattenmeterlänge 78
35. Genauigkeit der Lattenmessung. Fehlergrenzen 79
36. Meßbänder. Meßdrähte. Genauigkeit 82

6. Kapitel. **Entfernungs- oder Distanzmesser.**

37. Okularfadendistanzmesser (entfernungsmessende Fernrohre) 85
38. Scharfe Bestimmung der Distanzmesserkonstanten 88
39. Messung horizontaler und vertikaler Strecken auf geneigtem Boden Projektionstachymeter 89
40. Genauigkeit der Okularfadendistanzmesser 94
41. Der Hammer-Fennelsche Entfernungsmesser 95

III. Abschnitt.

Der Meßtischapparat und sein Gebrauch zur Herstellung von Lage- und Höhenplänen.

42. Der Meßtischapparat; seine Prüfung und Berichtigung 101
43. Kleine Lageplanaufnahme mit Benutzung des entfernungsmessenden Fernrohres 104
44. Größere Lageplanaufnahme 106
45. Aufnahme von Höhenplänen (Meßtischtachymetrie) 110
46. Genauigkeit der Meßtischaufnahme 113

IV. Abschnitt.

Lagevermessung nach der Zahlenmethode.

7. Kapitel.

Lagevermessungen mit Benutzung von Meßlatten, Winkelspiegel u. dgl.

47. Kleine Lageplanaufnahme 114
48. Erweiterung der Aufnahme 115

§ Seite

8. Kapitel. **Lageplanaufnahme auf polygonometrischer Grundlage.**

49. Zweck der Polygonzüge 116
50. Anlage und Messung des Polygonzuges. Mechanische Zentrierungsvorrichtungen 117
51. Das rechtwinklige ebene Koordinatensystem. 119
52. Berechnung der Koordinaten der Polygonpunkte. Fehlergrenzen . . . 121
53. Zahlenbeispiel 124
54. Abstecken des Aufnahme- oder Messungsliniennetzes. Stückvermessung und Plananfertigung (Kartierung) 126

V. Abschnitt.

Flächenberechnung und Flächenteilung.

9. Kapitel. **Flächenberechnung.**

55. Flächenberechnung aus Naturmaßzahlen 128
56. Flächenbestimmung unter teilweiser Benutzung sowohl unmittelbarer als auch aus einem Plane abgemessener Maßzahlen. Korrektion der Flächen wegen unrichtiger Länge der Meßwerkzeuge oder wegen Planverziehung 129
57. Flächenbestimmung aus Plänen 131
58. Das Polarplanimeter und seine Theorie. 132
59. Untersuchung und Gebrauch des Planimeters. Kompensationsplanimeter. Genauigkeit 134
60. Fehlergrenzen für Flächenbestimmungen 138

10. Kapitel. **Flächenteilung und Grenzregelung.**

61. Parallel- und Senkrechtteilung. 138
62. Teilung nach gleichem Seitenverhältnis. 140
63. Geradelegung gebrochener Grenzlinien 141

VI. Abschnitt.

Elemente der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate.

64. Fortpflanzung des mittleren Fehlers 143
65. Gewichte und deren Fortpflanzung 144
66. Berechnung des mittleren Fehlers der Gewichtseinheit aus wahren Fehlern ungleich genauer Beobachtungen 145
67. Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen 146
68. Auflösung der Normalgleichungen nach dem Gaußischen Algorithmus. 150
69. Zahlenbeispiel 153
70. Mittlerer Fehler m der Gewichtseinheit. 156
71. Mittlere Fehler der ausgeglichenen Größen 158
72. Ausgleichung bedingter Beobachtungen ungleicher Genauigkeit; Beispiel 161

§ Seite

VII. Abschnitt.

Lagevermessung großer Flächen auf trigonometrischer und polygonometrischer Grundlage.

73. Übersicht über die Vermessung eines Landes. Hauptdreiecke und Grundlinienmessung 166
74. Fortsetzung. Koordinaten 168
75. Fortsetzung. Dreiecke niederer Ordnung. Polygonnetz 170

11. Kapitel.

Kleintriangulierungsaufgaben im rechtwinklig ebenen Koordinatensystem.

76. Vorwärts- und Seitwärtseinschneiden mit Zahlenbeispiel 172
77. Rückwärtseinschneiden (Snelliussche Aufgabe) mit Zahlenbeispiel . . . 175
78. Doppelpunkteinschaltung (Hansensche Aufgabe) oder Aufgabe der unzugänglichen Entfernung 178
79. Einketten 180
80. Signalisierung (Bezeichnung der Punkte zum Anzielen); Winkelmessung; Rechnungsschärfe 182
81. Zentrierungsrechnungen 184

12. Kapitel. **Einschneiden mit überschüssigen Beobachtungen. Ausgleichung der Beobachtungen unter Vermittlung von Koordinaten nach der Methode der kleinsten Quadrate.**

82. Ausgleichen eines rückwärts eingeschnittenen Punktes mit Zahlenbeispiel 187
83. Ausgleichen eines vorwärts eingeschnittenen Punktes mit Zahlenbeispiel 194
84. Gemeinsame Ausgleichung von n Punkten 200

13. Kapitel. **Polygonisierung oder Polygonierung.**

85. Anschluß des Zuges an einen unzugänglichen trigonometrischen Punkt (Hochpunkt) mit Zahlenbeispiel 205
86. Berechnung verknoteter Polygonzüge 206
87. Messung und Berechnung von Bussolenzügen 208

14. Kapitel. **Kleine selbständige Triangulierung.**

88. Grundlinienmessung und trigonometrische Vergrößerung der Grundlinie 211
89. Zahlenbeispiel 213

VIII. Abschnitt.

Abstecken von Geraden und Kurven.

90. Abstecken von Geraden und Winkeln mit Hilfe des Theodoliten . . . 217
91. Abstecken von Kreisbögen 218
92. Abstecken von mehrfachen Kreisbögen 222
93. Abstecken von Übergangskurven 223

§ Seite

IX. Abschnitt.

Höhenmessung.

15. Kapitel. **Höhenmessung durch Nivellieren.**

94. Der Nivellierapparat 227
95. Fest- oder Fixpunktnivellement 232
96. Genauigkeit des Nivellierens 236
97. Nivellementsnetze und deren Ausgleichung. Zahlenbeispiel 239
98. Längenschnitt- oder Längenprofilaufnahme einer gegebenen Linie . . 244
99. Querschnitt- oder Querprofilaufnahme 245
100. Nivellement einer Fläche, Flächennivellement 246

16. Kapitel.

Trigonometrische Höhenbestimmung durch Messen von Höhenwinkeln.

101. Die Meßinstrumente. Meßschärfe 248
102. Trigonometrische Höhenberechnung ohne Berücksichtigung der Erdkrümmung und Strahlenbrechung 248
103. Trigonometrische Höhenberechnung mit Berücksichtigung der Erdkrümmung und Strahlenbrechung 249
104. Bemerkungen zu § 103 252

17. Kapitel. **Höhenbestimmung durch Luftdruckmessung.**

105. Quecksilberbarometer 253
106. Korrektionen der Quecksilberbarometerablesungen 254
107. Feder- oder Aneroidbarometer 256
108. Korrektionen der Federbarometerablesungen 258
109. Bestimmung des Barometerstandes mit Siedethermometern 261
110. Die barometrischen Höhenformeln 262
111. Einige Höhenmessungsverfahren mit Barometern mit Zahlenbeispielen 266
112. Genauigkeit der barometrischen Höhenmessung 271

X. Abschnitt.

Gleichzeitige Lage- und Höhenmessung, Tachymetrie (Schnellmessung).

113. Übersicht 272
114. Der Tachymetertheodolit oder der Kreistachymeter. Die verschiedenen Arten der Tachymetrie mit Rücksicht auf den Zweck der Aufnahme und die Berechnung der Koordinaten 273
115. Die tachymetrischen Aufnahmen. Aufnahme einer kleinen Fläche im offenen Gelände 278
116. Aufnahme eines beliebig langen Geländestreifens 280
117. Aufnahme größerer Gebiete. Anordnung der einzelnen Messungen . . 286
118. Auftragen der Tachymeteraufnahmen 288

§ Seite

XI. Abschnitt.

Wassermengen- und Wasserkraftmessungen in Wasserläufen.

119. Allgemeines über Wasserläufe 291
120. Anfertigung des Lageplanes und des Längenprofiles 292
121. Querprofilaufnahme 293
122. Wassergeschwindigkeitsmessungen mit Schwimmkörpern 294
123. Der hydrometrische Flügel 295
124. Verwendung des hydrometrischen Flügels zu Geschwindigkeitsmessungen. Berechnung der sekundlichen Wassermenge 298
125. Zahlenbeispiele zur Bestimmung der sekundlichen Wassermenge . . 302

XII. Abschnitt.

Direkte (astronomische) Bestimmung der geographischen Koordinaten eines Punktes der Erdoberfläche und des Azimuts einer von diesem ausgehenden terrestrischen Richtung.

126. Zweck und Genauigkeit. Instrumente. Stand und Gang der Beobachtungsuhr 305
127. Koordinaten an der Himmelskugel 307
128. Sternzeit, Sonnenzeit, Zeitgleichung; Zeitumwandlung. 310
129. Verwandlung von Zeitpunkten 313
130. Umwandlung auf der Erdoberfläche nach Gestirnen gemessener Zenitdistanzen (Höhenwinkel) auf den Erdmittelpunkt als Beobachtungsort 316

18. Kapitel. **Messungen mit der Sonne.**

131. Bestimmung der geographischen Breite φ aus der gemessenen kleinsten Zenitdistanz der Sonne mit Zahlenbeispiel 320
132. Bestimmung der geographischen Breite aus gemessenen Zirkummeridianzenitdistanzen der Sonne und den zugehörigen wahren Zeiten nebst Zahlenbeispiel 322
133. Zeitbestimmung unter Voraussetzung bekannter Breite φ des Beobachtungsortes durch Messen von Zenitdistanzen 326
134. Zahlenbeispiel. 328
135. Längenunterschiedbestimmung 330
136. Azimutmessung mit der auf- oder untergehenden Sonne 331
137. Zahlenbeispiel 333

19. Kapitel. **Messungen mit Sternen.**

138. Breitenbestimmung mit dem Polstern 336
139. Zahlenbeispiel zur Zeit- und Breitenbestimmung 339
140. Azimutmessung mit dem Polstern 343
141. Zahlenbeispiel. 346

LITERATUR.

Bauernfeind, C. M. v. Elemente der Vermessungskunde. 7. Auflage. Stuttgart 1890.

Czapski. Theorie der optischen Instrumente. Breslau 1893.

Franke, J. H. Die Grundlehren der trigonometrischen Vermessung im rechtwinkligen Koordinatensystem. Leipzig 1879.

Gauß, F. G. Die trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen in der Feldmeßkunst. 2. Auflage. Halle 1893.

Hammer, E. Lehr- und Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. 3. Auflage. Stuttgart 1907.

Harlacher. Die Messungen in der Elbe und Donau. Leipzig 1881.

Helmert. Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. 2. Auflage. Leipzig 1907.

Hydrographisches Amt der Admiralität. Handbuch der Nautischen Instrumente. Berlin 1882.

Jordan. Handbuch der Vermessungskunde. 1. Band 6. Auflage; 2. Band 7. Auflage; 3. Band 5. Auflage. Stuttgart 1907, 1908, 1910.

Koppe. Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Nordhausen 1885.

Tissot-Hammer. Die Netzentwürfe geographischer Karten. Stuttgart 1887.

Vogler. Lehrbuch der Praktischen Geometrie. Braunschweig 1885 und 1894.

Zeitschrift für Vermessungswesen. Stuttgart.

Brünnow. Lehrbuch der Sphärischen Astronomie. 2. Auflage. Berlin 1862.

Herr-Tinter. Desgl. Wien 1887.

Jordan. Grundzüge der astronomischen Zeit- und Ortsbestimmung. Berlin 1885.

Einleitung.

Die Geodäsie (Vermessungskunde, praktische Geometrie) lehrt die Feststellung der gegenseitigen Lage von Punkten der Erde durch Messung und die zeichnerische Darstellung der Ergebnisse. Die niedere Geodäsie beschäftigt sich mit der Vermessung kleiner Gebiete bis zu mehreren Quadratkilometer Größe. Dies geschieht durch Feldmessen, Nivellieren und einige weitere Messungsverfahren, wenn die Punkte hauptsächlich auf der Erdoberfläche, und durch Grubenvermessen oder Markscheiden, wenn sie hauptsächlich unter dieser liegen. Die höhere Geodäsie befaßt sich dagegen mit der Vermessung von Ländern und der Bestimmung der Form und Größe der mathematischen Erdgestalt, des Geoids (Landesvermessung und Erdmessung).

Das Geoid ist diejenige Gleichgewichts- oder Niveaufläche, die von der (durch Kanäle unter den Kontinenten) erweiterten und durch Himmelskörper, Wind usw. ungestörten Meeresfläche gebildet wird. Das Geoid weicht nach den bisherigen Forschungen von einem sehr schwach abgeplatteten Rotationsellipsoid in unregelmäßiger Weise etwa innerhalb $\pm$ 100 m ab; für viele Zwecke darf für das Geoid eine Kugel mit 6370 km Radius verwendet werden. Die Lotrichtung steht in jedem Geoidpunkt normal zur Geoidfläche, und die Länge der Lotlinie von dieser bis zu dem entsprechenden Punkte der physischen Erdoberfläche bezeichnet man als Höhe über dem Meere. In Deutschland wird für die Höhenangaben die Vergleichungsfläche durch die Normal-Nullfläche gebildet. Auch diese Fläche fällt nahezu mit der Meeresfläche zusammen und ist durch viele über Deutschland verteilte Höhenmarken, deren Höhen über Normal-Null (N. N.) ermittelt sind, bezeichnet. Die Höhen oder Höhenunterschiede von Punkten werden durch Vertikal- oder Höhenmessungen bestimmt.

Denkt man sich die einzelnen Punkte der physischen Erdoberfläche durch ihre Lotlinien auf eine Rechnungsfläche übertragen, dann bezeichnet man die zur Bestimmung der gegenseitigen Lage dieser Lotfußpunkte auszuführenden Messungen als Horizontal- oder Lagevermessungen. Die Rechnungsfläche darf für die Lagemessungen der niederen Geodäsie meist als Tangentialebene an das Geoid betrachtet werden (alle Lote werden dann zu parallelen Geraden); bei Landesvermessungen ist sie eine Kugelfläche oder, wenn geographische Ko-

ordinaten zur Verwendung kommen, eine Rotationsellipsoidfläche von bekannten Dimensionen. Diese Dimensionen und die nähere Form der Geoidfläche werden durch Erdmessungsarbeiten gefunden.

Die zur Feststellung der gegenseitigen Lage von im Gelände vorgegebenen Punkten im horizontalen oder vertikalen Sinne (nach Lage oder Höhe) auszuführenden Messungen bezeichnet man als Aufnehmen oder Aufmessen, während gegebene Entwürfe (z. B. auf Plänen) in das Gelände durch Abstecken oder Abgeben übertragen werden.

§ 1. Maßeinheiten.

Für Längengrößen ist jetzt in den meisten Ländern das Meter (m) als Maßeinheit gesetzlich vorgeschrieben. Dieses sollte ursprünglich der 10 000 000 te Teil des Erdmeridianquadranten sein und wird dargestellt durch den bei der Temperatur des schmelzenden Eises gemessenen Abstand der Endstriche auf demjenigen Maßstabe, der von der internationalen Generalkonferenz für Maß und Gewicht als internationales Prototyp des Meters anerkannt worden ist. Dieses Prototyp ist im internationalen Maß- und Gewichtsbureau (Paris) niedergelegt und besteht aus einer Legierung von Platin (90%) und Iridium (10%) von nebenstehendem Querschnitt, in dessen neutraler Achse die Teilung aufgebracht ist. Aus dem gleichen Materiale wurden von dem genannten Bureau mehrere Kopien gefertigt, mit dem internationalen Meter bei verschiedenen Temperaturen verglichen und dann den einzelnen Staaten durch das Los als nationale Prototype zugeteilt. Hierbei erhielt Deutschland den Stab M 18, der von der Normal-Eichungskommission (Berlin) aufbewahrt wird. Seine Gleichung lautet:

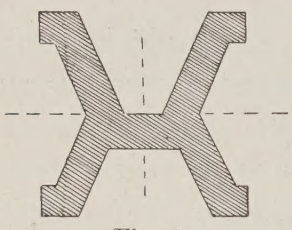


Fig. 1.

$$l = 1\,\text{m} - 1{,}0\,\mu + (8{,}642\,T + 0{,}001\,T^2)\mu \pm 0{,}2\,\mu,$$

wobei $\mu = 0{,}000001$ m, T = Temperatur in Celsiusgraden. Das Meter wird zehnteilig (dezimal) zerlegt und zusammengesetzt; es ist:

0,1 m	= 1 Dezimeter	= 1 dm
0,01 m	= 1 Zentimeter	= 1 cm
0,001 m	= 1 Millimeter	= 1 mm
0,0001 m	= 1 Dezimillimeter	= 1 dmm
0,001 mm	= 1 Mikron	= 1 μ
0,001 μ	= 1 Millimikron	= 1 $\mu\mu$
10 m	= 1 Dekameter	
100 m	= 1 Hektometer	
1000 m	= 1 Kilometer	= 1 km

Die metrischen Flächenmaße entstehen aus den Längenmaßen durch deren Quadrate, die metrischen Raummaße durch deren Kuben. Die ersten bezeichnet man in Deutschland durch das vorgesetzte Zeichen q, die letzten mit cb, also z. B. qm, qdm, qcm; cbm, 1 cbdm = 1 Liter = 1 l, cbcm. Die Einheit des Flächenfeldmaßes bildet das Ar = 100 qm = 1 a; 100 a = 1 Hektar = 1 ha.

Für Winkelgrößen kommen verschiedene Einteilungen des Vollwinkels oder Kreisumfangs in Verwendung. Die wichtigsten sind:

a) Alte oder sexagesimale Teilung.

Der Kreisumfang wird in 360 Teile (Grade ^{0}) zu je 60 Minuten ($'$) zu je 60 Sekunden ($''$) geteilt. Die weitere Unterteilung der Sekunde erfolgt dezimal, z. B. $58^0\ 33'\ 17{,}655''$.

b) Neue oder dezimale Teilung.

Der Umfang wird in 400 Neugrad (^{c} oder ^{g}) zu je 100 Minuten ($^-$) zu je 100 Sekunden ($^=$) eingeteilt, z. B. $387{,}756432^c = 387^c\ 75^-\ 64{,}32^=$.

c) Stundenteilung.

Der Umfang wird in 24 Stunden (^{h}) zu je 60 Minuten (^{m}) zu je 60 Sekunden (^{s}) geteilt. Die weitere Unterteilung der Sekunde erfolgt dezimal, z. B. $7^h\,56^m\,33{,}52^s$.

In den aufgeführten Maßen (hauptsächlich in den beiden ersten) werden die Winkel in der Regel mit den Meßinstrumenten gemessen. Bei Rechnungen (hauptsächlich mit kleinen Winkeln) benutzt man häufig mit Vorteil das

d) analytische, Bogen- oder Arcusmaß.

Dieses ist die einem Zentriwinkel α^0 entsprechende Bogenlänge $\widehat{\alpha}$ in Halbmessereinheiten. Ist $\operatorname{arc}\alpha$ das Bogenmaß, r der Halbmesser, dann ist

$$\operatorname{arc}\alpha = \frac{\widehat{\alpha}}{r} = \frac{2r\pi\cdot\alpha^0}{360^0}\cdot\frac{1}{r}\,.$$

Setzt man

$$\frac{360^0}{2\pi} = \varrho^0 = 57{,}295\,779\,51^0,$$

$$\frac{360\cdot 60'}{2\pi} = \varrho' = 3\,437{,}746\,77',$$

$$\frac{360\cdot 60\cdot 60''}{2\pi} = \varrho'' = 206\,264{,}806'',$$

dann folgt

$$\operatorname{arc}\alpha = \frac{\widehat{\alpha}}{r} = \frac{\alpha^0}{\varrho^0} = \frac{\alpha'}{\varrho'} = \frac{\alpha''}{\varrho''}\,.$$

In neuer Teilung ist

$$\varrho^= = \frac{400\cdot 100\cdot 100^=}{2\pi} = 636\,619{,}772\,4^=.$$

§ 2. Punktbezeichnungen.

Nach dem in der Einleitung Gesagten wird ein Punkt für die Lagemessung durch eine lotrechte Gerade, für die Höhenmessung durch eine wagerechte Ebene ersetzt, von denen ein Teil für die Vermessung im Gelände bezeichnet werden muß.

Dieses erfolgt vorübergehend durch eine Vertiefung im Boden (Kreuz, Ausstechen eines Rasenringes), ein mit Signierkreide auf den Boden gemachtes Zeichen u. dgl., dem zum leichteren Wiederauffinden eine auffallende Marke (eingestecktes Stäbchen, beigelegtes Papier u. dgl.) beigefügt werden kann.

Für längere Zeitdauer bis zu mehreren Jahren bezeichnet man einen Punkt durch einen mit einer Bohrung oder einem Nagel versehenen, bodengleich eingeschlagenen kräftigen Holzpflock oder ein zugespitztes Eisenrohrstück u. dgl., neben die zum leichten Auffinden ein hervorstehender Beipflock oder Nummernpflock mit dem Namen des Punktes geschlagen werden kann. Auf Bauplätzen sichert man solche Punkte durch darumgeschlagene Pflöcke, Bretter, Weidengeflecht u. dgl. vor fahrlässiger Zerstörung; Pflöcke in Moorboden u. dgl. versieht man zur Verhütung des Versinkens am unteren Ende mit einem starken Querholze oder einem Kreuze und erhöht ab und zu die Haltbarkeit zweckmäßig durch Anbrennen, Tränken mit Teer, Karbolineum u. dgl.

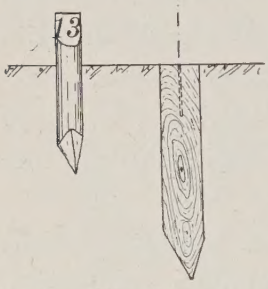


Fig. 2.

Zur dauernden Punktbezeichnung, die man häufig auch Vermarkung nennt, benutzt man dauerhafte Steine (Granit, Zement, fest gebrannte Tonrohre u. dgl.) oder metallische Körper. Die Eck- und Brechungspunkte der Grundstücksgrenzen werden in der Regel durch verschieden große behauene Steine mit etwas hervorragenden Köpfen gebildet, auf denen häufig der Punkt durch eingemeißelte Zeichen näher bezeichnet wird. Fehlt die nähere Bezeichnung am Kopfe,

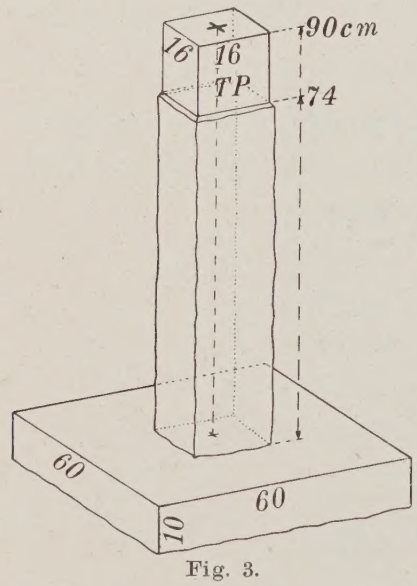


Fig. 3.

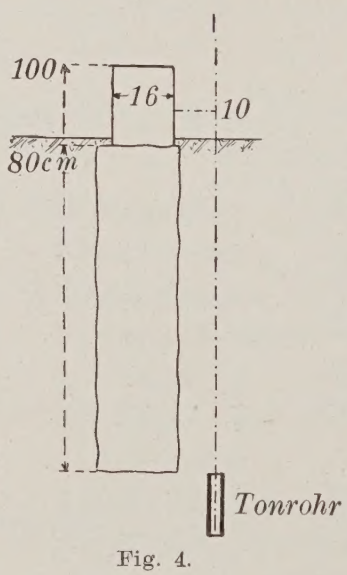


Fig. 4.

dann stellt in der Regel die Mitte des lotrecht eingesetzten Steines den Punkt vor, während für Höhenmessungen meist der höchste Punkt des Kopfes als bezeichneter Punkt gilt. Die Steine müssen bis unter die Frostgrenze (bei uns etwa 70 – 80 cm) in den Boden eingesetzt werden, damit sie sich nicht zu sehr verschieben; bei gewöhnlichen Mark- oder Grenzsteinen begnügt man sich häufig mit etwa der Hälfte. Der bezeichnete Punkt kann auch neben einer am Stein angebrachten Marke liegen, z. B. 1 dm vor einer bezeichneten Seitenfläche (exzentrische Bezeichnung Fig. 4). Die genaue Wiederauffindung eines beschädigten Punktes wird durch die Punktversicherung ermöglicht; auch

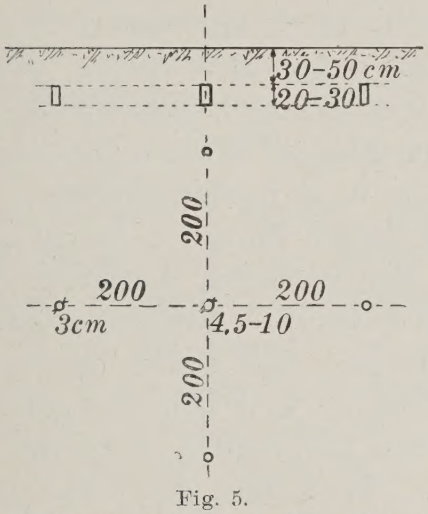


Fig. 5.
Die Kreise stellen Tonrohre mit den eingeschriebenen lichten Weiten vor.

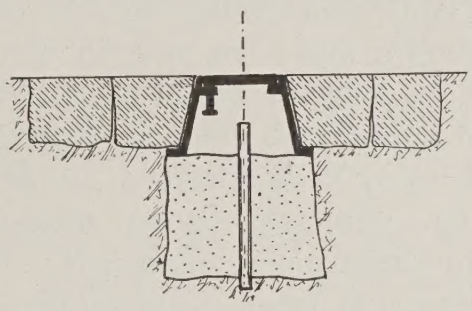


Fig. 6.

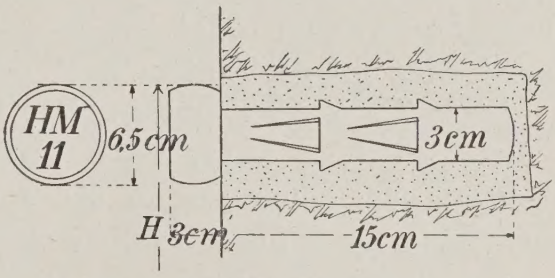


Fig. 7.

durch Einmessen des Punktes auf benachbarte sichere Punkte kann ein verlorener Punkt wieder hergestellt werden. Die Versicherung erfolgt durch steinerne Unterlagsplatten mit Kreuz, durch Tonrohre u. dgl. In Städten haben sich einbetonierte Eisenrohre mit Schutzkappe, deren Deckel bei Benutzung abgehoben wird, gut bewährt (Fig. 6).

Außer diesen künstlichen Punktbezeichnungen dienen noch natürliche Festpunkte wie Gebäudeteile, z. B. Helmstangen und Kugeln an Türmen, Blitzableiter, Schornsteinachsen, Bäume u. dgl. diesem Zwecke. Mit Rücksicht auf eindeutige Bezeichnung und auf die Haltbarkeit nimmt man bei Lagemessungen an Helmstangen und Blitzableitern die Punkte meist so tief unten als möglich an, während zur Höhenbezeichnung meist die Turmknopfmitte dient. Für den letzteren Zweck werden häufig in tief eingesetzte Steine, in Gebäudesockel u. dgl. einzementierte Metallbolzen von der nebenstehenden Form (Fig. 7) benutzt.

Signalisieren (Aufstecken) von Punkten.

Zur Sichtbarmachung eines Punktes auf größere Entfernung muß auf ihm ein Vermessungszeichen angebracht werden, wenn er nicht vermöge seiner natürlichen Beschaffenheit und Lage sichtbar ist, wie z. B. Turmspitzen und Blitzableiter. Am häufigsten dienen zur Signalisierung von Punkten für die gewöhnlichen Zwecke Fluchtstäbe oder Baken, d. h. gerade Holzstäbe oder -stangen von $2 \div 4$ cm Dicke und $1{,}5 \div 3$ m Länge, die zur Erhöhung der Sichtbarkeit in Feldern von 20 oder 50 cm verschiedenfarbig (weiß und rot oder weiß und schwarz) angestrichen sind. Das untere Stabende soll in einem kräftigen eisernen oder stählernen Schuh stecken, damit die Stäbe in den Boden fest eingestoßen und auch zum Abloten (Senkeln) verwendet werden können. Auch aus leichten Eisenrohren (Mannesmann- und Möbelrohre) werden Baken hergestellt, die dann häufig noch eine kleine Zielscheibe tragen. Auf hartem Boden werden die Stäbe mit kleinen dreibeinigen Drahtstativen, durch Umbauen einiger Steine u. dgl. festgehalten. Auf Entfernungen bis zu einigen $(3 \div 4)$ km dienen etwa $6 \div 10$ cm dicke und etwa 4 m lange gerade Stangen, die zum leichteren Auffinden oben einen Strohbusch, gekreuzte Brettchen mit verschiedenfarbigem Anstrich, eine weiß-rote Fahne u. dgl. tragen und entrindet, mit weißem Papier umwickelt oder mit gelöschtem Kalk oder Ölfarbe weiß gemacht sind.

Diese Zielzeichen müssen stets in zwei Richtungen eingelotet und in dieser Stellung festgehalten werden. Das Letzte geschieht durch Einstoßen oder Eingraben in den Boden; längere Stangen nagelt man zweckmäßig an 2 bis 3 seitlich eingeschlagene Spreizen an.

Zur Sichtbarmachung von Punkten auf Entfernungen von mehreren Kilometern reichen Stangensignale nicht mehr aus; man baut dann kleinere oder größere Signalpyramiden und verwendet auch das von Spiegeln zurückgeworfene Sonnenlicht (Heliotrope), künstliches Licht u. dgl. (siehe § 80).

§ 3. Abstecken von Geraden ohne Instrumente.

Gerade und Kurven werden im Gelände durch eine genügende Anzahl ihrer Punkte derart bezeichnet, daß an jeder Stelle der Geraden der Verlauf der durch diese Punkte gehenden Vertikalebene gesehen werden kann. Selten wird die Gerade durch materielle Linien, wie durch gespannte Schnüre und Drähte, oder durch Aufschnüren mit Kreide, Gips oder Rötel auf den Boden bezeichnet. Eine durch ihre Endpunkte gegebene Gerade ist demnach abgesteckt, wenn wenigstens ein Zwischenpunkt bezeichnet ist; in der Regel wählt man aber mehrere Zwischenpunkte in Abständen von etwa $20 \div 50$ m.

Das Aufsuchen der Zwischenpunkte geschieht durch Einweisen von einem Endpunkte aus, wenn dieser zugänglich ist und so liegt, daß der andere Endpunkt gesehen werden kann. Das Auge befindet sich am besten einige Meter hinter dem in A stehenden Fluchtstabe (Fig. 8); ein vom Gehilfen lotrecht gehaltener Stab wird zuerst durch deutliches Winken mit den Armen in 1 eingewiesen, wobei abwechselnd mit freiem Auge an der linken und rechten Seite des Stabes A vorbeigezielt wird. Nachdem der Stab in 1 fest aufgestellt, gut eingelotet und nochmals geprüft ist, wird in derselben Weise Punkt 2, 3 usf. aufgesucht. Die Absteckung darf nicht in umgekehrter Reihenfolge (3, 2, 1) vorgenommen werden, wenn die Stäbe in diesen Punkten so-

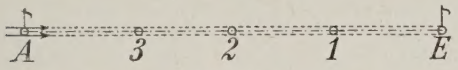


Fig. 8.

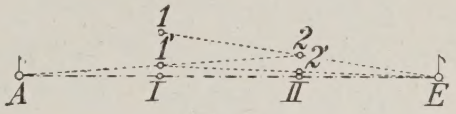


Fig. 9.

gleich festgestellt werden, weil sonst der nächste Stab 3 die entfernteren Stäbe verdecken würde. Auf größere Entfernungen kann ein schwach vergrößernder Feldstecher benutzt werden.

Wenn die Gerade von keinem ihrer Endpunkte aus übersehen werden kann oder wenn diese nicht zugänglich sind, dann wird sie durch gegenseitiges Einweisen abgesteckt. Zu diesem Zwecke stellt sich (Fig. 9) der eine Beobachter mit einem Stabe in dem angenommenen Punkte 1 auf und weist den Stab des zweiten Beobachters nach 2 ein. Hierauf weist 2 den Stab in 1 nach 1′, dann wird 2 von 1′ aus nach 2′ gewiesen usf. Liegen schließlich I, II und E und außerdem II, I und A in einer Geraden, dann sind I und II Punkte der Geraden AE.

Das Verlängern der Geraden AE (Fig. 10) geschieht durch Einrichten des Stabes 1, indem links und rechts vom Stabe in 1 nach E und A gezielt wird. Zur Umgehung eines Hindernisses H, z. B. eines Baumstammes, mißt man z. B. bei A und 1 nahezu senkrecht zur Geraden $A1$ die Strecke a ab, bezeichnet die beiden Punkte A' und 1′ mit Stäben und sucht wie vorher die Punkte 2′ und 3′ auf. Durch Abmessen von a erhält man die Punkte 2 und 3 der Geraden AE.

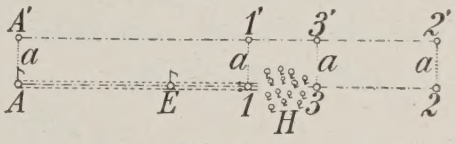


Fig. 10.

Die Genauigkeit der mit freiem Auge eingewiesenen Punkte beträgt bei Linien bis zu etwa 100 m Länge etwa $\pm \frac{1}{2}$ der Stabdicke; bei großen Entfernungen und für den Fall, daß die Punkte auf wenige Millimeter sicher sein sollen, muß zur Absteckung ein passendes Zielfernrohr (etwa ein Theodolit) verwendet werden (siehe § 90).

§ 4. Einiges über Beobachtungsfehler und ihre Fortpflanzung.

Mißt man eine Größe wiederholt (oder mißt man solche Größen, die mit jener Größe in mathematischem Zusammenhange stehen), dann zeigen sich zwischen den Messungsergebnissen Widersprüche, die von Beobachtungsfehlern herrühren. Diese Fehler werden von verschiedenen Ursachen erzeugt und man unterscheidet mit Rücksicht hierauf: grobe, einseitig wirkende oder regelmäßige und zufällige oder regellose Fehler. Grobe Fehler können durch Aufmerksamkeit bei der Beobachtung, einseitig wirkende Fehler entweder durch Wahl passender Meßverfahren, durch Beseitigung ihrer Ursachen oder durch rechnerische Berücksichtigung ihrer Einflüsse unschädlich gemacht werden; die zufälligen Fehler lassen sich zwar durch Verwendung besserer Meßgeräte und größere Aufmerksamkeit bei der Beobachtung kleiner machen, wegen der Unvollkommenheit der Meßinstrumente und der menschlichen Sinne, sodann wegen der ungleichförmigen Beschaffenheit der Atmosphäre u. dgl. können sie aber nie ganz beseitigt werden. Der zufällige Fehler einer Größe muß deshalb als algebraische Summe vieler kleiner Elementarfehler betrachtet werden und nur von den zufälligen Fehlern soll im folgenden zunächst die Rede sein.

Ist L der wahre Wert einer Größe und sind $l_1, l_2, \ldots l_n$ die hierfür gefundenen n gleich genauen Messungsergebnisse, dann sind die wahren Fehler oder Verbesserungen der einzelnen Messungen

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= L - l_1 \\ E_2 &= L - l_2 \\ &\cdots \\ E_n &= L - l_n \end{aligned}\right\} \text{Anzahl } n.$$

Da unter den wahren Fehlern alle Zahlenwerte vorkommen können, so bildet man aus ihnen den sog. mittleren Fehler $\mathfrak{m}$ durch die Definitionsgleichung

$$\mathfrak{m} = \sqrt{\frac{E_1^2 + E_2^2 + \cdots + E_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{[EE]}{n}}. \qquad (1)$$

Dieser mittlere Fehler liefert ein Maß für die Güte der Beobachtungen $l_1, l_2, \ldots l_n$. Jeder Fehler E ist nach dem Gesagten die Summe vieler Elementarfehler ε. Unter der Annahme, daß alle diese Elementarfehler gleich groß und gleich wahrscheinlich positiv wie negativ sind und daß ihre Anzahl unendlich groß wird, kann man über die Häufigkeit des Vorkommens von Fehlern E innerhalb gegebener Grenzen (z. B. zwischen Null und $\pm\,\mathfrak{m}$) ein Gesetz ableiten — das sog. Gaußische Fehlergesetz — und dieses dann durch Vergleichen mit wirklich be-

obachteten Fehlerreihen prüfen. Hierbei zeigt sich, daß das genannte Gesetz mit der Erfahrung genügend übereinstimmt, daß z. B. bei einer sehr großen Fehleranzahl die Zahl der positiven und negativen Fehler gleich, die Summe der ersten gleich der der letzten ist und daß kleine Fehler viel häufiger als große vorkommen. Mit diesem Fehlergesetz kann man dann berechnen, daß z. B. unter 1000 begangenen Fehlern E

der 1fache mittlere Fehler etwa 317mal überschritten wird,
„ 2 „ „ „ „ 46 „ „ „ ,
„ 3 „ „ „ „ 3 „ „ „ ,
„ 4 „ „ „ „ 0,5 „ „ „ .

Für die Praxis nimmt man meist etwa den 3fachen mittleren Fehler, der unter annähernd 368 Messungen nur einmal überschritten wird, als Maximalfehler oder als zulässige Fehlergrenze an.

Fehlerfortpflanzung.

Alle aus fehlerhaften Größen abgeleiteten Größen sind wieder fehlerhaft. Es sei

$$x = \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \cdots + \alpha_n l_n, \tag{2}$$

worin x die zu bestimmende Größe, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ fehlerlose Faktoren, $l_1, l_2, \ldots l_n$ die Messungen bedeuten; ferner seien $\pm m_1, \pm m_2, \cdots \pm m_n$ die mittleren Fehler der $l_1, l_2, \ldots l_n$ und m_x der gesuchte Fehler der Größe x.

Werden bei $l_1, l_2, \ldots l_n$ die bestimmten kleinen Fehler dl_1, $dl_2, \ldots dl_n$ begangen, dann folgt aus Gl (2) der bestimmte Fehler dx in x durch Differenzieren zu

$$dx = \alpha_1 dl_1 + \alpha_2 dl_2 + \cdots + \alpha_n dl_n$$

und ebenso, wenn der Reihe nach die bestimmten (wahren) Fehler $dl', dl'', \ldots dl^{(s)}$ begangen werden:

$$\left.\begin{aligned} dx' &= \alpha_1 dl_1' + \alpha_2 dl_2' + \cdots + \alpha_n dl_n' \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ dx^{(s)} &= \alpha_1 dl_1^{(s)} + \alpha_2 dl_2^{(s)} + \cdots + \alpha_n dl_n^{(s)} \end{aligned}\right\} \text{Anzahl } s. \tag{3}$$

Durch Quadrieren und Addieren dieser Gleichungen folgt:

$$\left.\begin{aligned} [dxdx] = \alpha_1^2[dl_1 dl_1] + \alpha_2^2[dl_2 dl_2] + \cdots + \alpha_n^2[dl_n dl_n] \\ + 2\alpha_1\alpha_2[dl_1 dl_2] + \cdots + 2\alpha_1\alpha_n[dl_1 dl_n] \\ + 2\alpha_2\alpha_3[dl_2 dl_3] + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Da die einzelnen dl als Elementarfehler gleich wahrscheinlich positiv wie negativ zu nehmen sind, so werden alle nicht quadratischen Summen

in (4) zu Null. Dividiert man beide Seiten von (4) mit s und beachtet, daß nach der Definitionsgleichung (1) z. B. aus der endlichen Zahl von s wahren Fehlern $dl_1, dl_1', \ldots dl_1^{(s)}$ der mittlere Fehler durch $m_1 = \sqrt{\frac{[dl_1\, dl_1]}{s}}$ entstanden ist, so wird

$$m_x^2 = \alpha_1^2 m_1^2 + \alpha_2^2 m_2^2 + \cdots + \alpha_n^2 m_n^2. \tag{5}$$

Ist im besonderen in Gl. (2)

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = \frac{1}{n} \\ \text{und } m_1 = m_2 = \cdots = m_n = m, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

dann wird

$$x = \frac{1}{n}(l_1 + l_2 + \cdots + l_n) = \frac{[l]}{n} \quad \text{(arithmetisches Mittel)} \tag{7}$$

und nach (5)

$$m_x^2 = \frac{1}{n^2} n \cdot m^2 = \frac{m^2}{n} \quad \text{oder} \quad m_x = \frac{m}{\sqrt{n}}, \tag{8}$$

d. h. durch Mittelbildung aus n gleich genauen Beobachtungen $l_1 \ldots l_n$ wird der mittlere Fehler des Mittels $\sqrt{n}$ mal kleiner.

$$\left.\begin{aligned} \text{Für } \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = \pm 1 \\ \text{und } m_1 = m_2 = \cdots = m_n = m \end{aligned}\right\} \tag{6'}$$

folgt nach Gl. (2)

$$x = \pm l_1 \pm l_2 \pm \cdots \pm l_n \tag{7'}$$

und nach (5)

$$m_x^2 = m^2 \cdot n \quad \text{oder} \quad m_x = m \cdot \sqrt{n}. \tag{8'}$$

§ 5. Ausgleichen direkter gleich genauer Beobachtungen einer Unbekannten nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Für die zu bestimmende Größe x wurden die gleich genauen Beobachtungen $l_1, l_2, \ldots l_n$ erhalten. Um diese miteinander verträglich zu machen, müssen sie um die Größen $v_1, v_2, \ldots v_n$ verbessert werden; also

$$\left.\begin{aligned} l_1 + v_1 = x \\ l_2 + v_2 = x \\ \cdots\cdots \\ l_n + v_n = x \end{aligned}\right\} \quad \text{oder} \quad \left.\begin{aligned} v_1 = x - l_1 \\ v_2 = x - l_2 \\ \cdots\cdots \\ v_n = x - l_n \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Jedem Werte x entspricht hiernach ein bestimmtes System der Verbesserungen v. Wird x unter Erfüllung der Bedingung

$$v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2 = [vv] = \text{Minimum} \tag{2}$$

bestimmt, dann wird dafür der wahrscheinlichste Wert erhalten, wenn die bei der Beobachtung gemachten Fehler das in § 4 genannte Fehlergesetz befolgen, und die aus Gl. (1) folgenden Verbesserungen werden dann die wahrscheinlichsten. Diesen Wert $\underline{x}$ bezeichnet man als den nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichenen Wert.

Durch Quadrieren der Gleichungen (1) und Addieren wird

$$v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2 = n \cdot \underline{x}^2 + (l_1^2 + l_2^2 + \cdots + l_n^2) - 2\underline{x}(l_1 + l_2 + \cdots + l_n)$$

oder

$$[vv] = n\underline{x}^2 + [ll] - 2\underline{x}[l]. \tag{3}$$

Durch Differenzieren nach der Veränderlichen $\underline{x}$ und Anwenden der Minimumbedingung (2) wird

$$\frac{\partial [vv]}{\partial x} = 2n\underline{x} - 2[l] = 0 \quad \text{oder} \quad \underline{x} = \frac{[l]}{n}. \tag{4}$$

(Der zweite Differentialquotient wird stets größer als Null.) Unter der angegebenen Voraussetzung gibt demnach das arithmetische Mittel den wahrscheinlichsten Wert der gesuchten Größe. Setzt man (4) in (1) ein, dann erhält man die bei den einzelnen Messungen begangenen wahrscheinlichsten Fehler v und es muß zur Rechnungsprobe werden

$$[v] = 0 = n\underline{x} - [l]. \tag{5}$$

Da diese v nicht die wahren, sondern die wahrscheinlichsten Fehler sind, so erhält man den mittleren Fehler einer der n Beobachtungen nicht durch Gl. (1), § 4, sondern durch

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}. \tag{6}$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung wird später (§ 70, Seite 156) erläutert werden. (Der Nenner geht in die Zahl der zur Bestimmung von $\underline{x}$ überschüssigen Messungen über.)

Der mittlere Fehler des ausgeglichenen Wertes $\underline{x}$ wird nach Gl. (8), § 4,

$$m_x = \frac{m}{\sqrt{n}}. \tag{7}$$

I. Abschnitt.

Die wichtigsten Winkelmeßinstrumente und ihr Gebrauch.

1. Kapitel.

Einige einfache Instrumente zur Angabe konstanter Winkel von 90°, 180° und 45°.

§ 6. Die Kreuzscheibe.

Die Kreuzscheibe besteht aus einer Zielvorrichtung, die auf einem zum Einstoßen in den Boden eingerichteten, etwa 1,5 m langen Stock (aus Eisenrohr oder Holz) angebracht ist. Der Stock wird entweder nach Augenmaß, mit einem Senkel oder einer Dosenlibelle D (Fig. 11) lotrecht gerichtet. Die Zielvorrichtungen bestehen aus 0,4 ÷ 0,8 mm breiten Spalten, die in dem zweckmäßig kegelförmigen, metallenen Kopf derart eingefräst sind, daß durch je zwei im Abstande von 6 ÷ 12 cm gegenüberliegende Spalte hindurch gezielt werden kann. Die Zielebenen bilden Winkel von 90° und teilweise auch von 45° miteinander.

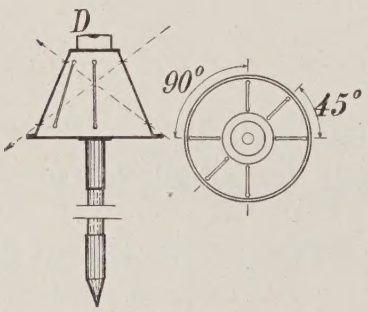


Fig. 11.

Zum Abstecken der Geraden AE (Fig. 12) mit Hilfe der Kreuzscheibe wird diese in dem

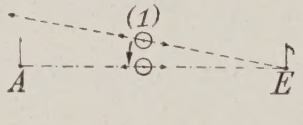


Fig. 12.

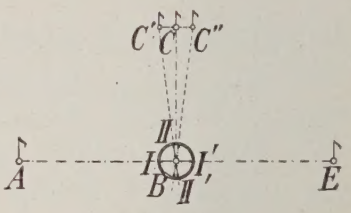


Fig. 13.

angenommenen Punkte (1) aufgestellt, worauf durch passendes Drehen der Kreuzscheibe und gleichzeitiges Zielen durch zwei Spalte E angezielt wird (Orientieren der Kreuzscheibe nach E). Die hierauf durch die beiden Spalte nach A zu gehende Zielung wird an diesem Punkte vorbeigehen und die Kreuzscheibe ist dann so lange quer zu verschieben, bis die Zielebene durch E und A hindurchgeht.

Soll in einem Punkte B der Geraden AE (Fig. 13) das Lot errichtet werden, so wird die Kreuzscheibe in diesem Punkte aufgestellt,

nach der Geraden orientiert, und dann wird in die entsprechende Zielebene ein Stab C eingewunken.

Die Bestimmung des Fußpunktes des von einem Punkte C auf die Gerade AE gefällten Lotes (Fig. 13) erfolgt durch Versuche.

Damit mit der Kreuzscheibe richtig gearbeitet werden kann, soll durch je zwei gegenüberliegende Spalte der Kreuzscheibe eine Ebene möglich sein und außerdem sollen die Winkel zwischen den Zielebenen richtig (also 90^0, 45^0) sein. Die erste Forderung (Kreuzung der Spalte) untersucht man, indem man an verschiedenen Stellen durch die Spalte nach einem lotrecht gestellten Fluchtstabe zielt, die zweite Forderung durch Antragen des zu untersuchenden Winkels, z. B. an die zwei Schenkel eines gestreckten Winkels (Gerade). Man weist zu diesem Zwecke in die etwa 100 m lange Gerade AE (Fig. 13) den Punkt $O{=}B$ ein, stellt hier die Kreuzscheibe auf und trägt den fehlerhaft angenommenen Winkel $IOII$ durch Einwinken des Stabes C' in etwa 50 m Entfernung an BA an. Dreht man dann die Kreuzscheibe, bis die Zielung $IIII'$ mit AE zusammenfällt, so wird durch Einwinken von C'' der Winkel $IOII$ an BE angetragen. Der Abstand $\overline{C'C''}$ entspricht dem doppelten Fehlerwinkel δ, und da δ stets klein ist, so wird $\delta = \frac{\overline{C'C''} \cdot \varrho}{2 \cdot \overline{BC}}$. Ergibt sich δ kleiner als etwa $1'$, dann ist die Kreuzscheibe als richtig zu betrachten; im anderen Falle müßte ein Spalt verschoben werden (was meist nur vom Mechaniker ausführbar ist).

Der mittlere Zielfehler durch zwei Spalte wurde aus vielen Versuchen zu etwa $\pm 1{,}0'$ gefunden. Da bei der Absteckung eines Winkels zwei solche Fehler zusammenwirken, so wird nach § 4 Gl. (8′) unter günstigen Verhältnissen ein abgesteckter Winkel um $\pm 1{,}0' \cdot \sqrt{2} = \pm 1{,}4'$ unsicher. Im allgemeinen darf dieser Betrag in der Ebene auf $2'$, an Hängen u. dgl. auf $3'$ erhöht werden. Wenn deshalb der Lotfußpunkt in der Geraden auf ± 3 cm richtig gefunden werden soll, so darf die Länge $\overline{BC}$ des Lotes höchstens sein: $\overline{BC} \leqq \frac{3438'}{2'} \cdot 0{,}03 \approx 51$ m. Bei Eigentumsvermessungen (z. B. Katastermessungen) sind deshalb ohne sonstige versichernde Messungen (z. B. Messung der Hypotenuse) längere Lote als etwa $40 \div 50$ m unzulässig.

§ 7. Winkelspiegel und Spiegelkreuz.

Der Winkelspiegel besteht aus zwei zu einer Ebene senkrecht stehenden Spiegeln S_1 und S_2, die sich unter dem Winkel α schneiden (Fig. 14). Der zweimal reflektierte Strahl wird um den konstanten Winkel

$\beta = 2\alpha$ abgelenkt. Zählt man die Ablenkung im Uhrzeigerdrehsinne positiv, im entgegengesetzten Sinne negativ, so beträgt die Ablenkung

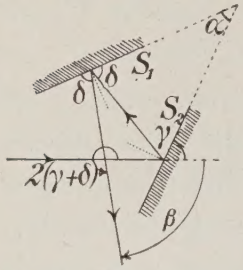


Fig. 14.

durch die erste Reflexion: -2γ,
„ „ zweite „ : -2δ,
Gesamtablenkung: $-2(\gamma+\delta) = -(360^0-\beta)$.

Da nach der Figur:

$$\alpha = 180^0 - (\gamma + \delta),$$

so folgt:

$$\beta = 2\alpha.$$

Am häufigsten wird genommen $\alpha = 45^0$, also $\beta = 90^0$. Die Fassungen der Spiegel können sehr verschieden sein und das Instrument wird entweder in freier Hand gehalten oder auf einem Stock befestigt. Das Auge sieht (Fig. 15) im Spiegel S_2 die Stäbe RR und gleichzeitig durch das Fenster F_2 hindurch den Stab B. Durch Verschieben des Winkelspiegels in der Geraden RR kann B mit R zur Deckung gebracht werden (Aufsuchen des Lotfußpunktes). Anstelle des etwas veränderlichen Strahlenschnittpunktes O wird meist der Punkt H abgelotet.

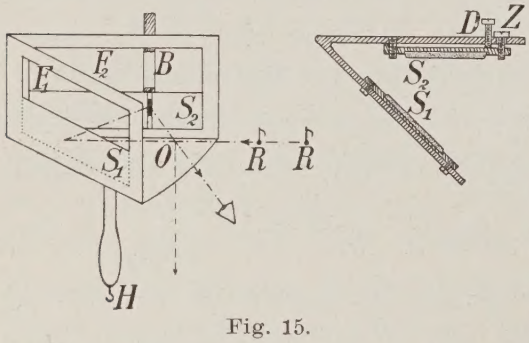


Fig. 15.

Einer der beiden Spiegel muß drehbar sein, damit α auf seinen Sollwert gebracht werden kann. Zu diesem Zwecke kann z. B. mit Hilfe der Zug- und Druckschrauben Z und D (Fig. 15) der Spiegel S_2 bewegt werden.

Die Prüfung des Winkelspiegels wird in derselben Weise vorgenommen wie die der Kreuzscheibe. Durch Halbieren der Strecke $C'C''$ (Fig. 13) wird der richtige Punkt C gefunden und der eine Spiegel ist hierauf durch die Schräubchen Z und D so zu verstellen, daß A und E in der Richtung BC gesehen werden.

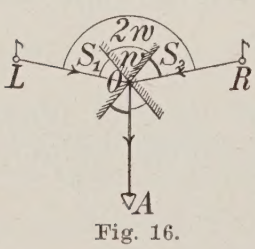


Fig. 16.

Beim Spiegelkreuz stehen die beiden Spiegel S_1 und S_2 (Fig. 16) senkrecht zur gleichen Grundfläche und kreuzen sich unter 90^0. Werden vom Auge A die beiden Stäbe L und R in derselben Richtung übereinander gesehen, dann bilden die beiden Strahlen OL und OR den Winkel $2 \cdot S_1OS_2$; beträgt also der Winkel der beiden Spiegel 90^0, so wird $LOR = 180^0$, es kann dann die Gerade LR abgesteckt werden. Einer der beiden Spiegel ist in derselben Weise wie beim Winkelspiegel

drehbar, damit $S_1 O S_2 = 90^0$ gemacht werden kann. Die Untersuchung erfolgt durch zweimaliges Abstecken des fehlerhaften Winkels LOR zwischen B und C, wie Fig. 17 andeutet. Der gesuchte Punkt D liegt in der Mitte zwischen D_1 und D_2, das Instrument wird nach D gebracht und dann werden B und C durch Drehen der Berichtigungsschräubchen zur Deckung gebracht.

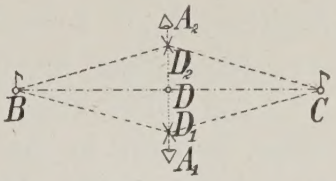


Fig. 17.

Häufig sind Winkelspiegel und Spiegelkreuz am gleichen Instrumente vereinigt.

§ 8. Winkelprismen und Prismenkreuz.

Am häufigsten werden gleichschenklig-rechtwinklige Glasprismen von einigen Zentimetern Kathetenlänge angewendet. Deren Hypotenusenfläche ist mit Spiegelbelag versehen und es läßt sich allgemein nachweisen, daß ein Lichtstrahl, der, wie Fig. 18 zeigt, im Innern des Prismas zweimal reflektiert wird, um den konstanten Winkel $w = \sphericalangle ABC$ abgelenkt wird, wenn $\sphericalangle ACB = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle ABC$ ist (Bauernfeindscher Satz). Ist im besonderen

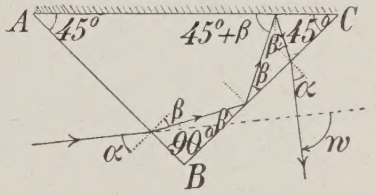


Fig. 18.

$$\sphericalangle ACB = 45^0, \quad \sphericalangle ABC = 90^0,$$

dann wird $w = 90^0$. Die Richtigkeit dieser Behauptung liest man aus der Fig. 18 ab; es ist:

$$\text{Ablenkung } w = -\alpha + \beta - 2\beta + 2 \cdot (45^0 + \beta) - \beta + \alpha = 2 \cdot 45^0 = 90^0.$$

Dieser Winkel ist also konstant und unabhängig von α. Das Auge muß jeweils in der Nähe der Kanten A, B oder C in das Prisma hineinsehen und die Bilder dürfen sich beim Drehen des Prismas in horizontaler Richtung nicht verschieben (feste Bilder).

Die Untersuchung ist wie bei der Kreuzscheibe und beim Winkelspiegel vorzunehmen; eine Korrektur ist nur durch Nachschleifen des Prismas möglich. Neuere gewöhnliche Prismen aus guten Werkstätten sind aber so genau geschliffen, daß sie den Winkel w zwischen 12″ und 40″ (durchschnittlich auf 25″) richtig liefern.

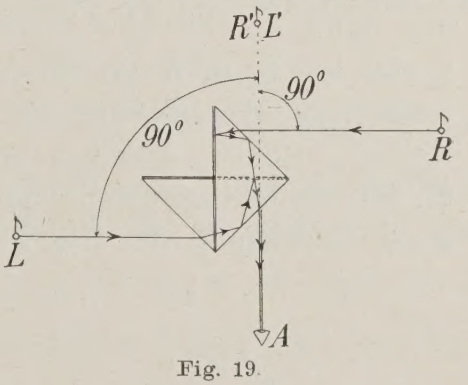


Fig. 19.

Im Prismenkreuz sind zwei solcher Prismen übereinander angeordnet, am häufigsten nach Andeutung der Fig. 19. Wenn die beiden Bilder L und R sich

decken, dann befindet sich das Prisma in der Geraden LR und AR' ist gleichzeitig hiezu senkrecht.

Bei einer zweiten Gebrauchsart werden die Prismen wie gewöhnliche Spiegel in derselben Weise wie beim Spiegelkreuz verwendet. Das Auge blickt dann nahezu in der Mitte in die beiden Kathetenflächen; bei der Drehung des Instrumentes bewegen sich die Bilder L' und R' im horizontalen Sinne mit. Wird das eine der beiden Prismen in einer besonderen Fassung leicht drehbar angeordnet, dann können mit diesem Instrumentchen, der Prismentrommel, nach Andeutung der Fig. 16 beliebig große Winkel $2w$ angegeben werden, so daß dadurch Punkte eines Kreisbogens über einer gegebenen Sehne aufgesucht werden können.

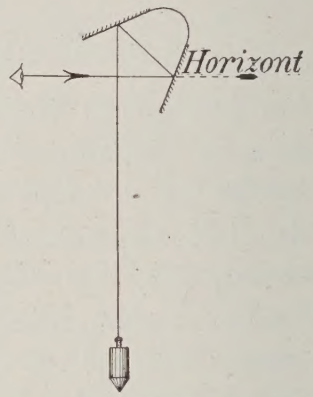


Fig. 22.

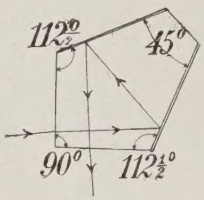


Fig. 20.

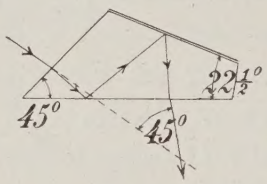


Fig. 21.

Durch ein solches dreiseitiges Glasprisma kann man auch nahezu parallel zur Hypotenusenfläche hindurchsehen, wobei dann links und rechts vertauscht erscheint (Reversionsprisma).

Neuerdings kommen auch fünfseitige Prismen wegen des etwas größeren Gesichtsfeldes als bei den dreiseitigen Prismen vielfach in Anwendung. Der Strahlengang in einem solchen Pentagonalprisma sowie in einem dreiseitigen Prisma zur Angabe von 45^0 ist in den Figuren 20 und 21 angegeben.

Aus vielen Versuchen hat sich ergeben, daß mit den in § 7 und 8 behandelten Reflexionsinstrumenten die Winkel auf etwa $\pm 1'$ genau abgesteckt werden. Da die Horizontalprojektion eines rechten Winkels nur dann ein Rechter bleibt, wenn einer der beiden Schenkel horizontal ist, so muß die durch das Instrument gehende horizontale Richtung bekannt sein, um mit den Reflexionsinstrumenten in hügeligem Gelände richtig arbeiten zu können. Durch Anhängen eines Lotes an ein Reflexionsinstrument kann zu diesem Zwecke die Horizontale nach Andeutung der Fig. 22 leicht genügend sicher ermittelt werden.

2. Kapitel.

Teile zusammengesetzter Meßinstrumente.

§ 9. Die Glaslinse.

Eine Glaslinse ist ein von Kugelflächen begrenzter Glaskörper und derjenige Lichtstrahl, der die Linse durchdringt, ohne aus seiner Richtung abgelenkt und ohne parallel verschoben zu werden, bildet die Linsenachse. Alle parallel zu dieser in der Nähe der Linsenmitte auftreffenden einfarbigen Lichtstrahlen (Zentralstrahlen) werden beim Durchgange durch die Linse so gebrochen, daß sie durch einen Punkt der Achse, den Brennpunkt F_1 oder F_2, hindurchgehen und umgekehrt (Hauptstrahlen).

Bei einer Sammellinse ergeben sich die in der Fig. 23 angegebenen Strahlenwege. Die Brennweite f ist bei dünnen Linsen der Abstand

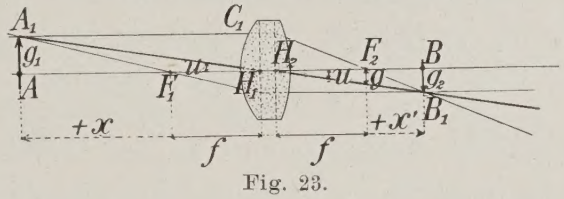


Fig. 23.

der Brennpunkte von der Linsenmitte, bei dicken Linsen und Linsensystemen findet man mit den gegebenen Brennpunkten F_1 und F_2 und der Brennweite f nach Andeutung der Fig. 23 die zugehörigen Hauptpunkte H_1 und H_2 und es ist für $x = \infty$ also $f = g \cdot \operatorname{ctg} u$. Aus dem gemessenen Winkel u und der gemessenen Strecke g ist demnach die Brennweite bekannt.

Zu jedem Gegenstande AA_1 kann man mit den Hauptstrahlen A_1F_1, A_1C_1 und den Brenn- und Hauptpunkten des Linsensystems das zugehörige Bild BB_1 konstruieren; der Strahl A_1H_1 geht in der zu ihm parallelen Richtung H_2B_1 weiter. Durch Bezeichnung eines bestimmten Punktes B_1 des Bildes ist also auch die Linie H_1A_1 bestimmt.

Zwischen den Größen x, x' und f besteht für Zentralstrahlen die Beziehung

$$\frac{1}{x+f} + \frac{1}{x'+f} = \frac{1}{f} \quad \text{oder} \quad xx' = f^2 \text{ (Dioptrische Hauptgleichung).}$$

Zwei dünne Linsen mit den Brennweiten f_1, f_2 im Abstande d können optisch ersetzt gedacht werden durch die äquivalente Linse mit der Brennweite $\varphi = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - d}$. Durch Abtragen der Strecke φ von den Brennpunkten F_1 und F_2 des Systemes erhält man die Orte

H_1 und H_2, an denen die äquivalente Linse für den einzelnen Zweck zu denken ist (Fig. 24 und 25).

Die Bestimmung der Brennpunktsörter und der Brennweite φ von Konvexlinsen S kann man in folgender Weise ausführen. Man stellt ein Hilfsfernrohr auf Unendlich ein (d. h. man verschiebt den Auszug solange, bis ein weit entfernter Gegenstand deutlich gesehen wird), richtet es auf die Linse S und verschiebt diese gegen eine davorstehende Glasskala solange, bis diese deutlich gesehen wird. Die abgemessene Strecke a_1 von der Skala bis zu einer beliebigen Marke an der Linsenfassung gibt den Abstand des einen Brennpunktes von der Marke. Nach Umdrehen der Linse S und Wiederholen des Vorganges erhält man a_2 (Abstand des zweiten Brennpunktes von der Marke), so daß bei Vernachlässigung des Abstandes der beiden Hauptebenen (näherungsweise) wird: $\varphi \approx \frac{a_1 + a_2}{2}$. Stellt man eine Skala von der Länge g_1 in ungefähr doppeltem Brennweitenabstand von der Linse auf, mißt die entsprechende Bildgröße g_2 z. B. mit einem feinen Maßstabe und außerdem den Abstand c_1 der Skala von der Marke an der Linsenfassung, dann ist, wenn x und x' die Abstände der beiden Maßstäbe (Skala und Maßstab) von den beiden Brennpunkten (Fig. 23) sind:

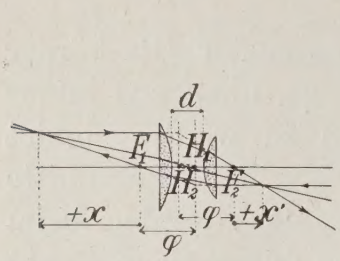


Fig. 24.

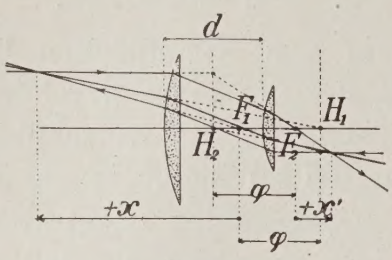


Fig. 25.

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{x}{x'},$$

$$\text{folglich:} \quad \frac{\varphi^2 = xx'}{\varphi^2 = x^2 \cdot \frac{g_2}{g_1}},$$

wobei $x = c_1 - a_1$, wenn a_1 = Abstand des infragekommenden Brennpunktes von der Marke.

Zur scharfen Bestimmung der Brennweite von Fernrohrobjektiven kann man bei BB_1 (Fig. 23) z. B. ein Glasplättchen mit zwei im Abstande g_2 gezogenen feinen parallelen Linien anbringen und auf einem verhältnismäßig weit entfernten (etwa in Zentimeter geteilten) Maßstabe bei AA_1 das zwischen den beiden Linien gesehene Stück g_1 ablesen. Dann ist: $f + x' = (x + f) \cdot \frac{g_2}{g_1}$ und $xx' = f^2$, also $x' = \frac{f^2}{x}$. Setzt man $x + f = E$ (Entfernung des Maßstabes von der Objektivlinse), so wird:

$$f = E \cdot \frac{g_2}{g_1} - \frac{f^2}{E - f}.$$

Diese Gleichung löst man am einfachsten näherungsweise auf; z. B. für $g_2 = 2{,}501$ mm, $E = 50{,}0$ m, $g_1 = 3{,}876$ m ergibt sich:

$$f = \frac{50{,}0 \cdot 2{,}501}{3876} - \frac{f^2}{E - f} = 0{,}3226 - \frac{0{,}322^2}{49{,}68} = 0{,}3226 - 0{,}0021 = 0{,}3205 \text{ m}.$$

Die Brennweite ist sehr wenig mit der Temperatur veränderlich, nämlich um ungefähr 0,002 % ihrer Größe für 1° Celsius, z. B. für $\varphi = 220$ mm und $t = 30^0$ wird $d\varphi = 2{,}20 \cdot 0{,}002 \cdot 30 = 0{,}132$ mm.

Die am Rande einer Sammellinse parallel zur Achse auffallenden einfarbigen Lichtstrahlen werden stärker als die Zentralstrahlen gebrochen und schneiden deshalb die Achse früher als diese. Der Abstand der zwei Brennpunkte auf der Achse heißt sphärische oder Kugelabweichung; er ist abhängig von der Linsenform und der Gebrauchsart der Linse, dem Linsendurchmesser e und der Brennweite φ in der Weise, daß: Kugelabweichung = Konst. $\frac{e^2}{\varphi}$. Die durch die Kugelabweichung verursachte Unschärfe der Bilder wird durch Zusammensetzen mehrerer Linsen mit größeren Brennweiten und auch durch passendes Abblenden (Verkleinern von e) verringert und diese Korrektion kann auch auf parallele Strahlen, die mit der Achse einen Winkel bilden, ausgedehnt werden.

Das weiße Licht wird beim Durchgange durch Linsen nicht nur gebrochen, sondern auch in Farben zerlegt. Die roten Strahlen werden weniger stark als die violetten abgelenkt und deshalb ist der Brennpunkt der ersteren Strahlen bei Sammellinsen weiter von der Linse entfernt als der der letzteren Strahlen. Die im Brennpunkte der hellsten (etwa der gelben) Strahlen angenommenen Bildpunkte besitzen demnach farbige Ränder. Diese Farbenabweichung (Chromatismus) kann beseitigt werden entweder dadurch, daß die Linse aus mindestens zwei passenden Linsen mit verschiedener Farbenzerstreuung (z. B. Kron- und Flintglas) gebildet wird (achromatische Linse) (Fig. 26) oder dadurch, daß die Krümmungsradien und die Abstände der Linsen so gewählt werden, daß die verschiedenen Farben als parallele Strahlen das System verlassen und dann im Auge wieder nahezu vereinigt werden (achromatisches Linsensystem) (Fig. 27). In beiden Fällen kann auch gleichzeitig die sphärische Abweichung möglichst klein gemacht werden; derartige Linsensysteme heißen aplanatisch.

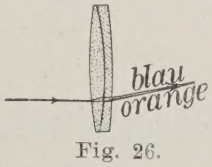


Fig. 26.

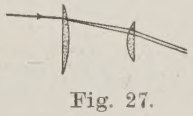


Fig. 27.

§ 10. Lupen.

Lupen werden verwendet, um vergrößerte Bilder naher Gegenstände zu erhalten, und bestehen aus einer oder aus mehreren meist plankonvexen oder nahezu plankonvexen Linsen.

Wird eine plankonvexe Linse ganz nahe an das Auge gehalten, dann wendet man zur Erzielung guter Bilder die ebene Seite der Linse dem Auge zu. Es sind Linsen von Brennweiten bis zu $f = 25$ mm herab brauchbar; der Gegenstand darf dabei $\frac{1}{3}$ bis $\frac{1}{4}$ der Brennweite groß sein.

Wenn das Auge von der Linse weit entfernt ist ($\gtrless f$), dann erhält man hellere Bilder als im ersten Falle; die weniger gewölbte Seite der Linse wendet man aber zur Erzielung besserer Bilder dem nicht über etwa $\frac{1}{8} f$ großen Gegenstande zu.

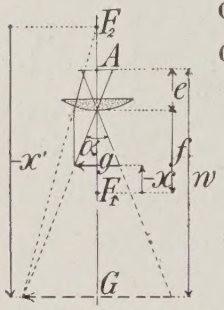


Fig. 28.

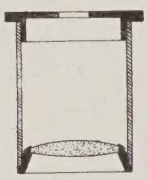


Fig. 29.

Die Form der Linsenfassung (Ring oder Röhre) richtet sich nach der Verwendungsweise der Lupen.

Durch die Lupe erblickt das Auge den Gegenstand unter dem Winkel α, ohne sie aber unter dem Winkel β, wenn er um die deutliche Sehweite w von dem Auge entfernt ist (Fig. 28). Da diese deutliche Sehweite für verschiedene Augen verschieden groß ist, hat man sie durch Übereinkunft zu 25 cm angenommen. Die konventionelle Vergrößerung V ist dann das Sehwinkelverhältnis $\frac{\alpha}{\beta}$.

Mit den Bezeichnungen der Fig. 28, in der A den Ort des Auges bedeutet, ist demnach, wenn F_1 und F_2 die beiden Brennpunkte und f die Brennweite sind,

$$\beta = \frac{g}{w}; \quad \alpha = \frac{G}{w}; \quad V = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{G}{g} = \frac{w - e}{f - x}.$$

Mit der dioptrischen Hauptgleichung wird:

$$x(w - e + f) = f^2$$

und deshalb

$$V = \frac{w}{f} - \frac{e}{f} + 1.$$

Z. B. für den Augenabstand

$$e = 0 \quad \text{wird} \quad V_{\max} = \frac{w}{f} + 1,$$

$$e = f \quad \text{„} \quad V = \frac{w}{f}.$$

Etwas stärkere Vergrößerungen als 8 ÷ 10 fach erreicht man mit

zwei unachromatischen plankonvexen Linsen, z. B. nach Fig. 32, Seite 25 (Ramsdensches Okular).

Zur Bestimmung der konventionellen Vergrößerung betrachtet man mit dem einen Auge durch die Lupe einen Millimetermaßstab, sieht gleichzeitig mit dem anderen Auge neben der Lupe vorbei auf eine sich in 25 cm befindende Millimeterteilung und zählt auf dieser die Anzahl der durch einen vergrößerten Teil gedeckten Teile ab, wodurch nach dem oben Gesagten die Vergrößerung gefunden ist. Die beiden Augen müssen hierbei gleich (und normalsichtig) sein.

§ 11. Das astronomische Fernrohr.

Das gebräuchlichste astronomische Fernrohr besteht aus dem dem zu betrachtenden Gegenstande G zugewandten Objektive und dem dem Auge A zugerichteten Okulare (Fig. 30), die in zwei Röhren so gefaßt sind, daß der Linsenabstand durch Verschieben der Okular- oder der Objektivröhre etwas geändert werden kann. Zur Abhaltung schäd-

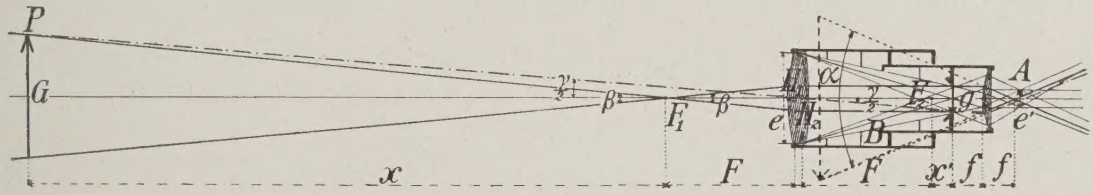


Fig. 30.

licher Strahlen sind Blendrähmchen B vorhanden, schädliche Lichtreflexe werden durch mattschwarze Beizung sämtlicher Metallteile im Innern der Röhren hintangehalten.

Das Objektiv (Fig. 30) entwirft vom weit entfernten Gegenstande G das umgekehrte, reelle Bildchen g, das mit dem als Lupe wirkenden Okulare durch das Auge betrachtet wird. Dieses sieht demnach den Gegenstand im Fernrohr unter dem Winkel α, ohne Fernrohr hinreichend genau unter dem Winkel β, die Vergrößerung ist also

$$V = \frac{\alpha}{\beta}. \tag{1}$$

Ist G unendlich weit vom Objektiv entfernt, dann liegt g im Brennpunkt F_2 des Objektivs; rückt der Gegenstand bis auf x an den vorderen Objektivbrennpunkt F_1 heran, dann rückt das Bild g vom Brennpunkte F_2 um x' weg, und wenn F die Objektivbrennweite ist, so wird nach § 9

$$x' = \frac{F^2}{x}.$$

Z. B. für $F = 250$ mm; $x_1 = 200$ m; $x_1' = 0{,}0003$ m,
$x_2 = 5$ m; $x_2' = 0{,}0250$ m.

Das Okular- oder Objektivrohr müßte also um 26 mm ausziehbar sein, um etwa 5 m weit entfernte Punkte noch deutlich sehen zu können.

Damit alles in das Objektiv einfallende Licht dem Auge zugeführt werden kann, darf keine Blende in den angedeuteten Lichtkegel hineinragen und die das Gesichtsfeld bei g begrenzende Blende und das Okular müssen richtig dimensioniert sein. Auf der Okularseite ist der austretende Lichtkegel an der Stelle A, wo das durch das Okular vom Objektiv als Gegenstand gelieferte Bild liegt, am engsten. Dieser Bilddurchmesser e' soll deshalb kleiner als der Pupillendurchmesser des in dieser Stelle beobachtenden Auges sein (Augpunkt). Die Objektive bestehen jetzt fast ausnahmslos aus achromatischen Linsen und auch die Okulare setzt man zur Verkleinerung der sphärischen und chromatischen Abweichung meist aus mehreren Linsen zusammen (siehe § 12).

Wenn der Gegenstand G sehr weit entfernt (im Unendlichen) und g seine Bildgröße ist, so darf in Gl. (1) gesetzt werden: $\beta = \frac{g}{F}$ und außerdem $\alpha = \frac{g}{f}$, worin f die Brennweite des Okularsystems, so daß aus Gl. (1) wird:

$$V = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{g}{f} \cdot \frac{F}{g} = \frac{F}{f}. \tag{2}$$

Falls das Fernrohr so gestellt ist, daß darin ein unendlich ferner Punkt deutlich gesehen wird (auf Unendlich eingestellt ist), so wird auch (Fig. 30):

$$V = \frac{F}{f} = \frac{e}{e'}, \tag{3}$$

wenn e bzw. e' den Objektivdurchmesser bzw. den Durchmesser seines Bildchens bedeuten. Sieht man in das Okular eines solchen gegen das einfallende Licht gerichteten Fernrohrs aus einiger Entfernung hinein, dann erblickt man das helle Bildkreischen des Objektives (Ramsdenscher Kreis), dessen Durchmesser e' mit Maßstab und Lupe abgemessen werden kann. Etwas schärfer wird die Bestimmung der Vergrößerung nach (3), wenn vor das Objektiv ein Papierausschnitt e gesetzt und dann mit einer fein geteilten Skala mit Lupe der Durchmesser e' gemessen wird.

Z. B. an ein auf Unendlich eingestelltes Fernrohr wurde ein Papierausschnitt von $e = 30{,}0$ mm unmittelbar vor das Objektiv gehängt und dann $e' = 1{,}64$ mm gemessen. Die Vergrößerung beträgt demnach $V = \frac{30{,}0}{1{,}64} = 18{,}3$. Mit demselben Fernrohr wurde eine in

etwa 60 m Abstand befindliche und in Zentimeter geteilte lotrechte Latte von 415 cm Länge mit dem einen Auge betrachtet. Mit dem anderen Auge wurde gleichzeitig neben dem Fernrohr vorbeigesehen und dann festgestellt, daß 23 vergrößerte Zentimeterfelder die ganze Latte decken. Die Vergrößerung ist demnach nach Gl. (1):

$$V = \frac{415}{23} = 18{,}1.$$

Die Vergrößerungen der gewöhnlichen Meßfernrohre schwanken zwischen 10 und 40, am häufigsten sind sie in der Nähe von 20.

Derjenige kegelförmige Raum, der mit dem Fernrohr auf einmal übersehen wird, heißt Gesichtsfeld. Sieht man auf einem in der nicht zu kleinen Entfernung E vom Objektiv aufgestellten Maßstabe das Lattenstück l, so ist der Gesichtsfeldwinkel (nach Fig. 30) genügend scharf: $\gamma^0 = \frac{l}{E}\varrho^0$.

Z. B. für das vorhin benutzte Fernrohr wurde gefunden

$l = 0{,}96$, $E = 53{,}5$. Demnach wird $\gamma = \frac{0{,}96}{53{,}5} \cdot 57{,}3^0 = 1{,}0^0$.

Das Gesichtsfeld soll von der Gesichtsfeldblende (oder dem Diaphragma) g begrenzt werden. Diese ist stets an der Stelle, wo sich das vom Objektiv erzeugte reelle Bildchen des Gegenstandes befindet. Da der Diaphragmendurchmesser g nach § 10 nicht über $\frac{1}{3}$ bis $\frac{1}{4}$ der Brennweite f des Okulars sein soll, so folgt für das auf Unendlich eingestellte Fernrohr: $\gamma^0 = \frac{g}{F}\varrho^0 = \frac{f}{(3 \div 4)F} \cdot \varrho^0 = \frac{\varrho^0}{(3 \div 4)V}$, d. h. das Gesichtsfeld ist der Vergrößerung umgekehrt proportional.

Die Objektivöffnung e wird oft in Bruchteilen der Objektivbrennweite F angegeben; der Öffnung $\frac{F}{8{,}2}$ entspricht demnach mit $F = 270$ mm ein Objektivdurchmesser von $e = \frac{270}{8{,}2} = 33$ mm. An Meßfernrohren schwankt das Öffnungsverhältnis zwischen $\frac{F}{7}$ und $\frac{F}{12}$; am häufigsten liegt es in der Nähe von $\frac{F}{8}$. Erstere Fernrohre sind im Walde u. dgl. im allgemeinen vorzuziehen, weil sie hellere Bilder liefern; doch haben hierauf die zu den Linsen verwendeten Glassorten u. dgl. großen Einfluß. Wegen unvermeidlicher Verluste beim Durchgange des Lichtes durch die Fernrohrlinsen muß die Helligkeit der Gesichtsfeldfläche (im Fernrohr) stets kleiner sein als die Helligkeit der gleichen mit dem freien Auge betrachteten Fläche; bei dunstiger Luft liefert deshalb das Fernrohr lichtschwache Bilder.

Die Linsen des Fernrohres sollen zentriert sein, d. h. ihre Achsen sollen zusammenfallen. In Fernrohren mit schlecht zentrierten Linsen erscheint ein Stern nicht als leuchtender Punkt, sondern als Punkt, von dem nach einer (oder mehreren) Richtungen helle Strahlen ausgehen. Damit die Zentrierung nicht verdorben wird, sollen hauptsächlich die Objektivlinsen nicht aus ihren Fassungen herausgenommen werden; kleine Zentrierungsfehler der Okularlinsen sind wenig schädlich.

Bei einem mit genau abgedrehten Ringen, die in gabelförmigen Lagern liegen, versehenen Fernrohre, einem sog. Ringfernrohre, soll die Objektivachse mit der mechanischen Drehachse der Ringe zusammenfallen. Ist dies nicht der Fall, dann kreisen die Bilder beim Drehen des Fernrohrs um die Ringachse. Diese Zentrierung kann vom Mechaniker leicht auf Bruchteile des Zehntelmillimeters genau gemacht werden, so daß für die im folgenden beabsichtigten Zwecke der noch verbleibende Fehler unschädlich ist.

§ 12. Ziel- und Ablesefernrohr.

Das astronomische Fernrohr wird durch Anbringen eines Fadenkreuzes auf der Gesichtsfeldblende zu einem Ziel- oder Ablesefernrohr. Die Vergrößerung der an geodätischen Instrumenten befindlichen Ablesefernrohre ist häufig etwas größer als die der Zielfernrohre, damit auch auf entfernten Skalen noch abgelesen werden kann. Das Fadenkreuz wird meistens von zwei auf das Diaphragma mit Wachs, Metalllack u. dgl. aufgeklebten feinen Spinnfäden von etwa 8 μ Dicke gebildet, doch kommen statt dieser Spinnfäden auch feine Metallfäden sowie in ein auf dem Diaphragma befestigtes dünnes Glas- oder Glimmerplättchen eingeritzte feine Linien zur Anwendung. Statt zweier Fäden werden für besondere Zwecke drei und mehr Fäden aufgespannt, wie dies die Fig. 31 andeutet.

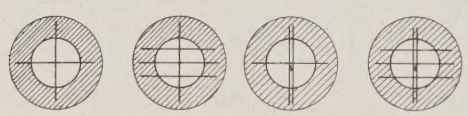


Fig. 31.

Ein Punkt P ist angezielt, wenn sein Bild genau mit dem Fadenkreuzschnittpunkt S zusammenfällt. Die Ziel- oder Absehlinie des Fernrohres geht demnach durch P und H_1 einerseits, durch H_2 und S anderseits hindurch, wenn H_1 und H_2 die Objektivhauptpunkte sind (Fig. 30, Seite 21). Häufig dürfen H_1 und H_2 als zusammenfallend angesehen werden (optischer Mittelpunkt).

Die Fadenkreuzfäden müssen auf den ersten Blick in das Fernrohr als scharfe schwarze Linien ohne verwaschene Ränder gesehen werden. Damit dieser Forderung mit Rücksicht auf die etwas verschiedene deutliche Sehweite der Augen entsprochen werden kann,

muß das Augenglas bzw. das Okularsystem gegen das feststehende Fadenkreuz etwas verschiebbar eingerichtet sein oder umgekehrt. In einigen Okularen sind für bestimmte Zwecke beide Verschiebungen möglich. Zur deutlichen Sichtbarmachung des Fadenkreuzes richtet man das Fernrohr auf einen hellen Hintergrund, z. B. den Himmel, weißes Papier, und verschiebt dann die Okularlinse oder das Fadenkreuz solange, bis es ohne Anstrengung des Auges scharf gesehen wird.

Bei vielen Zielfernrohren muß das Fadenkreuz seitwärts nach einer oder auch nach allen Richtungen verschoben werden können. Das Diaphragma wird deshalb durch Korrektionsschräubchen, wie z. B. s_1, s_2, und die seitlichen (in Fig. 32 nicht gezeichneten) Schräubchen s_3, s_4 gehalten. Durch Lüften von s_1 und Anziehen von s_2 wird beispielsweise das Fadenkreuz S nach oben geschoben.

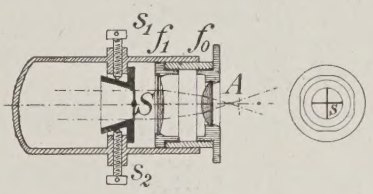


Fig. 32.

Wenn nun mit einem Zielfernrohr ein Punkt P angezielt werden soll, so wird dieser zunächst durch freihändiges Richten des Fernrohres in das Gesichtsfeld gebracht, dann wird der Okular- bzw. Objektivauszug solange verschoben, bis P deutlich sichtbar ist und hierauf kann durch feines Richten des Fernrohres mit Hilfe besonderer Feinstellschrauben P scharf angezielt werden. Da nun das Auge die Fähigkeit besitzt, Punkte in verschiedener Entfernung deutlich zu sehen, so kommt es häufig vor, daß das Bild von P nicht genau in der Fadenkreuzebene sondern etwas außerhalb liegt, und trotzdem werden P und das Fadenkreuz S deutlich gesehen. Diese sog. Parallaxe des Fadenkreuzes äußert sich in einer gegenseitigen Verschiebung zwischen S und dem Bilde von P bei einer Seitwärts- (oder Auf- und Abwärts-)bewegung des Auges. Sie wird durch Verschieben des ganzen Okular- bzw. Objektivauszuges beseitigt.

Bei einem Zielfernrohr soll sich bei der Verschiebung des Okular- bzw. Objektivauszuges die Richtung der Ziellinie nicht verändern; es muß deshalb der Auszug in der Zielrichtung sicher geführt werden. Würde z. B. durch die Führungsringe RR der Fig. 33 das Fadenkreuz bei Anzielung eines entfernten Punktes nach S_1, bei Anzielung eines nahen Punktes nach S_2 gebracht, so würde die Zielrichtung um den Winkel δ geändert. Derselbe Fehler entstände auch, wenn das Fadenkreuz z. B. durch Berühren des Okularauszuges eine sehr kleine seitliche Verschiebung w erlitte. Beträgt diese z. B. $\pm$ 0,1 mm, die Objektivbrennweite $F = 220$ mm, so würde die Zielrichtungsänderung einer Querverschiebung eines in 2000 m be-

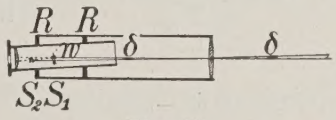


Fig. 33.

findlichen Punktes von $\pm \frac{0{,}1}{220} \cdot 2000 \approx \pm 0{,}9$ m entsprechen. Da demnach durch unbeabsichtigtes Ändern des Fadenkreuzes große Fehler verursacht werden, so sollen die Okular- bzw. Objektivauszüge beim Messen so wenig als möglich berührt werden.

An Ringfernrohren (siehe § 11) muß häufig das Fadenkreuz zentriert werden, damit die Ziellinie mit der mechanischen Drehachse der beiden Ringe zusammenfällt (bzw. bei vorhandener sehr kleiner exzentrischer Lage der Objektivhauptpunkte wenigstens parallel zur Drehachse wird). Zu diesem Zwecke zielt man einen Punkt P (Fig. 34) mit einem Faden scharf an, nach Drehen des Fernrohres um die Ringachse um 180° kommt der Faden von S_1 nach S_2, so daß die neue Zielung bei P vorbeigeht. Die Abweichung entspricht der doppelten Exzentrizität des benutzten Fadens; dieser muß demnach um die Hälfte mit den Korrektionsschräubchen verschoben werden. In derselben Weise ist der zweite Faden zu behandeln und die Verschiebung beider Fäden ist so lange zu verbessern, bis bei der Drehung des Fernrohres der Punkt P angezielt bleibt. Untersucht man die Zentrierung bei verschieden weit entfernten Zielpunkten, so erhält man eine Probe für die richtige Führung des Auszuges.

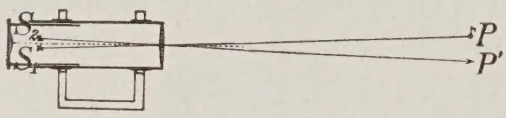


Fig. 34.

Zur Erzielung besserer Bilder verwendet man in der Regel zusammengesetzte Okulare. Die zwei wichtigsten sind der Ramsdensche und der Huygenssche Typus (positives und negatives Okular).

Beim Ramsdenschen Okular, das in Fig. 32 skizziert ist und das neuerdings am häufigsten vorkommt, wenden die beiden plankonvexen (oder nahezu plank.) Linsen einander die gewölbte Seite zu. Ihre Brennweiten verhalten sich angenähert wie $\frac{f_1}{f_0} = \frac{10}{7}$, der Abstand ist etwa $d = \frac{3}{5} f_0$, so daß die Brennweite der Äquivalentlinse $\varphi \approx \frac{7}{9} f_0$ wird. Die Bilder sind auch am Rande des Gesichtsfeldes noch gut eben. Noch bessere Bilder und weiter abliegende Augenorte werden bei Benutzung passender achromatischer Linsen in dem Okulare erzielt (orthoskopische und euryskopische Okulare).

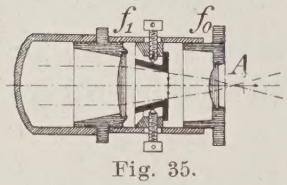


Fig. 35.

Im Huygensschen Okulare (Fig. 35) sind die ebenen Seiten der beiden plankonvexen Linsen dem Auge zugewendet, das Brennweitenverhältnis ist $\frac{f_0}{f_1} = \frac{1}{3}$ und der Abstand $d = 2f_0$. Das Fadenkreuz befindet sich nahezu in der Mitte zwischen den beiden Linsen. Ohne Einschalten des Kollektivs f_1 würde das vom Objektiv gelieferte Bild

ungefähr in der Mitte zwischen Fadenkreuz und Augenglaslinse f_0 liegen, so daß also das Fernrohr um $\frac{f_0}{2}$ kürzer wird als ohne Kollektiv. Nimmt man f_0 und f_1 zusammen, dann wird die Äquivalentbrennweite $\varphi \approx \frac{3}{2} f_0$. Am Rande des Gesichtsfeldes bemerkt man häufig deutliche Bildwölbung, die Bilder sind aber sehr hell.

Nach Versuchen von Prof. Stampfer ist die Schärfe des Zielens mit guten achromatischen Fernrohren unter günstigen äußeren Verhältnissen (gute Beleuchtung, ruhige Bilder) nahezu proportional der Vergrößerung, wenn die Helligkeit der Bilder nicht zu gering wird. Bezeichnet V die Vergrößerung, dann ist der mittlere Zielfehler nahezu $\pm \frac{22''}{V}$. Unter Verhältnissen, wie sie bei geodätischen Vermessungen vorkommen (ungünstige Beleuchtung, flimmernde Bilder), darf hierfür bis zum Doppelten genommen werden. Fernrohre mit schwachen Vergrößerungen sind als Zielfernrohre denen mit starker Vergrößerung vorzuziehen, weil in ihnen durch die Luftbewegung und durch kleine optische Mängel die Schärfe der Bilder nicht sehr geändert wird.

§ 13. Der Nonius.

Der Nonius dient zum Messen kleiner Größen auf Längen- oder Winkelteilungen. Er besteht aus einem kleinen Maßstabe, der so eingeteilt ist, daß n seiner gleichen Teile gleich $(n \mp 1)$ Teilen des Maßstabes sind, auf dem abgelesen werden soll, also:

$$n \cdot N = (n \mp 1) \cdot M. \tag{1}$$

n ist hierbei stets eine ganze Zahl; bei Annahme des oberen Vorzeichens ist ein Nonienteil N kürzer als ein Maßstabteil M, sog. nachtragender Nonius, im zweiten Falle ist das Umgekehrte der Fall, sog. vortragender Nonius. Ersterer wird viel häufiger angewendet.

Die Differenz in der Länge eines Maßstabteiles und eines Nonienteiles heißt die Nonienangabe A, also:

$$A = M - N. \tag{2}$$

k Nonienteile sind demnach von k Maßstabteilen um $k \cdot A$ verschieden und diese Zahl wird als Bezifferung des Nonius einigen seiner Hauptstriche beigeschrieben. Nimmt man einen nachtragenden Nonius, dann folgt aus Gl. (1) und (2)

$$A = \frac{1}{n} M. \tag{3}$$

Beispiel: Auf einer geeigneten Kreisteilung von $M = \frac{1}{3}^0$ soll ein nachtragender Nonius mit $A = 20''$ Angabe angebracht werden. Seine Länge muß nach (3) werden $n = \frac{M}{A} = \frac{20'}{20''} = 60$. Es sind demnach 59 Maßstabteile in 60 Teile auf dem Nonius zu teilen, so daß etwa die gezeichnete Teilung zustande käme (Figuren 36 u. 37). Der $k' = 15$te Strich ist mit $15 \cdot 20'' = 5'$ beziffert usw. Vor dem Nullstrich (0) und nach dem Endstrich (20′) des Nonius bringt man häufig einige weitere Striche an, die sog. Überteilung, um z. B. den Nullstrich schärfer auf einen Maßstabstrich einstellen zu können.

Mit dem Nonius wird stets der Abstand seines Null- oder Indexstriches vom vorhergehenden Maßstabstriche gemessen. Zu diesem Zwecke wird derjenige Noniusstrich, der die Verlängerung eines Maßstabstriches bildet (mit dem Maßstabstriche koinzidiert), aufgesucht und seine Bezifferung $k \cdot A$ abgelesen. Diese Zahl $k \cdot A$ ist dann

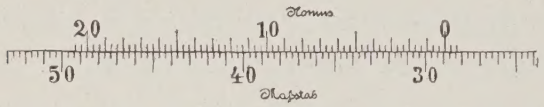


Fig. 36.

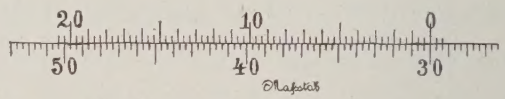


Fig. 37.

der Bezeichnung des erstgenannten Maßstabstriches hinzuzufügen. Man findet leicht, daß vom Koinzidenzpunkte bis zum Noniennullpunkte einerseits und bis zu dem diesem vorhergehenden Maßstabstriche anderseits gleich viele (k) Nonien- und Maßstabteile vorhanden sind, deren Differenz gleich dem zu messenden Abstande ist. Z. B. in der Fig. 37 würde abgelesen $28^0\,40' + 15'\,20'' = 28^0\,55'\,20''$.

Die Angabe des Nonius kann man nicht beliebig klein machen, weil sonst mehrere aufeinanderfolgende Striche gleichzeitig koinzidieren. Bei den feinsten Teilungen auf Metallkanten wählt man sie erfahrungsgemäß derart, daß sie einer Strecke von etwa $4 \div 10\ \mu$ Länge entspricht. Bei Verwendung etwa 7fach vergrößernder Ableselupen kann der mittlere Ablesefehler auf vorzüglich konstruierten Nonien, deren Ebene mit der Maßstabebene zusammenfällt, zu $\pm 3\ \mu$ angenommen werden; wählt man deshalb die Nonienangabe entsprechend etwa dem dreifachen mittleren Ablesefehler, dann kann beim Ablesen die Koinzidenzstelle zwischen den jeweiligen zwei Strichen noch geschätzt werden. Weil bei der Nonienablesung stets mehrere benachbarte Striche betrachtet werden, so werden einerseits kleine Teilungsfehler ausgeglichen, anderseits erfordert die Ablesung aber auch im Vergleiche mit Ablesemikroskopen verhältnismäßig viel Zeit. Der Hauptvorteil der Nonien besteht darin, daß sie keine Veränderungen erleiden.

§ 14. Ablesemikroskope.

Ablesemikroskope sind zusammengesetzte Mikroskope (Fig. 38), bei denen in der Ebene EE angeordnet ist entweder

1. ein als Ablesemarke oder Index dienender Strich (z. B. ein Spinnfaden) — Strichmikroskop — oder
2. ein fein geteilter Glasmaßstab (Skala) — Skalenmikroskop — oder
3. ein beweglicher (Doppel-)Faden, dessen Verschiebung mit einer Mikrometerschraube scharf gemessen werden kann — Schraubenmikroskop —.

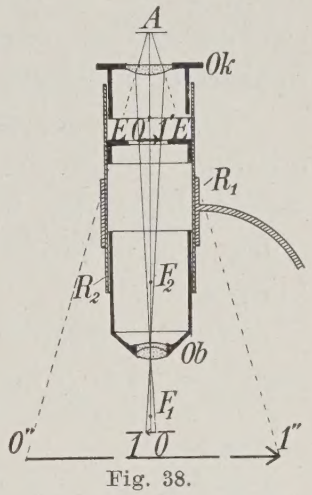


Fig. 38.

Das meist achromatische Objektiv Ob der Fig. 38 entwirft vom Gegenstand $\overline{0\,1}$ das reelle vergrößerte umgekehrte Bild $\overline{0'\,1'}$, das durch das Okular Ok vom Auge A betrachtet wird, so daß dieses den Gegenstand $\overline{0''\,1''}$ in der deutlichen Sehweite w erblickt. Durch passende Beleuchtungsvorrichtungen, z. B. Blenden vor dem Objektive, wird der Gegenstand $\overline{0\,1}$ beleuchtet (s. Fig. 55, 56).

Die reelle Objektivvergrößerung $v = \frac{\overline{0'\,1'}}{\overline{0\,1}}$ kann durch Verschieben des Objektivs in der Röhre R_2 etwas verändert werden; die Gesamtvergrößerung $V = \frac{\overline{0''\,1''}}{0\,1}$ ermittelt man in derselben Weise wie die einer Lupe. Das Gesichtsfeld ist durch die Blende EE begrenzt; spannt man über diese einen Faden und versieht die Maßstabteilstriche mit mikroskopisch kleinen Ziffern, dann erblickt man im Strichmikroskop z. B. nebenstehendes Bild (Fig. 39) einer Gradteilung. Die Ablesung würde sein

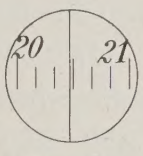


Fig. 39.

Fig. 40.

$$20^0\,28'.$$

Bringt man auf der Blende EE eine Glasskala an, deren Länge einem vergrößerten Maßstabintervall $\overline{0'\,1'}$ gleich ist, dann erhält man z. B. beim Betrachten einer Gradteilung das in Fig. 40 gezeichnete Bild. Die Ablesung ist

$$38^0\,20' + 8{,}6\,p$$

und da $1\,p = 2'$, so wird die Ablesung $38^0\,37{,}2'$.

Bei der Korrektion dieser zwei Mikroskope muß

1. durch Verschieben des Okulars Ok in der Röhre R_2 der Strich bzw. die Skala deutlich sichtbar gemacht werden;

2. durch Verschieben des ganzen Mikroskopes in der Fassung R_1 muß das Bild des Maßstabes in die Ebene EE gebracht werden (daß also auch keine Parallaxe vorhanden bleibt);

3. im Skalenmikroskop muß außerdem durch Verschieben des Objektives *Ob* in der Röhre R_2 und darauffolgendes Verschieben des ganzen Mikroskopes in der Fassung R_1 erreicht werden, daß ein vergrößerter Maßstabteil gleich der Skalenlänge wird.

Sollen zwei Mikroskope einen vorher bestimmten Abstand voneinander haben, z. B. 180° auf einem geteilten Kreise, so muß entweder eines der beiden Mikroskope, oder der Strich bzw. die Skala eines Mikroskopes in der Maßstabrichtung etwas verschoben werden können.

Der Doppelfaden F des Schraubenmikroskopes (Fig. 41) ist auf dem Schlitten S befestigt, der durch Drehen der mit geteilter Trommel verbundenen Mikrometerschraube M verschoben wird. Durch eine Gegenfeder G wird der Schlitten in den Kasten K hineingezogen. Zur Messung der Vielfachen der Schraubenumdrehungen ist der Rechen RR, dessen Zähne der Ganghöhe der Mikrometerschraube

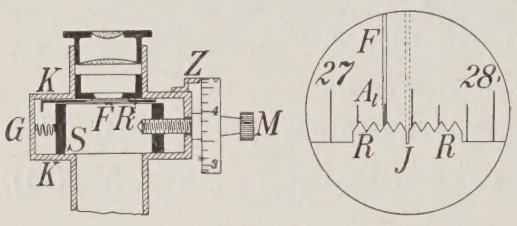


Fig. 41.

entsprechen, angeordnet, und ein hervorgehobener Punkt J dieses Rechens ist der Indexpunkt, dessen Lage auf der Teilung abgelesen werden soll. Wenn der Doppelfaden auf diesem Indexpunkte steht, soll auf der Schraubentrommel Null abgelesen werden; ist dies nicht der Fall, dann dreht man die nur durch Reibung auf der Schraubenspindel sitzende Trommel bei festgehaltener Schraube solange, bis dies zutrifft. Häufig läßt sich auch der Rechen R mit kleinen Schräubchen etwas seitwärts verschieben. Die Objektivvergrößerung wird so gestellt, daß ein vergrößerter Maßstabteil gleich einer bzw. mehreren Ganghöhen (Zähnen auf dem Rechen) der Mikrometerschraube ist.

Es sei z. B. der Maßstabteil $\frac{1}{6}^0 = 10'$ und diese mögen zwei Umdrehungen der Mikrometerschraube entsprechen (Fig. 41). Ist die Trommel in 60 Teile geteilt, dann beziffert man den 6. Teilstrich mit $1'$, den 12. Strich mit $2'$ usf. und kann sogleich Sekunden als Zehntel eines Trommelteils schätzen. Die Trommelbezifferung wächst bei dem Verschieben des Doppelfadens in der Richtung nach dem Maßstabstrich mit kleinerer Ordnungszahl. Bei der Ablesung stellt man den Doppelfaden auf den links liegenden Strich ein (A_l), liest auf dem Rechen $5'$ (eine Umdrehung der Meßschraube) und an der Trommel A_l ab und fügt diesen Wert der Strichbezeichnung hinzu, z. B. (Fig. 41)

$$27^0\,20' + 5' + 3'\,22'' = 27^0\,28'\,22''.$$

Bei guter Abstimmung des Mikroskopes muß auch nach der Einstellung des Doppelfadens auf den dem Indexpunkt folgenden Teilstrich dieselbe Trommelablesung A_r wie bei A_l gemacht werden. Die Ablesung wird verfeinert durch Mittelbildung nach $\frac{A_l + A_r}{2}$. Die größte Genauigkeit der Ablesung wird erreicht durch Verbesserung des Mittelwertes $\frac{A_l + A_r}{2}$ wegen etwaiger Abweichung $(A_l - A_r)$.

Bei der Abstimmung des Schraubenmikroskopes sind dieselben drei Korrektionen wie bei dem Skalenmikroskop auszuführen; zur möglichsten Vermeidung sog. Exzentritätsfehlereinflüsse (s. § 21) muß sie auf Kreisteilungen an diametralen Stellen des Teilkreises vorgenommen werden.

Mit einem etwa 40fach vergrößernden Schraubenmikroskop wird der mittlere Ablesefehler erfahrungsgemäß etwa $\pm 1{,}4\,\mu$; die Genauigkeit der Skalenmikroskope steht zwischen derjenigen der Nonien und der Schraubenmikroskope.

§ 15. Der Transversalmaßstab. Der Meßkeil.

Der Transversalmaßstab dient in der Regel in Verbindung mit dem Zirkel zum Auftragen gegebener Strecken auf in verjüngtem Maßstabe gezeichnete Pläne und zum Abmessen von Längen auf solchen Plänen. Die Bezifferung des Maßstabes wird deshalb derart gewählt, daß sogleich die $1/M$fache Strecke abgelesen wird, wenn $M = 1 : V$ das Verjüngungsverhältnis des Planes bedeutet. Z. B. im Maßstabe $M = 1 : 500$ der natürlichen Größe muß die Strecke 40 m auf dem Transversalmaßstabe als $\frac{40}{500}$ m = 80 mm aufgetragen und mit 40 bezeichnet werden; die weitere Einrichtung des Maßstabes und sein Gebrauch ist aus der Fig. 42a ersichtlich.

Der aus Stahl oder Glas angefertigte Meßkeil dient zum Messen der kleinen Abstände einander gegenüberliegender gekreuzter Endschneiden, wie dies die Fig. 42b andeutet. Durch Ablesen der Teilung auf dem Meßkeil, d. i. 23,1, ist der Abstand der beiden Schneiden bekannt, wenn die Beziehung zwischen der Keilablesung a und der Keildicke d an der betreffenden Stelle (Keilgleichung) bekannt ist. Heißt z. B. die Keilgleichung $d = 3{,}00 + 0{,}1002 \cdot a$, dann entspricht der obigen Ablesung die Keildicke $d' = 5{,}31$ mm. Mit guten Meßkeilen kann man leicht die gesuchten Abstände auf 0,01 mm genau finden. Die Keilgleichung wird bestimmt durch Messen der Keildicke an mehreren Stellen der Keilteilung z. B. mit guten Schraubenmikrometern (S. 153 § 69).

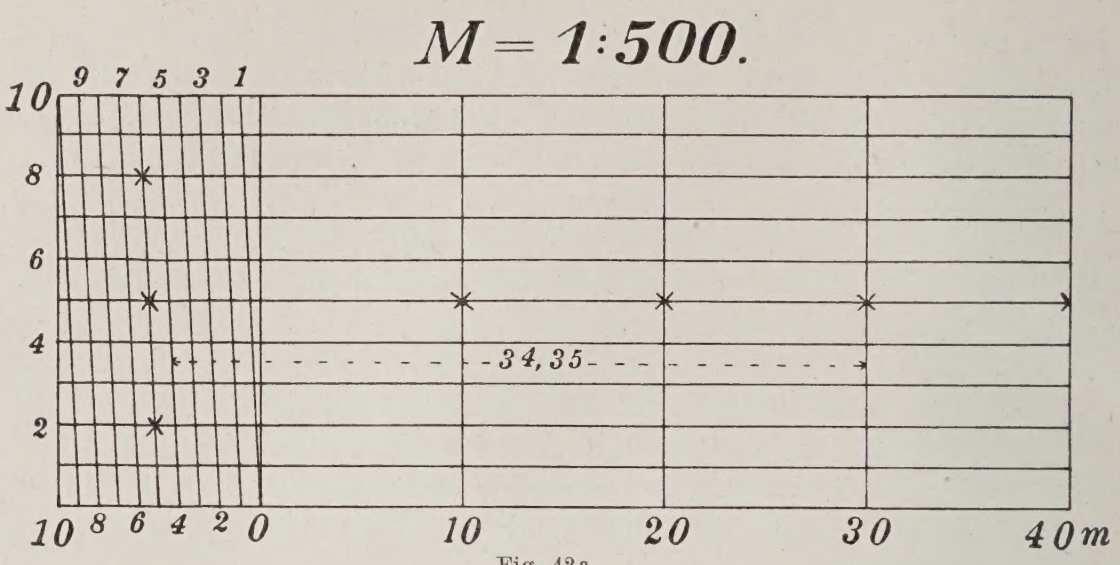


Fig. 42a.

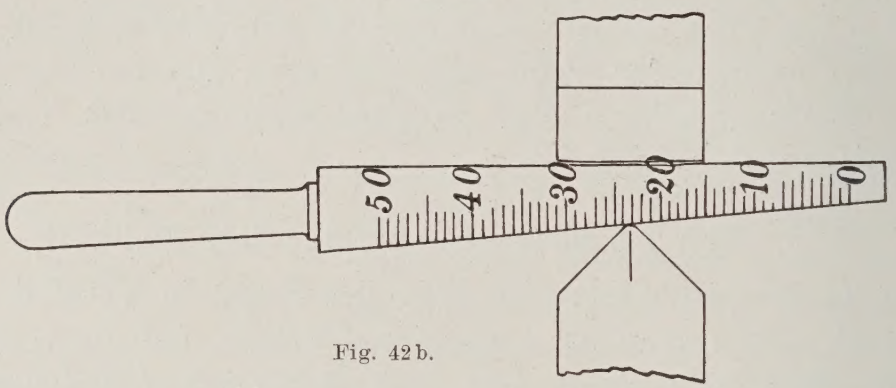


Fig. 42b.

§ 16. Senkel und Libellen.

Senkel und Libellen dienen zur Herstellung lot- und wagerechter Linien. Die Senkel sind meistens Drehkörper von etwa $\frac{1}{4}$ kg Gewicht, in deren Drehachse die Senkelschnur befestigt ist. Diese Senkelschnur kann mit einer eingebundenen Schleife oder einem sog. Senkelplättchen oder einer kleinen Klammer (Kravattenhalter) nach Bedarf verlängert oder verkürzt werden.

Die Libellen sind geschlossene Gefäße, die zum größten Teil mit einer leicht beweglichen Flüssigkeit (Alkohol, Schwefeläther) gefüllt sind. Die Dämpfe dieser Flüssigkeit bilden eine Blase, die sich stets an den höchsten Punkt im Innern des Gefäßes einstellt. Nach der Form des Gefäßes unterscheidet man Röhren- und Dosenlibellen.

Die Röhrenlibelle besteht aus einem im Innern an einer Stelle faßförmig nach einem Kreisbogen ausgeschliffenem Glasrohre, das meist durch Zuschmelzen geschlossen wird. Auf der Oberfläche des Rohres befindet sich eine gleichmäßige Teilung von $2 \div 2{,}5$ mm Strichabstand (oder es kann darauf eine solche verschoben werden), durch die ein nahezu

in der Röhrenmitte liegender Punkt, der Spielpunkt, hervorgehoben wird. Befindet sich die Blasenmitte am Spielpunkt, dann spielt die Libelle ein. Libellen mit zwei Ausschleifungen (oben und unten) und demnach zwei Teilungen heißen Doppelschlifflibellen. Die im Spielpunkt an die Schliffkurve in der Richtung der kleinsten Krümmung (also nahezu in der Röhrenachse) gelegte Tangente heißt Libellenachse; sie liegt bei einspielender Libelle horizontal. Die beiden Achsen der Doppelschlifflibelle sollen parallel sein (siehe § 20). Libellen aus schlechtem Glase setzen häufig in der Schliffkurve kleine rundliche Körnchen ab, die die Beweglichkeit der Blase hemmen; für einige Zeit werden solche Libellen durch Reinigen und Neufüllen wieder brauchbar.

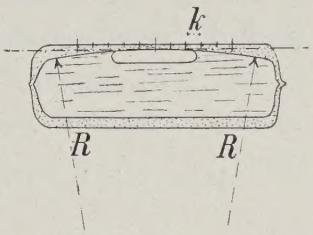


Fig. 43.

Bei den Dosenlibellen wird eine kugelförmig ausgeschliffene Glasplatte oder ein zugeschmolzenes zylindrisches Glasgefäß, dessen obere innere Begrenzung kugelförmig ausgeschliffen ist, in ein Metallgefäß eingesetzt. Im Boden befindet sich bei der ersteren Anordnung die Füllschraube und meist auf der Glasoberfläche sind einige konzentrische Kreise, deren Mittelpunkt den Spielpunkt vorstellt, oder vier ein Quadrat bildende gerade Striche eingerissen. Bei einspielender Libelle, d. h. wenn die Blasenmitte am Spielpunkt ist, liegt demnach die im Spielpunkt an der Schliffläche gelegte Tangentialebene horizontal.

Denjenigen Winkel, um den die Libelle geneigt werden muß, damit die Blasenmitte sich um einen Teil verschiebt, bezeichnet man als Teilwert t. Ist k die Länge eines Libellenteils, R der Halbmesser der Schliffkurve (Fig. 43), so ist demnach

$$t'' = \frac{k}{R} \cdot \varrho''. \tag{1}$$

Zur Bestimmung des Teilwertes und zur Untersuchung der Schliffkurve benützt man den Libellenprüfer (Fig. 44). Durch Drehen der Mikrometerschraube M wird die in den Gabeln liegende Libelle um die Drehachse AA geneigt und diese Neigungswinkel können mit Hilfe der Mikrometerschraube sehr genau gemessen werden. Drückt man mehrere Gänge der Mikrometerschraube, sowie die drei Aufsatzpunkte des Libellenprüfers auf Papier ab und mißt die entsprechenden Längen, dann findet man die Ganghöhe g und die Größe E, so daß sich (genügend scharf) der einer Schraubenumdrehung entsprechende Neigungswinkel ergibt zu

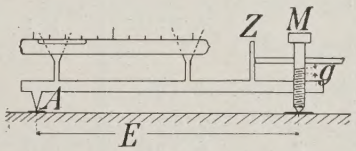


Fig. 44.

$$s'' = \frac{g}{E} \cdot \varrho''. \tag{2}$$

Wird die Trommel z. B. in 100 Teile geteilt und werden bei Z noch Zehntel dieser geschätzt, so können noch $0{,}001 \cdot s''$ abgelesen werden.

Dreht man die Meßschraube n mal und beobachtet den zugehörigen Blasenweg l, dann ist der Teilwert

$$t'' = \frac{n \cdot s''}{l} \tag{3}$$

und der Radius der Schliffkurve

$$R = \frac{\varrho''}{t''} \cdot k. \tag{4}$$

Beispiel: Man hat gemessen

$$\left.\begin{array}{l} 70 \text{ Gänge} = 35{,}25 \text{ mm}, \\ 90 \quad \text{„} \quad = 45{,}30 \quad \text{„} \end{array}\right\} \text{ folglich } \left\{\begin{array}{l} g_1 = 0{,}50357 \text{ mm}, \\ g_2 = 0{,}50333 \quad \text{„} \end{array}\right.$$

$$E = 359{,}7 \text{ mm}.$$

Nimmt man die Bestimmungen von g_1 und g_2 als gleich gut, so ist nach § 5:

$$g = 0{,}50345 \pm 0{,}00012 \text{ mm}$$

und damit wird

$$s'' = 288{,}69'' \pm 0{,}07''.$$

Der Nullpunkt der Libellenteilung wurde in der Nähe des linken Endes der Libelle angenommen. Die Schraube wurde stets um $n = 0{,}05$ Umdrehungen (5 Teile) gedreht.

Nr.	Schrauben-trommel-ablesung	Libellenblase linkes Ende l	Libellenblase rechtes Ende r	Verschiebung l	Verschiebung r	Blasen-länge	Teil-wert	v	vv
1	0,600	1,9	23,4			21,5	"	"	
				1,2	1,6		10,3	+ 0,5	0,25
2	0,650	3,1	25,0			21,9			
				1,4	1,1		11,5	− 0,7	0,49
3	0,700	4,5	26,1			21,6			
				1,4	1,1		11,5	− 0,7	0,49
4	0,750	5,9	27,2			21,3			
				1,3	1,6		9,9	+ 0,9	0,81
5	0,800	7,2	28,8			21,6			
	0,200	5,3	5,4	5,3	5,4		10,8	0,0	2,04

Bei der Beobachtungstemperatur 18° C ergibt sich demnach im Mittel

$$t = 10{,}8'' \pm \sqrt{\frac{2{,}04}{4 \cdot 3}} = 10{,}8'' \pm 0{,}4''.$$

Die Länge eines Libellenteils wurde zu $k = 2{,}00$ mm abgemessen, demnach ist der Schleifradius

$$R = 2{,}00 \cdot \frac{206\,265''}{10{,}8''} \approx 38100 \text{ mm}.$$

Um den Libellenteilwert ohne Verwendung des Libellenprüfers zu bestimmen, bringt man die Libelle mit einem Zielfernrohr derart in Verbindung, daß beide um eine horizontale Achse etwas gedreht werden können. Auf einem lotrecht stehenden Maßstab, der um E von der horizontalen Drehachse entfernt ist, sollen bei den Blasenständen l_1 und r_1, bzw. l_2 und r_2 abgelesen werden a_1 bzw. a_2. Dann ist der Libellenteilwert

$$t'' = \frac{a_2 - a_1}{E} \cdot \frac{\varrho''}{\frac{l_2 + r_2}{2} - \frac{l_1 + r_1}{2}} = \frac{a_2 - a_1}{E} \cdot \varrho'' \frac{1}{\frac{1}{2}(l_2 - l_1 + r_2 - r_1)}.$$

Beispiel: Der Nullpunkt wurde in der Mitte der Libellenteilung angenommen und von da wurde nach links −, nach rechts + gezählt. $E = 52{,}7$ m.

Nr.	Libelle linkes Ende	Libelle rechtes Ende	Blasenlänge	Ablesung a
1	− 17,0	− 1,0	16,0	1,270 m
2	− 0,3	+ 17,7	16,0	1,300 m
Differenz	16,7	16,7		0,030 m

$$t'' = \frac{0{,}030 \cdot 206\,265}{52{,}7 \cdot 16{,}7} = 7{,}0''.$$

Die Krümmungsradien der Dosenlibellen sind meist $1 \div 2$ m und demnach beträgt auch deren auf etwa $k = 2$ mm bezogene Teilwert mehrere Minuten, während die Teilwerte der Röhrenlibellen meist zwischen 4″ und 60″ liegen.

Bei der Verwendung der Libellen zeigt sich, daß sehr kurze Libellenblasen sich langsam einstellen und deshalb macht man gern die Blasenlänge etwa halb so groß als die Röhrenlänge. Stellt man die Libellenblase auf bestimmte Striche ein oder schätzt man den Stand der Blasenenden gegen die benachbarten Striche, so werden stets kleine Fehler (Einstell- oder Ablesefehler) gemacht. Bei Libellen von $2'' \div 52''$ Teilwert mit den gebräuchlichen Röhrenweiten und nicht zu kurzen Blasen bewegt sich nach Reinhertz der Einstellfehler zwischen $\pm 0{,}2''$ und 0,8″, der Ablesefehler beträgt angenähert das Doppelte. Mit der Temperatur ändert sich die Blasenlänge und damit meist auch der Teilwert; um die Blasenlänge nahezu konstant zu halten, bringt man in den sog. Kammerlibellen eine Kammer an, in die nach Bedarf in der

Kälte durch Neigen der Libelle etwas Ätherdampf übergeführt werden kann. Beim Gebrauch müssen feinere Libellen vor einseitiger Erwärmung durch passende Umhüllung und durch Schirme sorgfältig geschützt werden. Am gebräuchlichsten sind Röhrenlibellen von $10'' \div 20''$ Teilwert (im Mittel $15''$).

Die weitere Fassung und die Form der Libellenfüße richtet sich nach dem Zwecke; sie muß so sein, daß bei Temperaturänderungen keine schädlichen Spannungen entstehen und daß die Teilung gut abgelesen werden kann.

Die Setzlibelle dient hauptsächlich zur Horizontallegung ebener Unterlagen, die Reitlibelle und Hängelibelle zur Horizontallegung von Drehachsen und die Dosenlibelle wird meist zur raschen angenäherten Horizontallegung von Ebenen oder zur raschen genäherten Lotrechtrichtung von Stäben, Drehachsen u. dgl. verwendet. Vielfache Versuche haben gezeigt, daß mit einer guten Dosenlibelle von etwa $4'$ Teilwert auf 2 mm durch scharfes Einspielenlassen der Blase zwischen vier nahezu ein Quadrat bildende Striche (ohne Lupe) die Lotrichtung mit etwa $\pm \frac{1}{3}'$ mittlerem Fehler erhalten wird.

§ 17. Berichtigen der Setzlibelle; Messung des Neigungswinkels einer Unterlage mit unberichtigter Libelle.

Die Einrichtung der Setzlibelle ist aus der Fig. 45 ersichtlich; das Justierschräubchen Z in Verbindung mit der Gegenfeder G dient zur Parallelstellung der Libellenachse zur Aufsatzebene AA.

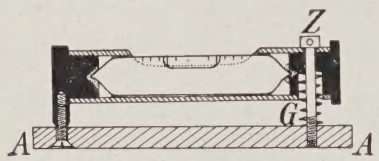


Fig. 45.

Setzt man die Libelle auf eine Unterlage und neigt diese bis die Blase einspielt, dann liegt die Libellenachse horizontal, die Unterlage wird aber etwas geneigt sein. Setzt man hierauf die Libelle auf der Unterlage um, dann findet man leicht, daß der sich zeigende Ausschlag dem doppelten Winkel zwischen der Libellenachse und der Aufsatzebene AA entspricht, und es muß demnach die Hälfte des Ausschlages an dem Schräubchen Z, die andere Hälfte durch Neigen der Unterlage beseitigt werden, um die Libellenachse parallel zur Auflagefläche und diese horizontal zu legen.

Der Neigungswinkel i der Unterlage kann auch mit einer unberichtigten Setzlibelle gemessen werden; er werde positiv gezählt, wenn der vom Beobachter rechts liegende Teil höher als der linke ist; dementsprechend wird dann vom willkürlich, z. B. an einem Ende der Teilung, angenommenen Nullpunkte der Libellenteilung aus nach rechts positiv, nach links negativ gezählt. Ist der Spielpunkt in der einen

Libellenlage bei $+ S$, so liegt er folglich nach dem Umsetzen der Libelle bei $- S$. Bezeichnen l und r die Ablesungen an den Libellenblasenenden und t den Teilwert, so ist nach Angabe der Fig. 46 in der ersten Lage

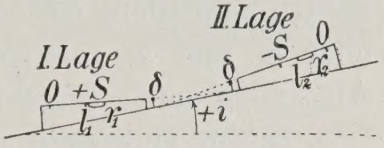


Fig. 46.

$$+ i - \delta = \left(\frac{l_1 + r_1}{2} - S\right) \cdot t,$$

nach dem Umsetzen in der zweiten Lage

$$+ i + \delta = \left(\frac{l_2 + r_2}{2} - S'\right) \cdot t.$$

Da nach dem oben Gesagten $S' = - S$, so wird durch Addieren der beiden Gleichungen:

$$+ 2i = \left(\frac{l_1 + r_1}{2} + \frac{l_2 + r_2}{2}\right) \cdot t$$

oder

$$i'' = \frac{t''}{4}(l_1 + r_2 + l_2 + r_1).$$

Wo Nullpunkt und Spielpunkt angenommen werden, ist demnach gleichgültig. Z. B. Null am Ende angenommen, $t = 4{,}0''$

$$l_1 = + 21{,}0 \qquad r_1 = + 72{,}7$$
$$l_2 = - 65{,}8 \qquad r_2 = - 14{,}0$$

$$i'' = \frac{4{,}0}{4}(+ 7{,}0 + 6{,}9) = + 13{,}9''$$

(rechtes Ende höher).

§ 18. Berichtigen der Reit- und Hängelibelle. Parallelstellen der Libellenachse zur Ziellinie an Ringfernrohren. Messen der Ringungleichheit an Ringfernrohren und Achsen.

Damit eine Libelle auf runde Unterlagen aufgesetzt oder an solche angehängt werden kann, sind ihre Füße in der Regel nach einem rechten Winkel (α) ausgeschnitten. Die Libellenachse wird im allgemeinen die Achse der Unterlage kreuzen und deshalb müssen Korrektionsschräubchen vorhanden sein, um die Libellenachse in horizontaler und in vertikaler Richtung drehen zu können, wie z. B. in der Fig. 47 angedeutet ist. Der Kreuzungsfehler der Libellenachse verursacht, daß beim Drehen der in der Mittellage nahezu einspielenden Libelle nach den beiden Seiten der Unterlage die beiden Libellenenden abwechselnd in verschiedene Höhe kommen, weshalb hierbei die Blase nach verschiedenen Seiten ausschlägt. Zur Beseitigung des

Kreuzungsfehlers ist deshalb das eine Libellenende mit den Schräubchen s_1 und s_2 solange zu verschieben, bis sich beim Drehen kein Ausschlag nach verschiedenen Seiten mehr zeigt.

Durch Umsetzen der Libelle auf der Unterlage erfolgt dann in der gleichen Weise wie bei der Setzlibelle (§ 17) die Parallelstellung der Libellenachse zur Aufsatzebene $A_1 A_2 A_3 A_4$, wenn die beiden Ringe r und R gleich dick und die beiden Füße nach gleichen Winkeln ausgeschnitten sind. Sind demnach die beiden Ringe eines Ringfernrohres mit zentriertem Fadenkreuze gleich dick, dann ist nach dieser Berichtigung auch die Libellenachse parallel zur Ziellinie.

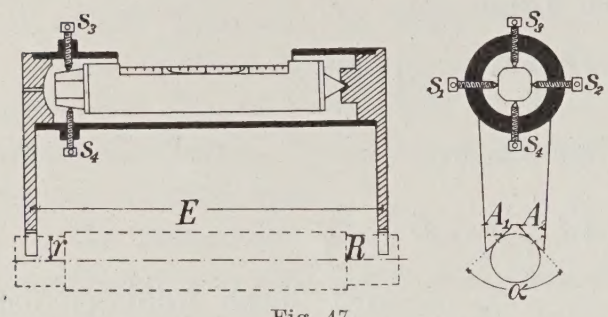


Fig. 47.

Wenn aber die beiden Ringe eines Ringfernrohres oder die Zapfen einer horizontalen Drehachse, auf denen die nach gleichem Winkel α ausgeschnittenen Libellenfüße stehen, und die in den ebenfalls nach dem Winkel α ausgeschnittenen Gabellagern liegen, ungleiche Dicke besitzen, dann bildet die Achse der nach dem Umsetzen ebenfalls wieder einspielenden Libelle mit der Achse der beiden Ringe den Winkel δ, der sich mit den Bezeichnungen der Fig. 47 in leicht ersichtlicher Weise durch $\operatorname{tg} \delta = \dfrac{R - r}{E \sin \dfrac{\alpha}{2}}$ ergibt. Legt man nach Einspielenlassen der Libelle das Ringfernrohr mitsamt der Libelle in den Lagern vorsichtig um, dann entspricht der sich zeigende Libellenausschlag nach § 17 dem Winkel 4δ, so daß dadurch die etwaige Ringungleichheit leicht gefunden werden kann. Mißt man deshalb mit einer Reit- oder Hängelibelle nach § 17 die Neigung i einer Achse, so ist i um δ zu $\left\{\begin{matrix}\text{verkleinern}\\ \text{vergrößern}\end{matrix}\right\}$ je nachdem der dickere Zapfen $\left\{\begin{matrix}\text{rechts}\\ \text{links}\end{matrix}\right\}$ liegt.

§ 19. Lotrechtstellung von Umdrehachsen mit Libellen.

An den meisten Meßinstrumenten trägt ein dreifüßiger Unterbau entweder eine Büchse, in der die Drehachse mit dem Aufbau läuft, oder die Drehachse, um die sich dann der Aufbau vermittelst einer Büchse dreht. Die Libelle L (Fig. 48) möge auf irgend eine Weise mit dem Aufbau derart verbunden sein, daß ihr eines Ende etwas gehoben oder gesenkt werden kann, um ihre Achse senkrecht zur Drehachse VV richten zu können. Ist im besonderen eine Libelle auf einem Ziel-

fernrohre angebracht und soll durch die Senkrechtstellung der Libellenachse zur Umdrehachse keine Veränderung an der Verbindung Ziellinie—Libellenachse eintreten, dann müssen die zur Senkrechtstellung der Libellenachse (und ev. Ziellinie) zur Umdrehachse dienenden Schrauben das Fernrohr mitsamt der Libelle in der Vertikalebene drehen. Die Umdrehachse steht stets lotrecht, wenn zwei durch sie gehende Ebenen Lotebenen sind; aus Zweckmäßigkeitsgründen nimmt man als erste Hauptebene meist die Parallelebene durch zwei Fußschrauben, z. B. s_1, s_2, und als zweite Hauptebene die hierzu senkrecht stehende Ebene.

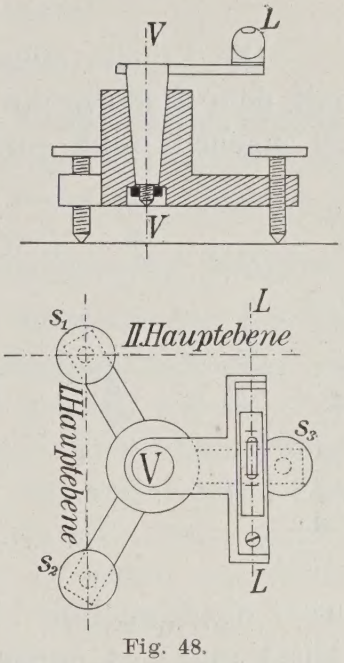


Fig. 48.

Ist die Libelle berichtigt, d. h. ist der Winkel zwischen der Umdrehachse und der Libellenachse 90°, dann bringt man die Libelle behufs Lotrechtstellung der Umdrehachse zuerst in der Richtung der ersten Hauptebene durch Drehen an den zwei Fußschrauben s_1 und s_2 zum Einspielen, hierauf bringt man die Libelle in die Richtung der zweiten Hauptebene und läßt sie durch Drehen an der dritten Fußschraube s_3 nochmals einspielen. Wenn die Libelle nur näherungsweise berichtigt ist oder wenn die Libellenachse nicht scharf in der Parallelebene zur ersten Hauptebene lag, dann steht nach dem geschilderten Vorgange die Umdrehachse nur genähert lotrecht.

Zur Berichtigung der Libelle läßt man sie z. B. in einer Hauptebene einspielen und dreht sie hierauf um die Drehachse um 180°. Der hiernach sich zeigende Ausschlag entspricht nach Fig. 49 dem doppelten Fehlerwinkel, also 2δ (Außenwinkel in einem Dreieck), und muß zur einen Hälfte durch Drehen an den Fußschrauben, zur anderen Hälfte an den Korrektionsschräubchen der Libelle beseitigt werden. Diese Versuche werden zweckmäßig abwechselnd in den beiden Hauptebenen vorgenommen, so daß schließlich die Libelle in jeder Richtung einspielt. Die Berichtigung zweier auf dem drehbaren Aufbau derart angeordneter Libellen, daß ihre Achsen einen rechten Winkel bilden (Kreuzlibellen) oder einer Dosenlibelle erfolgt in sinngemäßer Weise.

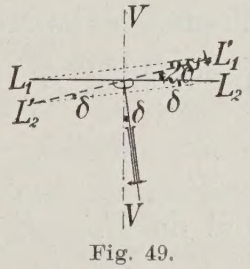


Fig. 49.

§ 20. Parallelstellung von Ziellinien und Libellenachsen. Nivellieren aus der Mitte. Prüfung und Gebrauch der Doppelschlifflibelle.

Die Libelle möge in fester oder als fest behandelter Verbindung mit dem Zielfernrohre stehen. Um Ziellinie und Libellenachse parallel zu machen, muß entweder die Libellenachse mit Korrektionsschräubchen gegen die horizontal gelegte Ziellinie, oder auch die Ziellinie z. B. mit den Fadenkreuzschräubchen gegen die horizontal gelegte Libellenachse gedreht werden können. Den Fehler in der Parallelstellung kann man immer mit Hilfe eines lotrecht stehenden Maßstabes finden, z. B. einer etwa 4 m langen, in Zentimeter geteilten und von unten nach oben wachsend bezifferten Latte, durch sog. Nivellieren aus der Mitte und aus einem Ende. Zu diesem Zwecke wird (Fig. 50) das Instrument in J_1, die Latte in dem $E_1 \approx 40$ m davon entfernten Punkte A aufgestellt. Bei einspielender Libelle wird dann die Ziellinie um einen kleinen Fehlerwinkel δ geneigt sein und die entsprechende Lattenablesung l_1 müßte demnach um $v_1 = \frac{\delta''}{\varrho''} \cdot E_1$ verbessert werden, um die der horizontalen Zielung entsprechende Ablesung L_1 zu erhalten. Bringt man die Latte nach dem um $E_2 = E_1$ von J_1 entfernten Punkte B und liest auf ihr bei einspielender Libelle l_2 ab, dann ergibt sich in derselben Weise wie vorher die der horizontalen Zielung entsprechende Ablesung zu $L_2 = l_2 + \frac{\delta}{\varrho} \cdot E_2$. Der Höhenunterschied L zwischen A und B folgt nach der Fig. 50 zu

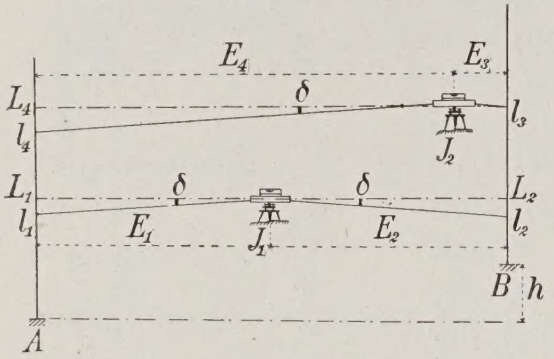


Fig. 50.

$$h = L_1 - L_2 = l_1 - l_2 + \frac{\delta}{\varrho}(E_1 - E_2)$$

und da $E_1 = E_2$, so wird

$$h = l_1 - l_2.$$

Diese Messungsart zur Bestimmung des richtigen Höhenunterschiedes zweier Punkte mit unberichtigter Libelle heißt Nivellieren aus der Mitte.

Stellt man hierauf das Instrument möglichst nahe (E_3 = wenige Meter) bei einem der beiden Punkte A oder B z. B. in J_2 auf und liest bei einspielender Libelle auf der nahen Latte l_3 ab, dann darf

diese Ablesung als sehr genähert der horizontalen Zielung entsprechend angenommen werden. Bringt man die Latte wieder nach A, dann soll deshalb die horizontale Zielung (sehr genähert) nach

$$L_4 = l_3 + h = l_3 + l_1 - l_2$$

zeigen. Die auf der in A stehenden Latte bei einspielender Libelle gemachte Ablesung l_4 wird aber meist von L_4 etwas abweichen und die Differenz $L_4 - l_4$ entspricht dem Fehlerwinkel δ auf die Entfernung $E_4 - E_3$; also $\delta'' = \frac{L_4 - l_4}{E_4 - E_3} \cdot \varrho''$. Um schließlich Ziellinie und Libellenachse parallel zu legen, muß also entweder bei einspielender Libelle das Fadenkreuz verschoben werden, bis L_4 abgelesen wird, oder es muß zunächst das Fernrohr mitsamt der Libelle geneigt werden, bis L_4 abgelesen wird, und dann ist der entstehende Libellenausschlag noch an den Korrekturschräubchen der Libelle zu beseitigen. Die erste Art der Berichtigung ist auszuführen, wenn an der Libelle nichts mehr geändert werden darf, weil ihre Achse z. B. schon senkrecht zu einer lotrechten Umdrehachse gestellt wurde. Bei größeren Abweichungen zwischen L_4 und l_4 ist die Berichtigung zu wiederholen.

Es sei mit einem Ringfernrohre (Fig. 160, S. 231) oder einem durchschlagbaren Fernrohre (Fig. 53, S. 47) eine Doppelschlifflibelle verbunden. Die Doppelschlifflibelle muß dann einmal daraufhin geprüft werden, ob überhaupt ihre beiden Achsen parallel sind. Um dies zu untersuchen, stellt man nach dem vorhin beschriebenen Verfahren die eine Libellenachse parallel zur Ziellinie und ermittelt hierauf in der obigen Weise den Winkel δ zwischen der Ziellinie (erste Libellenachse) und der zweiten Libellenachse. Sind die beiden Libellenachsen hinreichend genau parallel zu einander, dann kann bei künftigen Berichtigungen die Parallelstellung der Ziellinie zu den Libellenachsen durch Lattenablesungen von einem Instrumentenstandorte aus bewirkt werden. Zu diesem Zwecke liest man bei einspielender „Libelle oben (oder links)“ auf einer lotrechten Latte a_1 und bei einspielender „Libelle unten (oder rechts)“ a_2 ab. Der horizontalen Zielung entspricht die Lattenablesung $m = \frac{a_1 + a_2}{2}$ und es ist demnach entweder die Ziellinie durch Verschieben des Fadenkreuzes (bei einspielender Libelle) auf m einzustellen oder nach Anzielen von m ist die Libelle mit Hilfe der Korrekturschräubchen zum Einspielen zu bringen, um Libellenachse und Ziellinie parallel zu legen. Zuweilen ist behufs Untersuchung der Parallelität der beiden Libellenachsen die Doppelschlifflibelle derart gefaßt, daß sich ihre Enden in der Fassung leicht vertauschen lassen. Man liest dann bei „Libelle oben“ auf der Latte a_1, bei „Libelle unten“

a_2 je bei einspielender Libelle ab. Vertauscht man dann die Libellenenden in der Fassung, dann werden in derselben Weise die Lattenablesungen a_1' und a_2' erhalten. Durch sehr einfache Überlegungen findet man, daß die Differenz $\frac{a_1 + a_2}{2} - \frac{a_1' + a_2'}{2}$ dem Winkel der beiden Libellenachsen entspricht.

§ 21. Geteilte Kreise und Achsen.

Die Teilungen werden durch Striche gebildet, die in der Regel in Metallflächen eingerissen sind; stärkere Striche werden auf versilberten Messingflächen (Neusilber, Argentan, Magnalium usf.), feinere Striche auf Silberstreifen gezogen. Um im letzten Falle bei verschiedenen Temperaturen Verzerrungen zu vermeiden, muß das den Streifen umgebende Metall möglichst gleiche thermische Eigenschaften wie jener besitzen. Auch bei feinen Drehachsen, die in geschlossenen Büchsen laufen, wird häufig auf das Gesagte Rücksicht genommen und außerdem wird an schweren Instrumenten durch passend angebrachte Gegenfedern einer zu großen Belastung der Zapfen entgegengewirkt, um bei der Drehung einen sanften Gang zu ermöglichen. Die Durchmesser der geteilten Kreise an geodätischen Instrumenten liegen im allgemeinen zwischen 8 cm und 30 cm; am häufigsten kommt etwa 12 ÷ 13 cm vor.

Die Teilungen werden auf Kreisteilmaschinen hergestellt. Diese bestehen aus einem im Vergleich mit dem zu teilenden Kreise im allgemeinen größeren Kreise, der um eine durch seinen Mittelpunkt gehende Achse drehbar ist und der entweder eine feine Teilung trägt oder mit einem in sich zurückkehrenden Schraubengange versehen ist, in den eine Schneckenschraube mit Meßtrommel eingreift. Der zu teilende Kreis wird zentrisch auf den großen Kreis gespannt (zentriert) und macht dann dessen Drehungen mit. Diese Zentrierung kann mit Fühlhebeln u. dgl. leicht auf Bruchteile eines Hundertel Millimeter genau gemacht werden. Mittels eines sog. Reißerwerks können stets an derselben Stelle verschieden lange radiale Striche gezogen werden und sog. Feststell-(Klemm-) und Feinstell-(Mikrometer-)Werke ermöglichen das Einstellen der einzelnen Striche der vorhandenen Kreisteilung auf den Indexpunkt einer Ablesevorrichtung, z. B. von Schraubenmikroskopen. Werden deshalb der Reihe nach die gewünschten Teilstriche des großen Kreises eingestellt und werden dann jedesmal mit dem Reißerwerk auf dem zu teilenden Kreise die Striche gezogen, dann wird die erste Teilung kopiert. Da die großen Kreise sehr genau geteilt sind, so dürfen die aus guten Werkstätten hervorgegangenen

geteilten Kreise für die gewöhnlichen Zwecke als genügend richtig angesehen werden.

Die Meßkreise an den Instrumenten bleiben während der Messung entweder fest stehen und die Indexpunkte, Zeiger oder Alhidaden, deren Stellung auf der Teilung abgelesen wird, bewegen sich, oder die Teilkreise sind drehbar und die Alhidade bleibt fest. In beiden Fällen spielen die sog. Exzentrizitätsfehler eine wichtige Rolle, die darin ihre Ursache haben, daß die Drehachse nicht durch den Kreismittelpunkt geht. Es soll z. B. nach Fig. 51 der Kreis mit dem Mittelpunkt M fest bleiben und die Alhidade ab (die etwa eine Zielvorrichtung tragen kann) drehe sich um die Achse A (Alhidadenachse) um den Winkel w. Die Anfangs- und Endstellung der Alhidade a_1 und a_2 sind gezeichnet, wegen der Exzentrizität $\overline{MA} = e$ wird der Unterschied der beiden Ablesungen a_1 und a_2 nach Angabe der Zeichnung den fehlerhaften Winkel

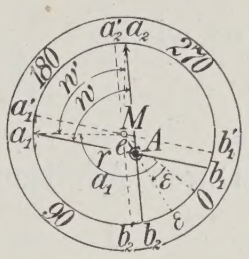


Fig. 51.

$$w' = a_2 - a_1 \tag{1}$$

liefern. Fiele die Alhidadenachse A mit M zusammen, dann wären die richtigen Ablesungen a_1' und a_2' und demnach der richtige Winkel

$$w = a_2' - a_1'. \tag{2}$$

Schneidet die Richtung der Exzentrizität MA die Teilung bei der Ablesung ε und ist r der Kreishalbmesser, so ergibt sich wegen der Kleinheit von e im Verhältnis zu r aus den Dreiecken a_1MA und a_2MA durch den Sinussatz:

$$a_1' - a_1 = \frac{e \sin(a_1 - \varepsilon)}{r} \varrho \quad \text{und} \quad a_2' - a_2 = \frac{e \sin(a_2 - \varepsilon)}{r} \varrho. \tag{3}$$

Der richtige Winkel folgt deshalb durch Einsetzen von Gl. (3) in (2) zu

$$w = a_2 - a_1 + \frac{e}{r} \varrho \{\sin(a_2 - \varepsilon) - \sin(a_1 - \varepsilon)\}. \tag{4}$$

Der letzte Summand (die sog. Winkelkorrektion) kann erhebliche Werte erreichen, z. B. im Maximum wird für $e = 0{,}05$ mm, $r = 70{,}0$ mm, $a_2 - \varepsilon = 90^0$, $a_1 - \varepsilon = 0^0$

$$\frac{e}{r} \varrho \{\sin(a_2 - \varepsilon) - \sin(a_1 - \varepsilon)\} = \frac{0{,}05}{70} \cdot 206\,265'' = 147''.$$

Der Exzentrizitätsfehlereinfluß wird aber durch Ablesen an zwei gegenüberliegenden Stellen des Kreises und Mittelbildung beseitigt. Denn für die Ablesungen b_1 und b_2 werden die Ablesekorrektionen nach Gl. (3)

$$b_1' - b_1 = \frac{e}{r}\varrho \sin(b_1 - \varepsilon); \quad b_2' - b_2 = \frac{e}{r}\varrho \sin(b_2 - \varepsilon), \tag{5}$$

und da an diametralen Stellen hinreichend genau

$$b = a \pm 180^0, \tag{6}$$

so wird

$$w = b_2 - b_1 + \frac{e}{r}\varrho\{\sin(a_1 - \varepsilon) - \sin(a_2 - \varepsilon)\}. \tag{7}$$

Durch Addition und Mittelbildung von (4) und (7) demnach

$$w = \frac{a_2 + b_2}{2} - \frac{a_1 + b_1}{2}. \tag{8}$$

Aus diesem Grunde bringt man auf den geteilten Kreisen meist diametrale Ablesevorrichtungen an und feinere solche Ablesevorrichtungen können dann auch in einfacher Weise benutzt werden, um einen Überblick über die Teilungsfehler des Kreises und die vorhandene Exzentrizität zu erhalten.

Liest man zu diesem Zwecke an verschiedenen Stellen des Kreises die Werte a und b ab (a und b sind ev. Mittelwerte aus mehreren Ablesungen), so ist nach (3), (5) und (6)

$$a_1' - a_1 = \frac{e}{r}\varrho \sin(a_1 - \varepsilon)$$

$$b_1' - b_1 = -\frac{e}{r}\varrho \sin(a_1 - \varepsilon),$$

so daß durch Subtraktion der oberen Gleichung von der unteren wird

$$(b_1' - a_1') + a_1 - b_1 = -\frac{2e}{r}\varrho \sin(a_1 - \varepsilon)$$

und da $b_1' - a_1'$ eine Konstante, nahezu 180^0, ist, so wird

$$a_1 - b_1 = -\frac{2e}{r}\varrho \sin(a_1 - \varepsilon) - \text{konst.} \tag{9}$$

Aus drei solchen Gleichungen könnten die Unbekannten e, ε und konst. bestimmt werden; aus einer Reihe über den Kreis verteilter Beobachtungen können sie durch Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate oder zunächst näherungsweise durch graphische Ausgleichung gefunden werden, indem die a als Abszissen und die $a - b$ als Ordinaten in ein rechtwinkliges Koordinatensystem eingetragen werden.

Beispiel: An einem Kreise von $r = 70$ mm Radius wurden an diametralen Schraubenmikroskopen die folgenden Ablesungen a und b gemacht:

Nr.	a	b	$a-b$
1	0° 02′ 00″	2′ 44″	− 44″
2	30 02 00	2 26	− 26
3	60 02 00	2 17	− 17
4	90 02 00	1 52	+ 8
5	120 02 00	1 35	+ 25
6	150 02 00	1 38	+ 22
7	180 02 00	2 09	− 9
8	210 02 00	2 18	− 18
9	240 02 00	2 35	− 35
10	270 02 00	3 07	− 67
11	300 02 00	3 28	− 88
12	330 02 00	3 00	− 60
13	0 02 00	2 50	− 50

Nach dem Eintragen in ein Koordinatensystem wurde eine ausgleichende Sinuslinie durch die Punkte gezogen und damit (Fig. 52) abgelesen

$$\frac{2e}{r}\varrho'' = 51''; \quad \varepsilon = 36^0; \quad \text{konst.} = 29'',$$

so daß die Näherungsgleichung wird

$$a - b = 51'' \sin(a - 36^0) - 29''.$$

Die Exzentrizität e beträgt deshalb

$$e = \frac{51'' \cdot r}{2\varrho''} \approx 8{,}6\ \mu$$

und die Abweichungen zwischen den Punkten und der Sinuslinie können genähert als Folgen der Teilungsfehler betrachtet werden.

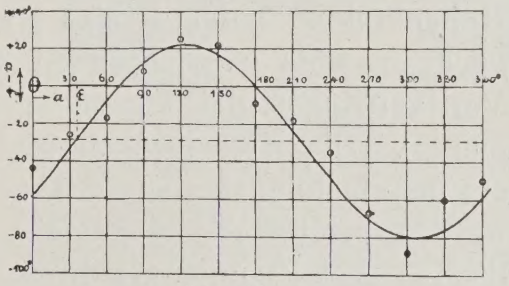


Fig. 52.

Ist die Alhidade fest und der geteilte Kreis drehbar angeordnet, dann findet man durch eine ähnliche Untersuchung, daß durch Ablesen an diametralen Stellen und Mittelbildung der richtige Drehwinkel des Kreises sehr genähert gefunden wird.

§ 22. Stative.

Die Meßinstrumente werden im Felde meistens auf dreibeinigen Stativen in einer zur Beobachtung günstigen Höhe festgehalten und es müssen diese deshalb genügende Standfestigkeit besitzen. Die Stativbeine werden in der Regel aus Holz, seltener aus Metallröhren gefertigt und zum Zwecke leichten Eintretens in den Boden mit Metallspitzen versehen; durch ein möglichst breites Gelenk werden die Beine mit dem hölzernen oder besser metallenen Stativkopfe verbunden, der

entweder tellerförmig ist oder einen Zapfen trägt. Auf Tellerstativen kann das Instrument zum Zwecke des Zentrierens über einem z. B. auf dem Boden bezeichneten Punkte nach allen Seiten um einige Zentimeter verschoben und dann an jenem durch eine Schraubenstange mit Feder elastisch befestigt werden (siehe z. B. Fig. 55), während es mit Zapfenstativen durch Aufstecken und Anklemmen an den Zapfen verbunden wird. Einige Stativköpfe sind bei den Fig. 55, 80, 87, 158, 159 abgebildet. Schwere Instrumente werden auf kräftige Holzsäulen oder auf Steinpfeiler gestellt.

3. Kapitel.

Der Theodolit und sein Gebrauch.

§ 23. Der einfache und der Repetitionstheodolit.

Der Theodolit dient zum Messen beliebig großer Horizontal- und Vertikalwinkel und besitzt dann einen geteilten Horizontal- und einen solchen Vertikalkreis. Der Höhenkreis oder der Horizontalkreis kann fehlen, wenn nur Horizontalwinkel oder Vertikalwinkel gemessen werden sollen; erstere Instrumente heißen häufig Katastertheodolite, letztere Höhenkreise. Beide Kreise sind nahezu gleich groß und mit gleich genauen Ablesevorrichtungen versehen, wenn Horizontalwinkel und Vertikalwinkel gleich genau gemessen werden sollen (Universalinstrumente). Die Kreisdurchmesser schwanken zwischen 8 cm und 30 cm, am gebräuchlichsten sind 12 ÷ 14 cm. Große und schwere Theodolite werden beim Gebrauche meist auf Pfeiler, kleinere Instrumente auf Stative gestellt und mit diesen federnd verbunden. Die vier Figuren 53, 54, 55 und 56 geben die Ansichten einiger Theodolite.

Die Einrichtung des einfachen Theodoliten kann aus den beiden schematischen Zeichnungen (Fig. 57) ersehen werden.

Der dreifüßige Unterbau D mit den Fußschrauben FF trägt den Horizontalkreis oder Limbus HH. Der ganze Aufbau ist um den Zapfen AA drehbar. Mit diesem fest verbunden ist die Alhidadenscheibe A_1A_1 mit den Ablesevorrichtungen J_1J_2 und den beiden Stützen S_1S_2, deren obere Enden zu gabelförmigen Lagern für die Kippachse KK des Fernrohres ausgebildet sind. Der Zapfen AA heißt deshalb Alhidadenzapfen und seine Achse Alhidadenachse. Mit der Kippachse KK des Fernrohres verbunden ist das Zielfernrohr mit der Ziellinie oder Zielachse ZZ und außerdem der Höhenkreis VV. Die zweite Alhidadenscheibe A_2A_2 trägt die Ablesevorrichtungen J_3J_4 und die Höhenlibelle L_2. (Mitunter fehlt die Alhidadenscheibe A_2A_2; die Ab-

lesevorrichtungen $J_3 J_4$ sind dann an Armen befestigt, die von der Stütze S_2 ausgehen, und als Höhenlibelle dient dann eine in der Richtung des Höhenkreises angebrachte Libelle, z. B. L_1.)

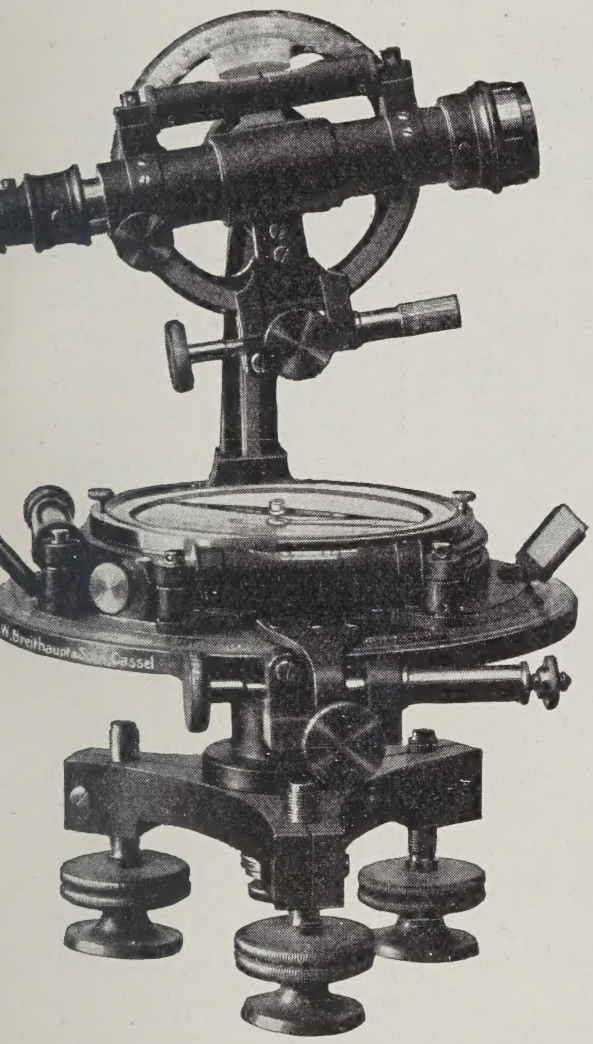


Fig. 53. Einfacher (Bussolen-)Theodolit von Breithaupt & Sohn in Cassel. Horizontalkreis 14 cm Durchm. mit 2 Nonien von 1′ Ang.; Höhenkreis 8 cm Durchm. mit 1 Nonius von 1′ Ang. Durchschlagbares Fernrohr (12 cm Brennweite) mit 13facher Vergröß. und Doppelschlifflibelle (25″ Teilwert). (Bussole mit $^1/_2{}^0$ Teilung [72 mm Durchm.] herausnehmbar.) Kreuzlibellen 50″ Teilwert.

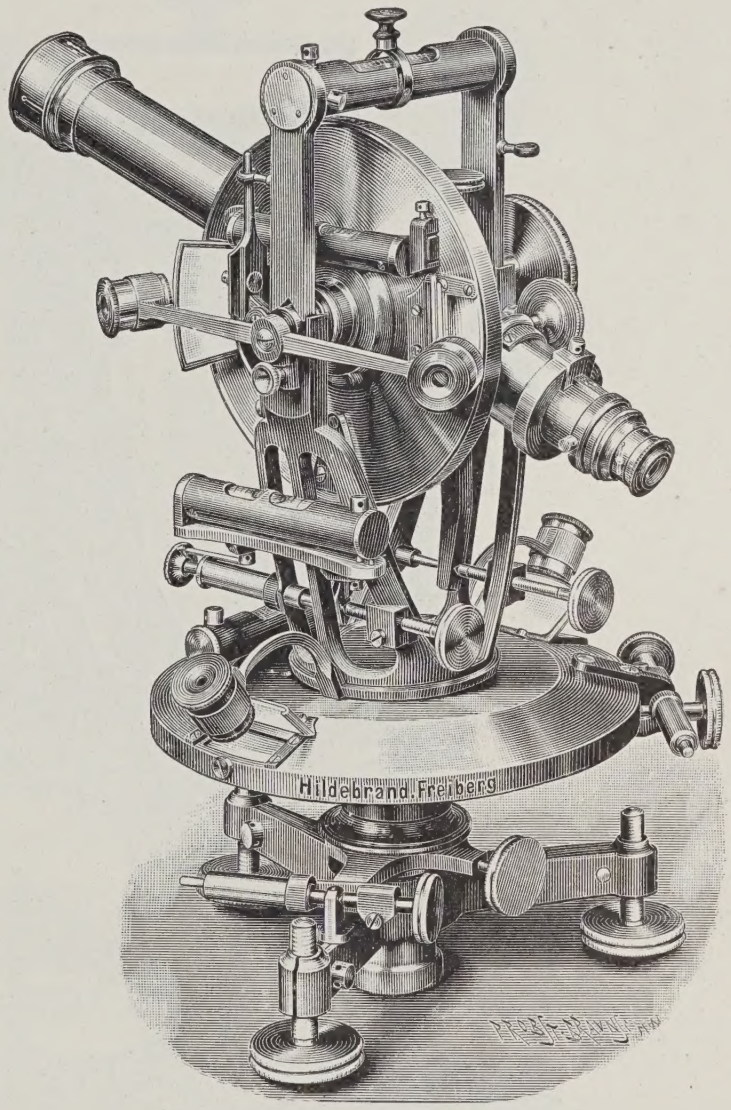


Fig. 54. Repetitionstheodolit von Hildebrand in Freiberg i. S.
Horizontalkreis 12 cm Durchm. mit 2 Nonien von $^1/_2{}'$ Ang. Höhenkreis 8 cm Durchm. mit 2 Nonien von 1′ Ang. Durchschlagbares, 20fach vergröß. Fernrohr (21 cm Brennweite) mit (nicht sichtbarer) Doppelschlifflibelle von 17″ Teilwert. Teilwert aller Alhidadenlibellen 1′.

Mit Hilfe einer an dem drehbaren Aufbau vorhandenen Libelle können die genannten drei Achsen (AA, KK und ZZ) in ihre richtige Lage gebracht werden. Sitzt die Libelle auf der Alhidadenscheibe $A_1 A_1$, wie z. B. L_1, oder an den Fernrohrstützen $S_1 S_2$, dann bezeichnet man sie als Alhidadenlibelle; sitzt sie über oder unter dem Fernrohr

in dessen Richtung, wie L_3, dann heißt sie Nivellierlibelle; ist sie an der drehbaren Höhenalhidade $A_2 A_2$, wie L_2, dann heißt sie Höhenlibelle (Libellenalhidade) und kann sie als Reitlibelle auf die Kippachse KK aufgesetzt werden, wie L_4, dann nennt man sie Kippachsenlibelle. Häufig sind am gleichen Theodolit, wie die Figuren 53 bis 56 zeigen, mehrere Libellen vorhanden, z. B. Kreuzlibellen auf der Alhidade, oder zur rohen Lotrechtstellung der Alhidadenachse eine Dosenlibelle auf $A_1 A_1$ der Fig. 57.

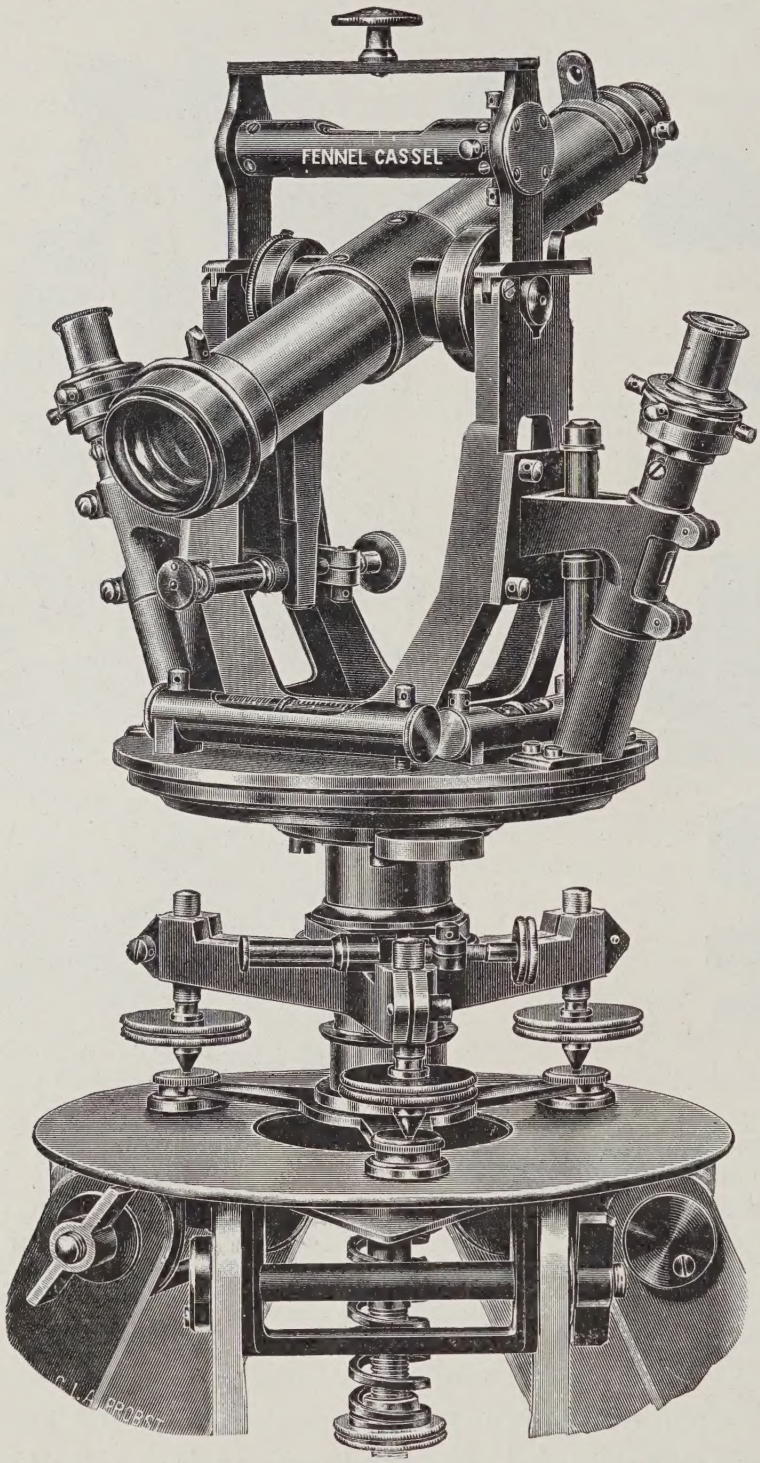


Fig. 55. Repetitionstheodolit von Fennel Söhne in Cassel. Horizontalkreis 13,5 cm mit 2 Skalenmikroskopen mit 0,2′ Abschätzung. Durchschlagbares und umlegbares Fernrohr mit 21facher Vergrößerung (24,5 cm Brennweite). Teilwert der Reitlibelle 30″.

Zum Festhalten und Feinbewegen der Alhidade $A_1 A_1$ gegen den Kreis HH, des Fernrohres ZZ gegen die Horizontale, sowie der Zeiger- oder Indexlinie $J_3 J_4$ gegen die Horizontalebene durch die Kippachse KK dienen die Klemm- und Mikrometerwerke. Der Ring $R_1 R_1$ z. B. ist um den Schaft des Dreifußes D drehbar, durch Anziehen der Klemmschraube s_1 wird er mit diesem fest verbunden. Der an der Alhidadenscheibe $A_1 A_1$ befestigte Ansatz f_1 liegt zwischen zwei Ringansätzen derart, daß eine Gegenfeder den Alhidaden-

ansatz an eine Feinstellschraube (Mikrometerschraube) andrückt. Durch Drehen dieser Schraube s_2 wird demnach bei angezogener Klemmschraube s_1 die Alhidade fein bewegt. (Siehe auch Fig. 53 und 54.)

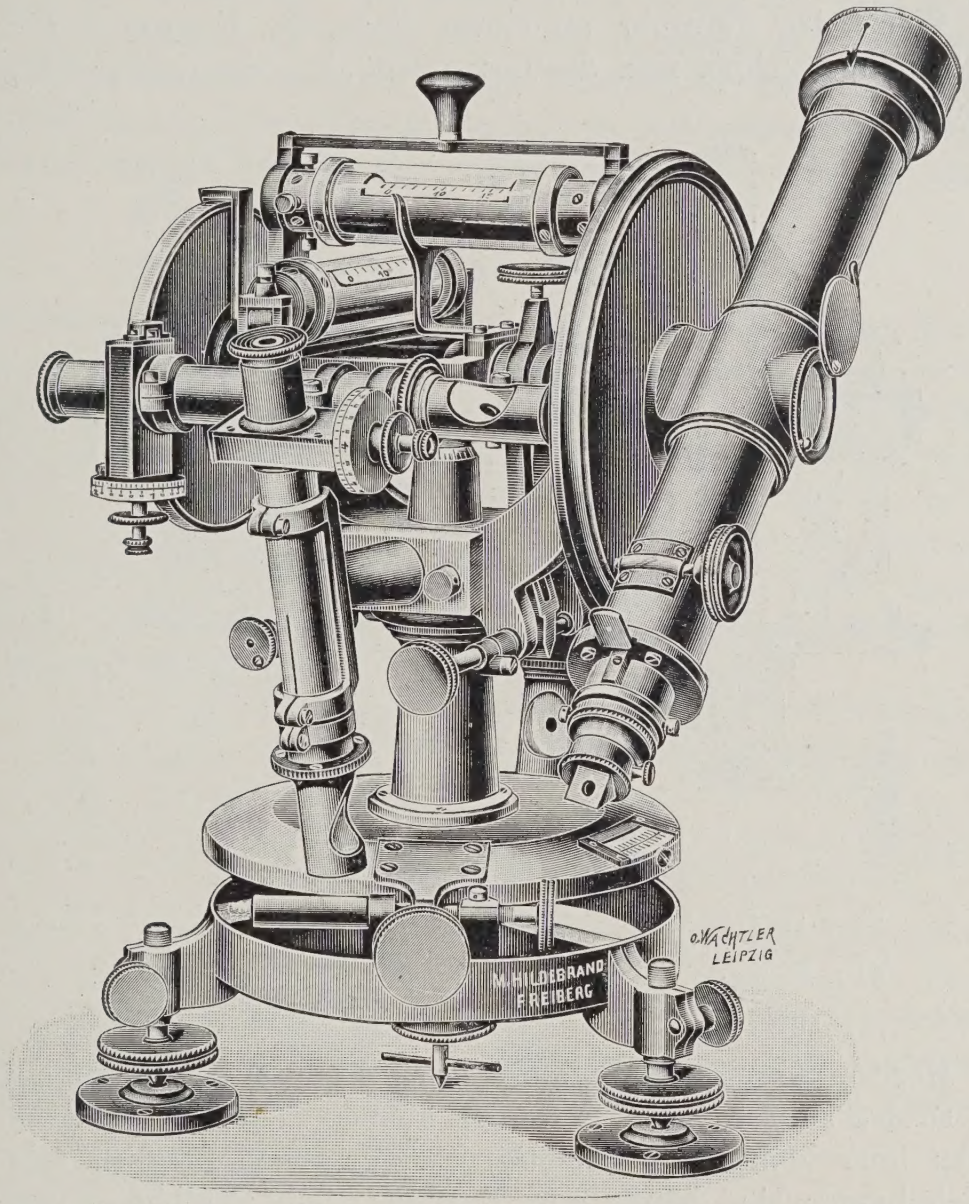


Fig. 56. Universalinstrument von Hildebrand in Freiberg i. S. Roh verdrehbarer Horizontal- und Vertikalkreis von 13,5 cm Durchm. ($^1/_6{}^\circ$ Teilung) mit je 2 Schraubenmikroskopen mit 1″ Schätzung. Mikroskopisch voll beziffelte Grade. Durchschlagbares und umlegbares (exzentrisches) Fernrohr mit 28- und 23-facher Vergröß. (25 cm Brennweite). 2 feine Kammerlibellen.

Ein ähnliches Mikrometerwerk zur Feinstellung der Höhenlibelle ist durch m_3 und g_3 angedeutet. Die Klemm- und Mikrometerwerke sollen so konstruiert sein, daß bei ihrem Gebrauche die geteilten Kreise nicht auf Verbiegung beansprucht werden können; man verwendet deshalb jetzt meist sog. Zentralklemmen. Da auf der Achse AA mit-

unter ein bedeutendes Gewicht lastet, so wird bei schweren Theodoliten durch Anbringen einer Gegenfeder ein sanfter, aber sicherer Gang ermöglicht.

Besondere Einrichtungen.

Wenn das Fernrohr an einem Ende der Kippachse KK angebracht ist, bezeichnet man das Instrument als exzentrischen Theodoliten (Fig. 56).

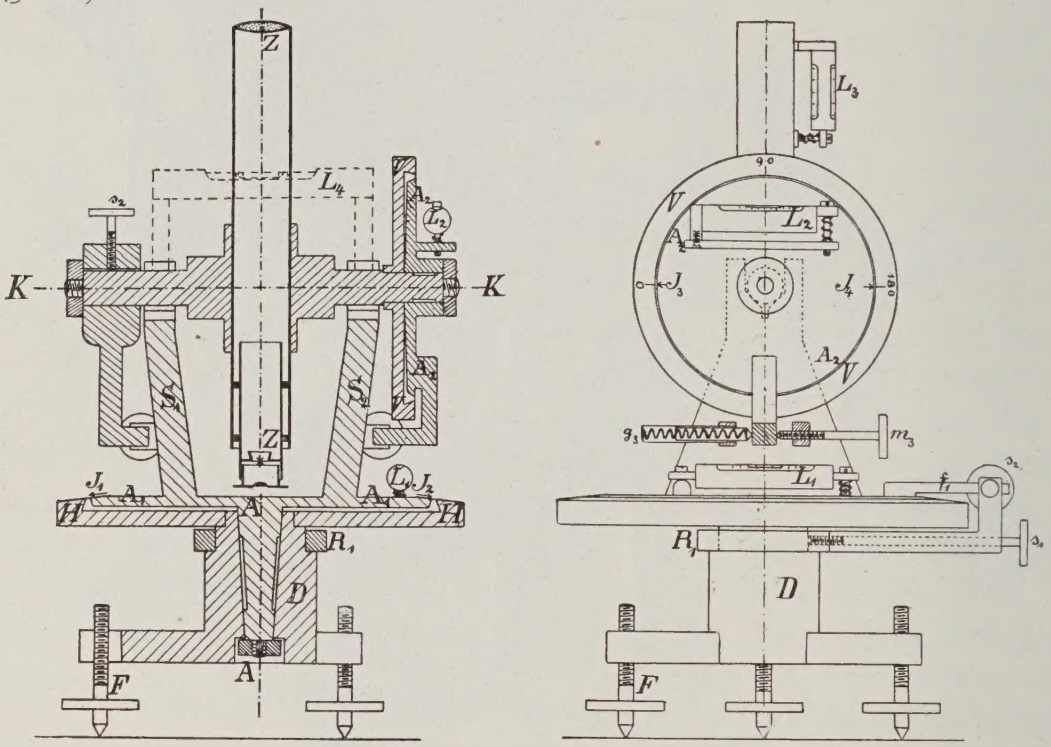


Fig. 57.

AA = Alhidadenachse
KK = Fernrohrkippachse
ZZ = Ziellinie

HH = Horizontalkreis (Limbus)
$J_1 J_2$ = Zeiger
VV = Vertikalkreis
$J_3 J_4$ = Zeiger

Horizontalkreis und Vertikalkreis sitzen mitunter nur durch Reibung fest, so daß sie roh verdreht werden können. (Bei der Winkelmessung dürfen aber keine unbeabsichtigten Änderungen möglich sein.) Die Kreisteilungen sind häufig zum Schutze gegen Beschädigungen durch übergreifende Schutzringe zum größten Teile verdeckt.

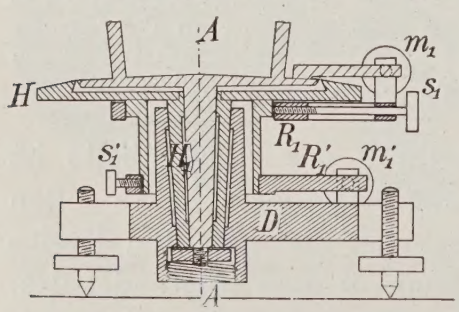


Fig. 58.

Mit dem Theodoliten können sogleich Vielfache eines Horizontalwinkels gemessen werden, wenn der Horizontalkreis H mit samt dem Aufbau gegen den dreifüßigen Unterbau D mit Klemm- und Mikrometerwerk, wie z. B. in der schema-

tischen Fig. 58 angedeutet ist, fein verdreht werden kann. Zu diesem Zwecke ist ein zweiter lotrecht stehender Zapfen, der Kreis- oder Limbuszapfen H_1 und der Klemmring R_1' mit der Klemmschraube s_1' nebst Feinstellschraube m_1' notwendig. Der Fortsatz des Ringes R_1' liegt z. B. zwischen zwei Ansätzen an einem Arme des Dreifußes D. Derartige Theodolite heißen Repetitions- oder Multiplikationstheodolite (s. Fig. 54).

Damit die verschiedenen Theodolitachsen in bestimmte gegenseitige Lage gebracht werden können, sind weiterhin Korrektionsschräubchen vorhanden.

§ 24. Berichtigung des Theodolits.

Der Theodolit ist berichtigt, wenn sich bei wagerecht liegendem Horizontalkreis die Ziellinie beim Kippen des Fernrohres in einer vertikalen Ebene parallel zur Höhenkreisebene bewegt. Dies ist mit Rücksicht auf die mechanische Herstellung des Instrumentes der Fall, wenn

1. die Ziellinie senkrecht steht zur Kippachse, so daß sie beim Kippen des Fernrohres eine Ebene beschreibt. Die Abweichung der Ziellinie von der um 90° gedrehten Kippachse (in der durch Ziellinie und Kippachse gebildeten Ebene) heißt der Zielachsen- oder Kollimationsfehler c;
2. die Kippachse des Fernrohres horizontal liegt; die Abweichung dieser Achse von der Horizontalen heißt Neigungsfehler i der Kippachse;
3. die Alhidadenachse lotrecht steht; der Winkel zwischen der Lotrichtung und der Alhidadenachse heißt Aufstellungsfehler f.

Die Zielfernrohre der Theodolite können entweder durchschlagbar oder die Kippachse kann (mit dem Fernrohre) in ihren Lagern umlegbar sein; beim Durchschlagen wird das Fernrohr um die Kippachse so gedreht, daß Objektiv und Okular ihre Plätze tauschen, beim Umlegen des Fernrohres tauschen nur die beiden Kippachsenzapfen ihre Lager.

1. Beseitigen des Kollimationsfehlers c.

A. Das Fernrohr ist durchschlagbar.

Nach Anzielen des nahezu im Horizont des Instrumentes gelegenen entfernten Punktes P wird das Fernrohr durchgeschlagen und der Punkt 1 eingewiesen oder der 1 entsprechende Punkt an einem horizontal liegenden Maßstabe abgelesen. Nach Andeutung der Fig. 59 weicht die Zielung $O1$ um den Winkel $2c$ von der rückwärts verlängerten Linie PO ab, weil die Kipp-

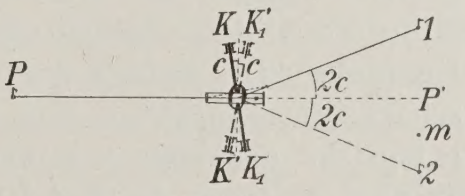


Fig. 59.

achse KK_1 um c von der Senkrechten zu PO abweicht. Zielt man dann durch Drehen der Alhidade um $(180^0 \pm 2c)$ den Punkt P wieder an, dann kommt die Kippachse in die Lage $K'K_1'$, so daß nach dem wiederholten Durchschlagen des Fernrohres Punkt 2 eingewiesen bzw. abgelesen wird. Der Abstand $\overline{1.2}$ entspricht demnach dem vierfachen Kollimationsfehler; das Fadenkreuz ist deshalb durch Seitwärtsverschieben auf den Punkt m einzustellen, der um $\frac{1}{4}$ des Abstandes $\overline{21}$ von 2 entfernt liegt.

B. Die Kippachse (mit Fernrohr) ist umlegbar.

Nach Anzielen des beliebig gelegenen Punktes P wird die Kippachse vorsichtig in ihren Lagern umgelegt. Dadurch wird die Ziellinie nach 1 gerichtet (Fig. 60). Der Winkel $PO1$ ist der doppelte Kollimationsfehler und deshalb ist zu seiner Beseitigung das Fadenkreuz um die Hälfte der Abweichung seitwärts zu verschieben.

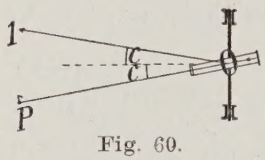


Fig. 60.

Aus A und B folgt, daß durch Durchschlagen des Fernrohres und darauf folgendes Umlegen der Kippachse die Gerade OP scharf nach rückwärts (nach P' der Fig. 59) verlängert werden kann.

C. Auf dem Umwege über Horizontalkreisablesungen und deshalb von deren Schärfe abhängig kann der Kollimationsfehler an durchschlagbaren Fernrohren in folgender Weise beseitigt werden. Nach Anzielen eines im Horizont liegenden Punktes P wird am Horizontalkreis a abgelesen. Stellt man die Alhidade auf $a \pm 180^0$ ein und schlägt das Fernrohr durch, so ist der Fall B gegeben; die sich zeigende Abweichung vom Zielpunkte P ist demnach zur Hälfte durch Verschieben des Fadenkreuzes zu beseitigen.

D. Liegt die Ziellinie um den leicht abmeßbaren Betrag e exzentrisch, dann verwendet man am einfachsten anstelle eines Zielpunktes P zwei solche im Abstande $2e$ (z. B. zwei Striche auf Papier). Die Abänderungen der angegebenen Methoden sind sofort ersichtlich.

2. Gleichzeitige Beseitigung des Kippachsenfehlers und Lotrechtstellung der Alhidadenachse mit Hilfe der Kippachsenlibelle.

Zuerst wird die Kippachsenlibelle wie eine Reitlibelle nach § 18 (Seite 37) gegen ihre Unterlage berichtigt und hierauf wird mit ihrer Hilfe die Alhidadenachse nach § 19 genähert lotrecht gestellt (in zwei Hauptebenen). Bringt man dann die Libelle mit den Fußschrauben scharf zum Einspielen und dreht hierauf die Alhidade um 180^0, so entspricht der sich zeigende Ausschlag nach § 19 dem doppelten Winkel zwischen der Lotrichtung und der Alhidadenachse (in der ge-

wählten Ebene) und er muß demnach zur einen Hälfte an den Fußschrauben, zur anderen Hälfte an der Neigung der Kippachse durch Heben oder Senken eines der beiden Kippachsenlager beseitigt werden, weil an der Verbindung zwischen Libellenachse und Kippachse nichts mehr geändert werden darf. Die Kippachsenneigung kann in verschiedener Weise geändert werden; häufig ist eines der beiden Lager in der Höhe verschiebbar, z. B. mit Zug- und Druckschrauben oder durch Teilung des Lagers nach Andeutung der Fig. 61.

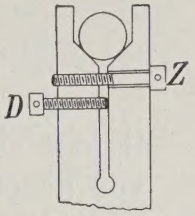


Fig. 61.

Vorteilhaft führt man diese Untersuchung abwechselnd in zwei Hauptrichtungen aus.

3. Lotrechtstellung der Alhidadenachse und Horizontallegung der Kippachse mit Hilfe irgendeiner Alhidadenlibelle.

Nach § 19 wird zuerst die Alhidadenachse scharf lotrecht gerichtet und gleichzeitig die Alhidadenlibelle berichtigt. Bei Verwendung einer Nivellierlibelle (auf dem Fernrohr) als Alhidadenlibelle wird der nach dem Drehen der Alhidade um 180° sich zeigende Ausschlag zur einen Hälfte an den Fußschrauben, zur anderen Hälfte durch Neigen des Fernrohrs mit samt der Libelle beseitigt, damit die etwaige Parallelität zwischen Ziellinie und Libellenachse erhalten bleibt.

Die Kippachse wird nach Lotrechtstellen der Alhidadenachse zu dieser nicht senkrecht stehen, also um den Winkel i geneigt sein, so daß die berichtigte Ziellinie beim Kippen eine geneigte Ebene beschreibt. Wird deshalb (Fig. 62) ein hochgelegener Punkt P (Zielung steil nach auf- oder abwärts) angezielt und dann das Fernrohr horizontal gelegt (gekippt), so wird wegen der fehlerhaften Lage der Kippachse K_1K_2 der Punkt P nach P_1 projiziert. P_1 kann durch Ablesen auf einem horizontal gelegten Maßstab, durch Einweisen eines Zielzeichens oder auch durch Ablesen auf dem Horizontalkreise eines zentrischen Theodoliten bezeichnet werden. Schlägt man nun das Fernrohr durch, zielt P_1 wieder an (ev. auch durch Einstellen der um 180° geänderten Ablesung auf dem Horizontalkreise) und kippt nach oben, dann ist die Kippachse nach $K_2'K_1'$ und die Ziellinie nach P_2 gerichtet. Die Abweichung $\overline{PP_2}$ entspricht dem doppelten Einflusse des Neigungsfehlers i und ist durch Heben oder Senken eines Kippachsenendes zu beseitigen, bis das Fadenkreuz auf die Mitte m zwischen P_2 und P gerichtet ist.

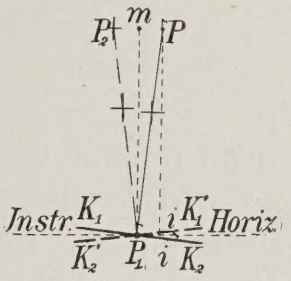


Fig. 62.

Zu allen angegebenen Berichtigungsverfahren ist zu bemerken, daß sie nötigenfalls wiederholt auszuführen sind.

§ 25. Einfluß der Achsenfehler auf die Kreisablesungen.

Die nach Anzielen eines Punktes mit einem mangelhaft berichtigten Theodoliten auf den Kreisen gemachten Ablesungen weichen von denen, die nach dem Anzielen dieses Punktes mit dem vollkommen berichtigten Theodoliten erhalten würden, etwas ab. Sie müssen deshalb entweder um diese Abweichungen verbessert oder die vorhandenen Achsenfehler müssen durch das Meßverfahren unschädlich gemacht werden. Die Achsenfehler werden im folgenden als klein angenommen.

I. Korrektion der Horizontalkreisablesungen wegen der Achsenfehler.

1. Die Ziellinie bilde mit dem links der Zielung liegenden Kippachsenende l den Winkel $90^0 + c$ (c ist positiv, wenn dieser Winkel größer als 90^0 ist).

Würde bei scharf lotrecht gerichteter Alhidadenachse, genau horizontaler Kippachse und richtig stehender Zielachse der Punkt P unter der Zenitdistanz $z = \sphericalangle ZOP$ angezielt (Fig. 63), dann würde auf dem Kreise die richtige Ablesung a gemacht. Erteilt man der Ziellinie den Kollimationsfehler $+c$, dann geht die Zielung rechts an P vorbei; nach dem Wiederanzielen von P wird deshalb die fehlerhafte Ablesung a_1 gemacht, so daß wird

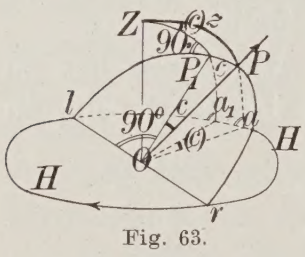


Fig. 63.

$$a = a_1 + (c), \qquad (1)$$

wenn (c) die Verbesserung wegen des Kollimationsfehlers c bedeutet. Zu deren Bestimmung legt man um den Schnittpunkt O der Kippachse mit der Ziellinie eine beliebige Kugel, die von dem Lote durch O im Zenitpunkt Z, von der Horizontalebene durch O in HH, von der Ebene durch die Kippachse und die Ziellinie in lPr und von der Zielung nach P in P geschnitten wird. Der richtigen Ablesung a entspricht die Horizontalprojektion von OP, der fehlerhaften Ablesung a_1 die Projektion OP_1, so daß aus dem bei P_1 rechtwinkeligen sphärischen Dreieck ZP_1P sich ergibt

$$\sin(c) = \frac{\sin c}{\sin z} \quad \text{oder wegen der Kleinheit von } c \quad (c)'' = \frac{c''}{\sin z}. \qquad (2)$$

Nach Durchschlagen des Fernrohres und Wiederanzielen von P ändert c das Vorzeichen.

2. Die Kippachse bilde mit der Horizontalebene den Winkel i; liegt das rechte Ende der Kippachse zu hoch, dann sei i positiv.

Mit dem richtig aufgestellten Theodoliten (Alhidadenachse vertikal und Kollimationsfehler beseitigt) wird P nach a projiziert (Fig. 64), so daß a der richtigen Ablesung auf dem Horizontalkreise entspricht. Wird aber der Kippachse die Neigung $+i$ erteilt, dann geht die Zielung links von P vorbei, die Alhidade muß deshalb zum Wiederanzielen von P vorwärts gedreht werden. Die Ablesung geht dadurch in a_1 über und es wird

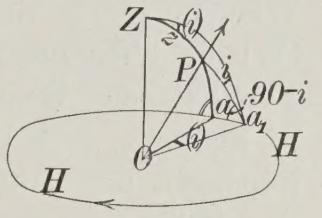


Fig. 64.

$$a = a_1 - (i). \qquad (3)$$

Durch Kippen des Fernrohres wird P demnach bei geneigter Kippachse nach a_1 projiziert. Aus dem in leicht verständlicher Weise entstehenden rechtwinkeligen sphärischen Dreieck Paa_1 liest man ab

$$\operatorname{tg}(90^0 - i) = \frac{\operatorname{tg}(90^0 - z)}{\sin(i)} \quad \text{oder da } i \text{ klein} \quad (i)'' = i'' \cdot \operatorname{ctg} z. \qquad (4)$$

Nach Durchschlagen des Fernrohres und Wiederanzielen von P ändert i das Vorzeichen.

3. Die Alhidadenachse bildet mit der Vertikalen den Winkel f (Aufstellungsfehler); die Kippachse stehe senkrecht zur Alhidadenachse und die Ziellinie senkrecht zur Kippachse.

Die Ablesung a_1 auf dem etwas geneigten Horizontalkreise nach Anzielen von P unter der Zenitdistanz z müßte dann zuerst auf den scharf horizontal liegenden Kreis projiziert werden. Diese sehr geringe Änderung der Ablesung darf stets vernachlässigt werden.

Die Vertikalebene durch die Umdrehachse $u\,O$ schneide den Horizontalkreis in L (O = Projektion des oberen, u = Projektion des unteren Endes der Alhidadenachse) (Fig. 65). Die Kippachse K_1K_2 liegt horizontal, wenn die Zielung in dieser Ebene $u\,O$ erfolgt, die hierbei am Kreise gemachte Ablesung sei A. Wird in der Richtung OK_2 gezielt (entsprechende Kreisablesung $(A + 90^0)$), dann ist die Kippachsenneigung $+f$, bildet aber die Zielung nach P mit OL den beliebigen Winkel α, dann wird die Kreisablesung $a_1 \approx (A + \alpha)$ und die hierbei vorhandene Kippachsenneigung f' ergibt sich nach Andeutung der Fig. 65 aus dem schraffierten rechtwinkligen sphärischen Dreieck durch

Fig. 65.

$$\sin f = \frac{\sin f'}{\sin \alpha} \quad \text{oder} \quad f' = f \sin \alpha = f \sin(a_1 - A).$$

Verläuft die Zielung nach P unter der Zenitdistanz z, dann folgt aus den Gleichungen (4) und (3) die richtige Ablesung

$$a = a_1 - f \sin (a_1 - A) \cdot \operatorname{ctg} z. \tag{5}$$

Aus dem Gesagten folgt, daß nach Durchschlagen des Fernrohres und Wiederanzielen von P die Korrektion nach (5) unverändert bleibt. (Würde aber nach dem Durchschlagen die Alhidadenachse in ihrer Vertikalebene etwa mit Hilfe zweier gekreuzter Alhidadenlibellen um $2f$ gedreht, dann würde aus dem Mittel der Messungen in zwei Fernrohrlagen der Einfluß des Aufstellungsfehlers eliminiert sein.)

Faßt man die Gleichungen (1) bis (5) zusammen, dann erhält man die wegen der drei Achsenfehler berichtigte Ablesung a aus der fehlerhaften a_1 durch

$$a = a_1 + \frac{c}{\sin z} - i \operatorname{ctg} z - f \sin (a_1 - A) \operatorname{ctg} z. \tag{6}$$

Nach dem Durchschlagen des zentrischen Fernrohres und Wiederanzielen von P wird abgelesen a_2, das sehr nahe um 180^0 von a_1 abweicht, so daß unter Beachtung der oben gemachten Bemerkungen folgt

$$\begin{aligned} a &= a_2 \pm 180^0 - \frac{c}{\sin z} + i \operatorname{ctg} z - f \sin \{a_2 - (A \pm 180^0)\} \operatorname{ctg} z \\ &= a_2 \pm 180^0 - \frac{c}{\sin z} + i \operatorname{ctg} z - f \sin (a_1 - A) \operatorname{ctg} z. \end{aligned} \tag{7}$$

Durch Mittelbildung aus (6) und (7) wird bei Vernachlässigung des konstanten Gliedes

$$a = \frac{a_1 + a_2}{2} - f \sin (a_1 - A) \operatorname{ctg} z. \tag{8}$$

Es können demnach durch Durchschlagen des Fernrohres, darauffolgende Messung in der zweiten Fernrohrlage und Mittelbildung nach (8) die Einflüsse des Kollimations- und Neigungsfehlers unschädlich gemacht werden (sog. Kompensationsmessung), nicht aber der Aufstellungsfehlereinfluß, wenn die vertikale Umdrehachse unverändert bleibt. Da dieser Einfluß proportional der Kotangente der Zenitdistanz ist, so muß bei steilen Zielungen die Umdrehachse mit Hilfe von empfindlichen Röhrenlibellen scharf lotrecht gerichtet werden.

II. Korrektion der Höhenkreisablesungen wegen der Achsenfehler.

Bei der Messung von Höhenwinkeln muß die Kippachse horizontal liegen und die Ziellinie senkrecht dazu stehen. Die Höhenkreisebene ist vermöge der mechanischen Herstellung stets senkrecht zur Kipp-

achse. Es werde angenommen, daß am Höhenkreisindex J Null abgelesen wird, wenn die Zielung scharf lotrecht nach oben (nach dem Zenit Z von O (Fig. 66)) gerichtet ist und daß nach Kippen der Ziellinie um die Zenitdistanz z, wobei der Punkt P angezielt ist, an dem berichtigten Instrumente die Ablesung $a = z$ gemacht wird. Erteilt man hierauf der Ziellinie den Kollimationsfehler $+ c$ und der Kippachse die Neigung $+ i$ (nach Absatz I.), dann geht die Ablesung a nach dem Wiederanzielen von P in die fehlerhafte Ablesung a_1 über.

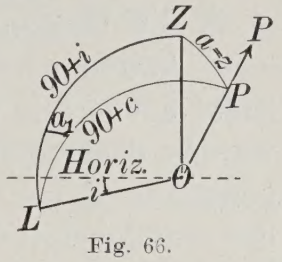


Fig. 66.

Die um O gelegte Kugel wird vom Lote in O im Zenitpunkte Z, von der Zielung nach P in P und vom linken Kippachsenende in L getroffen. Die fehlerhafte Ablesung entspricht dem Winkel a_1, die richtige dem Bogen $a = \overset{\frown}{ZP}$. Außerdem sind die weiteren Stücke in der Abbildung bezeichnet, so daß aus dem sphärischen Dreieck ZPL abgelesen werden kann

$$\cos a = \cos(90^0 + i)\cos(90^0 + c) + \sin(90^0 + i)\sin(90^0 + c)\cos a_1$$

oder

$$\cos a = \sin i \sin c + \cos i \cos c \cos a_1 . \tag{9}$$

Da i und c klein sind, genügen in den für die trigonometrischen Funktionen gesetzten Reihen wenige Glieder, so daß wird

$$\begin{aligned} \cos a &= \frac{i''}{\varrho''} \cdot \frac{c''}{\varrho''} + \left(1 - \frac{i^2}{2\varrho^2}\right)\left(1 - \frac{c^2}{2\varrho^2}\right)\cos a_1 \\ &= \frac{ic}{\varrho^2} + \cos a_1 - \frac{i^2 + c^2}{2\varrho^2}\cos a_1 . \end{aligned} \tag{10}$$

Setzt man $\cos a - \cos a_1 = 2 \sin \frac{a + a_1}{2} \sin \frac{a_1 - a}{2}$ und außerdem im Korrektionsglied $\frac{a + a_1}{2} = a_1 = z$, dann wird aus (10)

$$a - a_1 = - \frac{ic}{\varrho \sin z} + \frac{c^2 + i^2}{2\varrho} \operatorname{ctg} z . \tag{11}$$

Die Verbesserung der fehlerhaften Ablesung ist demnach, wenn der Theodolit angenähert berichtigt ist, bei größeren Zenitdistanzen, wie sie in der Regel bei geodätischen Messungen vorkommen, stets verschwindend klein. Aber auch bei kleinen Zenitdistanzen darf die Korrektion nach Gl. (11) bei einem gut berichtigten Instrumente (neben anderen Fehlerquellen) vernachlässigt werden.

§ 26. Messung von Horizontalwinkeln.

Die zwei wichtigsten Winkelmeßverfahren sind

1. die satzweise Winkelmessung oder die Richtungsbeobachtungen und
2. die Messung von Einzelwinkeln durch Repetition oder Multiplikation.

Stets bevor mit der Messung nach irgend einem Verfahren begonnen werden darf, muß der Theodolit über dem gegebenen Winkelscheitel genügend scharf zentrisch und fest aufgestellt werden, so daß sich der Limbusmittelpunkt bei hinreichend scharf lotrecht gerichteter Umdrehachse (siehe § 25) im Lote des Winkelscheitels befindet. Der Einfluß eines etwa vorhandenen Kollimationsfehlers und einer Kippachsenneigung, sowie einer beliebigen exzentrischen Lage der Ziellinie gegen den Kreismittelpunkt auf die gemessenen Winkel wird durch zwei Messungen in zwei Fernrohrlagen (die zweite Messung nach Durchschlagen des Fernrohres) und Mittelbildung unschädlich gemacht; erfolgt die Messung aber nur in einer Fernrohrlage, dann müssen die genannten zwei Achsenfehler hinreichend genau (siehe § 25) beseitigt und die mit exzentrischen Theodoliten gefundenen Ablesungen wegen der Exzentrizität der Ziellinie berichtigt werden. Die Größe dieser Berichtigung folgt aus der Exzentrizität e und der Entfernung E des Zielpunktes vom Limbusmittelpunkte hinreichend genau zu $\pm \frac{e}{E} \varrho''$.

Richtungsbeobachtungen und Berechnung des Messungsfehlers (Standfehler).

Nachdem die Alhidadenachse genügend scharf lotrecht gerichtet ist, werden die einzelnen Zielpunkte 1, 2, 3 ... n (im Grenzfalle zwei) der Reihe nach angezielt (in der einen Fernrohrlage) und die zugehörigen Kreisablesungen aufgeschrieben. Hierauf wird das Fernrohr zur Eliminierung der erwähnten Achsenfehlereinflüsse und der etwa vorhandenen Exzentrizität der Ziellinie durchgeschlagen und sodann werden dieselben Zielpunkte zur Unschädlichmachung einer etwaigen, der Zeit proportionalen, gleichmäßigen Drehung der Theodolitunterlage in umgekehrter Reihenfolge n, $n-1$, ..., 3, 2, 1 (in der zweiten Fernrohrlage) eingestellt und hierbei die zugehörigen Kreisablesungen gemacht. Die bei einem solchen Richtungssatze erhaltenen Kreisablesungen schreibt man tabellarisch auf, etwa in der aus dem Beispiel auf Seite 59 ersichtlichen Weise.

Bei der Berechnung des Satzes wird aus den für jeden Zielpunkt vorhandenen vier Ablesungen an den zwei diametralen Zeigern das „Mittel“ gebildet, wobei der Einfachheit halber die Gradzahlen eines

Standpunkt ⊙ Kufstein 7, zentrisch.

Fernrohrlage $\frac{1}{2}$. Satz 1. (10″ Nonientheodolit.)

Zielpunkt	Zeiger 1 °	′	″	Zeig. 2 ′	″	Mittel °	′	″	Richtgen. °	′	″	Mittel d. R. Richtungswinkel °	′	″	Bemerkung	w	v	vv
Festungsturm	0	01	10	01	10	0	01	12	0	0	0	0	0	0		0	−1	1
	180	01	10	01	20							*318*	*50*	*(59)*	Gewicht			
Thierberg T.	23	56	15	56	20	23	56	19	23	55	07	23	55	14	$\frac{3}{4}$	+7	+6	36
	203	56	10	56	30							*342*	*46*	*09*				
Kufstein 6	318	31	20	31	25	318	31	21	318	30	09	318	30	08		−1	−2	4
	138	31	15	31	25							*277*	*21*	*14*				
Kufstein 9	337	01	40	01	30	337	01	35	337	00	23	337	00	21		−2	−3	9
	157	01	30	01	40							*295*	*51*	*18*		+4	0	50
															$o' =$	+1		
Satz 2.																		
Festung	240	02	20	02	20	240	02	17	0	0	0					0	−1	1
	60	02	10	02	20													
Thierberg	263	57	30	57	50	263	57	32	23	55	15					−1	−2	4
	83	57	30	57	20													
Kufstein 6	198	32	20	32	35	198	32	25	318	30	08					0	−1	1
	18	32	25	32	20													
Kufstein 9	217	02	30	02	40	217	02	34	337	00	17					+5	+4	16
	57	02	35	02	30											+4	0	22
															$o'' =$	+1		
Satz 3.																		
Festung	120	00	50	00	50	120	00	53	0	0	0					0	+2	4
		01	05	00	50													
Thierberg	143	56	20	56	00	143	56	12	23	55	19					−5	−3	9
		56	00	56	30													
Kufstein 6	78	31	00	31	00	78	31	00	318	30	07					+1	+3	9
		31	00	31	00													
Kufstein 9	97	01	20	01	10	97	01	17	337	00	24					−3	−1	1
		01	15	01	25											−7	+1	23
															$o''' =$	−2		
																$[vv] = 95$		
																$m = \sqrt{\frac{95}{2 \cdot 3}} = \pm 4{,}0''$		
																$\mu = \frac{m}{\sqrt{3}} = \pm 2{,}3''$		

Zeigers in einer Fernrohrlage unverändert beibehalten werden. Wurden an zwei diametralen Zeigern z. B. jeweils Vielfache von Doppelsekunden oder Doppelminuten abgelesen, so ist die Summe der beiden Ablesungen sogleich das Mittel der zwei Ablesungen in Sekunden oder Minuten. Fügt man irgend eine Konstante zu jedem einzelnen „Mittel" hinzu, dann erhält man die „Richtungen". Meistens nimmt man hierbei eine der n Richtungen, z. B. die erste, willkürlich als Nullrichtung, so daß dann das „Mittel" dieser Richtung von allen übrigen Mitteln subtrahiert werden muß.

Bei festem Instrumentenstande und deutlichen Zielpunkten, die ohne größeren Zeitverlust angezielt werden können, dürfen unbedenklich etwa 10 Zielpunkte in einem Satze vereinigt werden, ohne daß zu befürchten ist, daß während der Messung größere Verdrehungen des Horizontalkreises eintreten. Durch die satzweise Winkelmessung werden demnach sogleich verhältnismäßig viele Winkel gefunden.

Durch Messung mehrerer Richtungssätze wird die Genauigkeit erhöht. Damit die Fehler der Kreisteilung möglichst unschädlich werden, verdreht man den Limbus (ev. durch Verdrehen und Neuaufstellen des ganzen Theodoliten) vor der Messung jedes neuen Satzes. Sind z. B. $a = 2$ Zeiger vorhanden und sollen s Sätze gemessen werden, so verdreht man den Kreis nach jedem Satze annähernd um $\frac{360^0}{a \cdot s}$; bei $s = 2$ also um etwa 90^0. Vor Beginn der Messung jedes neuen Satzes muß die Alhidadenachse wieder hinreichend scharf lotrecht gerichtet werden. Die Messung erfolgt wieder in der oben beschriebenen Weise. Bei der Berechnung werden die „Richtungen" meist auf die gleiche Nullrichtung bezogen, dann werden aus den s einzelnen Richtungen für jeden Zielpunkt die „Mittel der Richtungen" berechnet, die weiterhin als Ergebnis der Richtungsmessungen zur Verwendung gelangen.

Zur Beurteilung der Genauigkeit dieser „Mittel der Richtungen" berechnet man deren mittleren Fehler μ (Standfehler).

Bezeichnen:

$r_1' \; r_2' \; r_3' \ldots r_n'$ die Richtungen des 1. Satzes
$r_1'' \; r_2'' \; r_3'' \ldots r_n''$ „ „ „ 2. „
$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$
$r_1^{(s)} \; r_2^{(s)} \; r_3^{(s)} \ldots r_n^{(s)}$ „ „ „ s. „

} nach den Zielpunkten 1, 2 ... n,

s die Anzahl der Sätze, n die Anzahl der Richtungen und

$R_1 \; R_2 \; R_3 \ldots R_n$ die „Mittel der Richtungen",

also z. B.

$$R_n = \frac{r_n' + r_n'' + \cdots r_n^{(s)}}{s} = \frac{[r_n]}{s}, \tag{1}$$

so erhält man durch Vergleichen der Werte R mit den Beobachtungen r die Widersprüche w in den einzelnen Sätzen zu

$$\left.\begin{array}{lllllllll} w_1' = R_1 - r_1'; & w_1'' = R_1 - r_1''; & \ldots; & w_1^{(s)} = R_1 - r_1^{(s)}, \\ w_2' = R_2 - r_2'; & w_2'' = R_2 - r_2''; & \ldots; & w_2^{(s)} = R_2 - r_2^{(s)}, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots & & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ w_n' = R_n - r_n'; & w_n'' = R_n - r_n''; & \ldots; & w_n^{(s)} = R_n - r_n^{(s)}, \end{array}\right\} \tag{2}$$

und es folgt aus (1) und (2)

$$w_1' + w_1'' + \cdots + w_1^{(s)} = [w_1] = 0; \quad [w_2] = 0; \quad \ldots; \quad [w_n] = 0. \tag{2a}$$

(Rechenprobe.)

Im allgemeinen weicht für jeden einzelnen Satz die Summe der Widersprüche (gegen den Satz R) also z. B. $w_1' + w_2' + \cdots + w_n' = [w']$ von Null ab, und da (nach § 5) die Summe der Abweichungen vom arithmetischen Mittel, das im vorliegenden Falle durch den Richtungssatz R vorgestellt wird, zu Null werden muß, so sind auch die einzelnen w im allgemeinen noch nicht die Fehler v der beobachteten Richtungen. Um diese Fehler zu finden müßte deshalb der 1. Satz zunächst um den Winkel

$$o' = \frac{w_1' + w_2' + \cdots w_n'}{n} = \frac{[w']}{n}; \quad \text{der 2. Satz um } o'' = \frac{[w'']}{n} \text{ usw.} \tag{3}$$

verdreht werden. Mit diesen neuen Richtungen $r' + o'$, $r'' + o''$ usw. werden dann nach den Gleichungen (2), in denen $r' + o'$, $r'' + o''$ usw. an die Stelle von r', r'' usw. tritt, die Beobachtungsfehler v der einzelnen Richtungen erhalten. Wie man hiebei sofort sieht, erhält man diese jedoch einfacher durch

$$\left.\begin{array}{llll} v_1' = w_1' - o'; & v_1'' = w_1'' - o''; & \cdots & v_1^{(s)} = w_1^{(s)} - o^{(s)} \\ v_2' = w_2' - o'; & v_2'' = w_2'' - o''; & & v_2^{(s)} = w_2^{(s)} - o^{(s)} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots & & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ v_n' = w_n' - o'; & v_n'' = w_n'' - o''; & & v_n^{(s)} = w_n^{(s)} - o^{(s)} \end{array}\right\} \tag{4}$$

und auch die Rechenproben

$$v_1' + v_1'' + \cdots v_1^{(s)} = [v_1] = 0; \quad [v_2] = 0; \cdots [v_n] = 0 \tag{4a}$$

und

$$v_1' + v_2' + \cdots v_n' = [v'] = 0; \quad [v''] = 0; \cdots [v^{(s)}] = 0 \tag{4b}$$

ergeben sich leicht aus den Gleichungen (1) bis (4).

Der mittlere Fehler $\mathfrak{m}$ einer einmal beobachteten Satzrichtung (Mittel aus 2 Anzielungen) wird

$$\mathfrak{m} = \sqrt{\frac{[v\,v]}{(s-1)(n-1)}}. \tag{5}$$

(Von den $n \cdot s$ Beobachtungen müssen zur Bestimmung sämtlicher Unbekannten, das sind n Richtungen im ersten Satze und in jedem weiteren Satze je eine Richtung, also im ganzen $n + s - 1$ Richtungen auf dem Limbus gemessen werden. Die Anzahl der überschüssigen Messungen (der Nenner in Gleichung (5), siehe § 5) ist demnach $n \cdot s - (n + s - 1) = (s - 1)(n - 1)$.) Der mittlere Fehler des „Mittels der Richtungen", das aus s solchen Satzrichtungen berechnet wird, ist deshalb nach § 5:

$$\mu = \frac{\mathfrak{m}}{\sqrt{s}}. \tag{6}$$

Die Berechnung dieses Standfehlers μ kann leicht am Rande des Formulars, wie im obigen Zahlenbeispiel (Seite 59) gezeigt ist, ausgeführt werden.

§ 27. Winkelmessung durch Repetition.

Zu der im folgenden beschriebenen Messungsart braucht man einen berichtigten Repetitionstheodolit, dessen Limbusachse zentrisch über dem Winkelscheitel hinreichend scharf lotrecht gerichtet ist. Durch Repetition wird der n (2, 4, 6 . .) fache Winkel gemessen.

Behufs Messung des Winkels w zwischen den beiden Zielpunkten L und R (Fig. 67) wird nach Festklemmung der Alhidade zuerst L durch Drehen der Limbusfeinstellschraube scharf angezielt und dann wird auf dem Kreise a_0 abgelesen. Nach Lösen der Alhidadenklemme wird hierauf R durch Drehen der Alhidade scharf angezielt, worauf auf dem Kreise a_1 abgelesen wird, so daß also

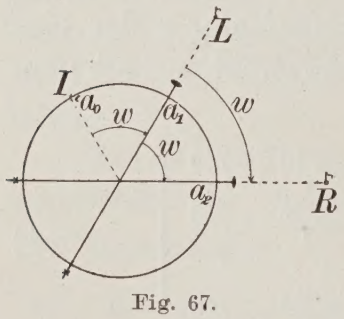


Fig. 67.

$$w = a_1 - a_0. \tag{1}$$

Zielt man nun L nach dem Lösen der Limbusklemme durch Drehen des Limbus (mitsamt der Alhidade) wie oben wieder an, dann bleibt die Kreisablesung a_1 unverändert, der Teilkreispunkt a_0 kommt aber dadurch um den Winkel w nach links zum Punkte I der Fig. 67. Löst man deshalb die Alhidade und zielt durch deren Drehen (wie oben) R an, dann wird die Kreisablesung

$$a_2 = a_0 + 2w \quad \text{oder} \quad w = \frac{a_2 - a_0}{2}. \tag{2}$$

In dieser Weise kann beliebig fortgefahren werden; durch die nächste Repetition erhielte man z. B. den dreifachen, durch eine weitere Repetition den vierfachen Winkel. Man findet aber leicht, daß der auf diese Weise gemessene Winkel w wegen der Wirkung des Ziellinienfehlers, der Kippachsenneigung und der Fernrohrexzentrizität etwas fehlerhaft ausfällt. Unter der Annahme, daß die Limbus- und Alhidadenachse parallel sind, kann diese Fehlerwirkung durch Messung des Winkels in derselben Weise wie oben, aber nach vorherigem Durchschlagen des Fernrohres, wodurch die genannten Fehler entgegengesetzt wirken, und Mittelbildung unschädlich gemacht werden. Man schlägt deshalb das Fernrohr nach der Messung des zwei (drei, vier ...) fachen Winkels durch und zielt, damit die Kreisablesung a_2 (a_3, a_4 ...) keine Veränderung erleidet, durch Drehen um die Limbusachse zunächst wieder L an. Nach den anschließenden zwei (drei, vier ...) Repetitionen wird die Kreisablesung a_4 (a_6, a_8 ...) erhalten und es wird deshalb

$$w = \frac{a_4 - a_0}{4} \left(\text{bzw. } \frac{a_6 - a_0}{6} ; \quad \frac{a_8 - a_0}{8} \right). \tag{3}$$

Der Winkel w ist hier durch vierfache Repetition (durch zwei Repetitionen in jeder Fernrohrlage) gemessen.

Die Zwischenablesungen a_1, a_2, a_3 sind demnach nicht notwendig und man liest deshalb meist nur a_1 behufs Bestimmung des genäherten Winkels roh ab und stellt auch häufig a_0 nahezu auf Null ein.

Damit sich während der Messung Limbus- und Alhidadenkreis unbeabsichtigt nur um möglichst kleine Beträge verdrehen können, müssen die Klemmen stets gut angezogen und die Kreise bei der Drehung an gegenüberstehenden Stellen geführt werden. Außerdem soll die Drehung der Kreise stets im gleichen Sinne erfolgen (auch bei der Feineinstellung), um weiterhin kleine während der Messung eintretende unbeabsichtigte Verdrehungen der beiden Kreise durch Messen des Ergänzungswinkels und Abgleichen der beiden Winkel auf 360° unschädlich machen zu können.

Da die Ablesungsdifferenz bei der Repetitionsmessung mit 2, 4, 6 ... dividiert wird, so kann durch diese Meßart mit Theodoliten mit verhältnismäßig ungenauen Ablesevorrichtungen ein Winkel verhältnismäßig (etwa auf einzelne Sekunden) scharf gemessen werden. Zur Probe und zur Erhöhung der Genauigkeit mißt man zweckmäßig stets die Winkel $L \cdot O \cdot R$ und $R \cdot O \cdot L$ in gleicher Weise und gleicht ihre Summe auf 360° ab. Da die Kreisablesungen auch nach Lösen

der Limbusklemme und Verdrehen des Limbus (in bequemer Körperlage) gemacht werden können, so ist die Repetitionsmessung an räumlich beschränkten Aufstellungsorten (in Gruben u. dgl.) leicht anwendbar. Die Messungszahlen können leicht in die gleiche Tabelle wie bei der Satzmessung eingeschrieben werden.

Die Messung eines Winkels durch 6fache Repetition (dreifach in jeder Fernrohrlage) und seine Berechnung ist im folgenden Beispiele nach dem Gesagten leicht verständlich; der sechsfache Ergänzungswinkel $340^0\ 15'\ 15''$ müßte zunächst noch um ein Vielfaches von 360^0 vergrößert werden, einfacher ist es jedoch den sechsten Teil von $340^0\ 15'\ 15''$ um ein Vielfaches von $\frac{360^0}{6}$ zu vergrößern, um den Winkel w zu erhalten.

Standpunkt ⛢ Lucklum süd, zentrisch.

Fernrohrlage $\frac{1}{2}$. (30″ Nonientheodolit.)

Zielpunkt	Zeiger 1			Zeig. 2		Mittel			Richtgen.			Mittel d. R. Richtungswinkel			Bemerkung	w v vv
	°	′	″	′	″	°	′	″	°	′	″	°	′	″		
Erkerode exz.	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0		
⟨	(3	18)														
„ zentr.						19	45	15	3	17	22	3	17	25	± 3″	+ 3
(6 fach)	19	45	15	45	15											
				6 w =		19	44	15								
Erkerode zentr.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0					
Erkerode exz.	(356	42)				340	15	15	356	42	32					+ 3
(6 fach)	340	15	15	15	15											
				6 w =		340	15	15	359	59	54					+ 6

§ 28. Messung von Vertikalwinkeln.

Damit der Theodolit zur scharfen Messung von Höhenwinkeln brauchbar ist, muß in Richtung des Höhenkreises eine empfindliche Röhrenlibelle vorhanden sein, deren Teilwert sich nach der Ablesegenauigkeit auf dem Höhenkreis richtet und im allgemeinen etwa 10″

beträgt. Als Höhenlibelle dient entweder die an der drehbaren Höhenalhidade angebrachte Versicherungslibelle L_2 (Fig. 57) oder eine in irgend einer Verbindung mit der festen Höhenalhidade stehende Libelle wie z. B. L_1 (Fig. 57) und in besonderen Fällen eine am Fernrohr befestigte Nivellierlibelle L_3. Der Höhenkreis kann in verschiedener Weise beziffert werden; im folgenden wird er rechtsinnig durchlaufend beziffert angenommen. Die bei anderer Bezifferung zur Kenntnis des gemessenen Winkels führende Berechnung ist bei Beachtung des Folgenden leicht selbst zu finden.

Der hinreichend berichtigte Theodolit (siehe § 25) wird über dem Punkte, auf dem die Höhenwinkel nach anderen Punkten gemessen werden sollen, zentrisch aufgestellt und die Umdrehachse mit Hilfe einer Röhrenlibelle sehr genähert lotrecht gerichtet. Die eigentliche Messung kann dann in verschiedener Weise erfolgen.

A. Messung der doppelten Zenitdistanz.

Bei scharf einspielender Höhenlibelle wird der Zielpunkt z. B. bei Höhenkreis links der Zielung mit dem horizontalen Faden scharf eingestellt und hierauf wird (in irgendeiner Lage der Höhenkreisebene) auf dem Höhenkreis abgelesen l (Mittel diametraler Zeigerablesungen). Nach Durchschlagen des Fernrohrs und Drehung des Aufbaus um die vertikale Umdrehachse um 180^0 wird wieder bei scharf zum Einspielen gebrachter Höhenlibelle der Zielpunkt scharf eingestellt. Dadurch ist der Höhenkreis auf die rechte Seite der Zielung gelangt, seine Ablesung sei r. Bei vorhandener drehbarer Höhenlibellenalhidade wird deren Libelle bei der Messung zweckmäßig mit der auf erstere wirkenden Feinstellschraube m_3 der Fig. 57 vor oder nach dem scharfen Anzielen des Punktes zum scharfen Einspielen gebracht; eine zu einer festen Höhenalhidade gehörende Libelle z. B. L_1 der Fig. 57 aber muß mit Hilfe einer möglichst in der Zielrichtung liegenden Fußschraube des Theodolits vor dem scharfen Anzielen des Punktes zum scharfen Einspielen gebracht werden.

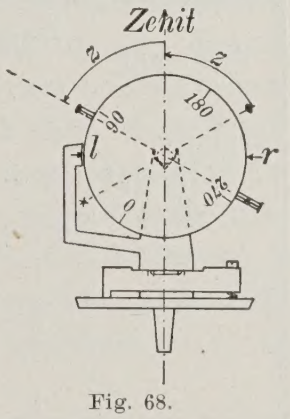


Fig. 68.

Den der Differenz der Ablesungen l und r entsprechenden Winkel kann man sich dadurch entstanden denken, daß das in der Kreislage links nach dem Zielpunkte gerichtete Fernrohr nach der Drehung um die lotrecht stehende Umdrehachse um 180^0 zunächst bis zum Zenit, also um die Zenitdistanz z (Fig 68), gekippt wird, und hierauf in der gleichen Richtung um die Zenitdistanz z weiter, bis in der Kreislage rechts der Punkt wieder angezielt

ist. Ist deshalb Z_0 diejenige Höhenkreisablesung, bei der das Fernrohr bei einspielender Höhenlibelle nach dem Zenit gerichtet ist, so folgt

$$z = l - Z_0 \tag{1}$$

und

$$z = Z_0 - r. \tag{2}$$

Durch Addieren und Subtrahieren dieser beiden Gleichungen erhält man

$$2z = l - r \quad \text{oder} \quad z = \frac{l - r}{2} \tag{3}$$

und

$$2Z_0 = l + r. \tag{4}$$

Bei der Höhenwinkelmessung nach festen Zielpunkten ist deshalb die Bestimmung von Z_0, d. i. der jeweiligen Lage des Zenitpunktes am Höhenkreise überflüssig. Wenn aber nach veränderlichen Zielpunkten Höhenwinkel gemessen werden sollen, so ermittelt man mit einigen festen Zielpunkten zuerst nach Gleichung (4) den jeweiligen Wert Z_0, so daß sich dann mit den jedesmaligen Kreisablesungen l und r, die den Zielungen nach den bewegten Zielpunkten entsprechen, die zugehörigen Zenitdistanzen nach den Gleichungen (1) und (2) ergeben. Ist der Höhenkreis widersinnig beziffert, dann tauschen in den Gleichungen (1) bis (4) l und r die Plätze.

Die Ablesungen können in das bei der Horizontalwinkelmessung verwendete Formular, dessen Überschriften ev. handschriftlich ergänzt werden, in der aus dem Zahlenbeispiel ersichtlichen Weise eingeschrieben werden.

Standpunkt Lucklum süd, zentrisch. Kippachsenhöhe 1,18.

Kreislage $\frac{l}{r}$. (10″ Nonien.)

Zielpunkt	Zeiger 1			Zeig. 2		Mittel			$2z = l - r$			Mittel der z			Bemerkung	w	v	vv
	°	′	″	′	″	°	′	″	°	z ′	″							
Schloß, Knopf	174	13	20	11	50	174	12	35	168	10	03				Mitte			
	6	04	10	00	55	6	02	32	84	05	01							
B																		

Durch Wiederholung der Messung erzielt man schärfere Ergebnisse. Wenn der Höhenkreis auf der Kippachse verdrehbar eingerichtet ist, verdreht man ihn nach jedem Satze (Messung nach n Punkten) um

etwa $\frac{360^0}{a \cdot s}$ (vgl. Seite 60). Sehr feine Höhenlibellen bringt man häufig nicht zum scharfen Einspielen, weil dies viel Zeit erfordert, sondern man liest den jeweiligen Stand der Libellenblase ab und korrigiert die zugehörige Höhenkreisablesung um den entsprechenden Ausschlagwinkel (s. § 139).

B. Messung der einfachen Zenitdistanz.

Bei weniger scharfen Höhenwinkelmessungen stellt man die Hilfsgröße Z_0 (Gleichung (1) und (2)) zweckmäßig durch Verändern der Höhenalhidade (oder Drehen des Höhenkreises auf der Kippachse) auf Null (oder 90^0) ein, damit die Ablesungen l bzw. r nach Gleichung (1) und (2) unmittelbar die Zenitdistanzen (oder Höhenwinkel) geben. Diese sog. Beseitigung des Höhenindexfehlers erfolgt dadurch, daß man zunächst mit Gleichung (3) eine Zenitdistanz nach einem festen Zielpunkt bestimmt und hierauf z. B. die Höhenkreiszeiger so lange verstellt bis schließlich bei scharf einspielender Höhenlibelle (und lotrecht stehender Umdrehachse) und scharf angezieltem Punkte die vorher gemessene Zenitdistanz abgelesen wird.

C. Messung von Zenitdistanzen bzw. Höhenwinkeln unter Benützung der Nivellierlibelle.

Häufig ist an kleinen Instrumenten nur ein Höhenbogen (kein Vollkreis) und eine Nivellierlibelle am Fernrohre vorhanden. Etwa nach § 20 werden zunächst die Achse der Nivellierlibelle und die Fernrohrziellinie parallel gestellt, entweder durch Drehen an den Korrektionsschräubchen der Libelle oder durch Heben bzw. Senken des Fadenkreuzes, wenn dadurch kein Entstehen eines Kollimationsfehlers zu befürchten ist. Wird dann mit einem solchen Instrument, dessen Umdrehachse angenähert lotrecht gerichtet und dessen Höhenbogen nach Zenitdistanzen beziffert ist, ein Punkt angezielt und hierauf am Höhenbogen a z. B. $= 97^0 12'$ abgelesen, so findet man den Höhenwinkel, indem man die der horizontalen Zielung entsprechende Ablesung a_0 mit a vergleicht. Kippt man deshalb nach der Ablesung a das Fernrohr, bringt die Nivellierlibelle zum Einspielen und liest hierauf $a_0 = 90^0 05'$ ab, so ist die Zenitdistanz nach Gleichung (1), da $Z_0 = a_0 - 90^0$,

$$z = a - (a_0 - 90^0) = 97^0 12' - 5' = 97^0 07'.$$

Wenn auf einem Standorte des Instrumentes viele Höhenwinkel zu messen sind, ist es vorteilhaft, den (oder die) Höhenzeiger derart

zu stellen, daß bei scharf lotrecht stehender Umdrehachse und horizontaler Fernrohrzielung (einspielender Nivellierlibelle) $a_0 = 90^0\,0'$ abgelesen wird (Beseitigen des Indexfehlers), weil dann weiterhin bei scharf lotrecht gestellter Umdrehachse die Höhenbogenablesungen sogleich die Zenitdistanzen sind.

4. Kapitel.

Einige Magnetinstrumente.

§ 29. Die magnetische Mißweisung. Streichwinkel, Richtungswinkel und Azimut.

Die Verwendbarkeit der Magnetinstrumente zur Richtungs- bzw. Winkelbestimmung beruht darauf, daß sich die magnetische Achse eines in der Horizontalebene frei drehbaren Magneten stets in die Richtung der Horizontalprojektion der magnetischen Induktionslinien einstellt. Da die Erde sich ungefähr wie ein sie durchdringender großer Magnet verhält, dessen Südpol in der Nähe des Nordpols der Erde liegt, so verlaufen die magnetischen Induktionslinien auf der Erdoberfläche im allgemeinen von Süden nach Norden, und den vom Nordpunkte des astronomischen Meridians aus nach Westen oder Osten gezählten Winkel zwischen dem astronomischen Meridian und der Induktionslinienrichtung (magnetischer Meridian) bezeichnet man als westliche oder östliche magnetische Mißweisung (Deklination).

Da die Induktionslinienrichtung sich mit der Zeit ändert, so ändert sich am gleichen Orte auch beständig die magnetische Mißweisung. Sie ändert sich in Deutschland bei hohem Sonnenstande im Laufe des Tages um etwa 12′ und im Winter um etwa 3′ (tägliche Variation) in der Weise, daß etwa um 8 Uhr vormittags das Nordende des Magneten am weitesten nach Osten und um 2 Uhr mittags am weitesten nach Westen zeigt. Von da ab kehrt die Magnetdrehung um, etwa um 6 Uhr abends erreicht der Magnet wieder die Mittellage zwischen den extremen Werten und etwa um 8 Uhr vormittags wieder angenähert dieselbe Lage wie am vorhergehenden Tage. Anfang Januar 1910 betrug z. B. in Braunschweig das Tagesmittel der Mißweisung etwa $10^0\,8{,}6'$ westlich und nimmt gegenwärtig im Jahre um etwa 4′ ab. Diese jährliche Änderung ist aber nicht gleichmäßig, denn der Magnet wird sich nach Erreichung eines größten östlichen Standes zuerst langsam, dann rascher und hierauf wieder langsamer nach Westen drehen bis zum größten westlichen Stand, dann wieder umkehren usw. (säkulare Änderung der Mißweisung). Außer den be-

schriebenen Änderungen hat man erhebliche Mißweisungsänderungen bis zu einigen Graden bei sog. magnetischen Gewittern, bei Nordlichtern und Sonnenfackeln beobachtet; ganz unregelmäßige Änderungen entstehen bei örtlichen Veränderungen der magnetischen Induktionslinien durch magnetisches Gestein u. dgl.

Aus dem Gesagten folgt, daß sich diejenigen Kurven auf der Erde, welche die Punkte gleicher Mißweisung zu einer bestimmten Zeit verbinden (Isogonen), im Laufe der Jahre verschieben. Da Karten mit diesen Kurven für die Schiffahrt wichtig sind, so werden sie von Zeit zu Zeit veröffentlicht.

Mit Magnetinstrumenten wird der Streichwinkel, der Richtungswinkel und das Azimut einer von einem Punkt ausgehenden Richtung ermittelt. Als Streichwinkel N der Richtung OP (siehe Fig. 69) bezeichnet man den Horizontalwinkel zwischen der (etwas veränderlichen) magnetischen Nordrichtung On und der Richtung OP. Derjenige Winkel α, um den die durch O gelegte Parallele zur $+X$ Achse eines Koordinatensystems rechtsinnig gedreht werden muß um in die Richtung OP zu gelangen, heißt Richtungswinkel. Fällt die Richtung OX mit dem Nordzweig des astronomischen Meridians von O zusammen, dann geht der Richtungswinkel in das Azimut über.

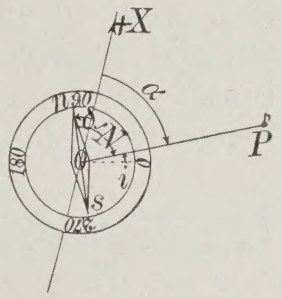


Fig. 69.

Mit den Magnetinstrumenten werden unmittelbar die Streichwinkel gemessen, aus denen (an Sommertagen) ohne Rücksichtnahme auf die tägliche Variation mit einem sich reibungslos drehenden Magneten nach dem Obigen auf etwa $\pm 0{,}1^0$ richtige Richtungswinkel gefunden werden. Die Streichwinkel ergeben sich bei den im folgenden behandelten Instrumenten entweder

1. aus Ablesungen der Magnetnadelenden auf einem geteilten Vollkreise, der jede Drehung der Ziellinie (im horizontalen Sinne) mitmacht — Vollkreisbussole — oder
2. aus Zeigerablesungen auf einem feststehenden Horizontalkreise, dessen Nullrichtung mit Hilfe einer Orientierbussole in eine bekannte Lage zur magnetischen Nordrichtung gebracht ist — Orientierbussole.

Als Orientierbussole kann deshalb eine auf die Kippachse eines Theodolits aufsetzbare Bussole, oder eine irgendwo auf der Alhidade eines einfachen oder auch am Limbus eines Repetitionstheodoliten befestigte Bussole dienen. Hierbei kann der Magnet auch in eine Röhre eingeschlossen werden (Röhrenkompaß.)

§ 30. Die Vollkreisbussole.

Die Einrichtung der Bussoleninstrumente ist mit Rücksicht auf die Zwecke, denen sie dienen sollen, verschieden. Auf alle Fälle müssen sie bis auf den Magnet und seine Unterstützung aus unmagnetischem Material gefertigt sein. Das in Fig. 53, S. 47, abgebildete Instrument ist ein zur Horizontal- und Vertikalwinkelmessung (und Entfernungsmessung) dienender Theodolit, der mit einer Vollkreisbussole auf der Alhidade ausgerüstet ist. Solange Horizontalwinkel nur aus Ablesungen an der Magnetnadel gefunden werden sollen, ist der Theodolithorizontalkreis entbehrlich; er wird gebraucht, wenn die Bussole als Orientierbussole wie in § 32 verwendet werden soll, wobei dann Nord- und Südende der Magnetnadel abwechselnd auf die passenden Teilstriche (Null bzw. 180°) eingestellt werden (unter Benutzung des Zielfernröhrchens als Mikroskop. Zu diesem Zwecke wird durch ein feines im Objektivdeckel angebrachtes Schauloch durch das Fernrohr hindurch auf die Bussolenteilung gesehen). Die eigentliche Bussole besteht (Fig. 70) aus dem Gehäuse G mit dem geteilten Kreise TT, dem Magnet ns, seiner Unterstützung, der stählernen Pinne P und der Deckplatte (Glas) D. Damit die feine Pinnenspitze geschont wird, muß vor jedem Transport mit Hilfe der Arretierungsvorrichtung A der Magnet von der Pinne abgehoben werden. Damit eine kräftige magnetische Dämpfung der Magnetschwingungen eintritt, soll das Gehäuse kräftig (aus Kupfer oder Messing) gebaut sein; auch durch Hochkantstellen des Magnetes wird eine Luftdämpfung ermöglicht. Damit die Stellung der Magnetenden auf der Teilung ev. unter Benutzung einer Lupe scharf abgelesen werden kann, müssen die Magnetenden ns und die Pinnenspitze in der horizontalen Teilungsebene liegen. Durch ein kleines Staniolreiterchen R (ev. ein bischen Wachs) kann deshalb der Magnet balanziert werden. Der Magnet, von meist 6 bis 12 cm Länge, muß aus magnetisch gutem Material gefertigt sein, damit er sich stark magnetisieren läßt und seinen Magnetismus möglichst lange behält, um häufigeres Nachmagnetisieren zu ersparen; er besitzt in der Mitte ein aus hartem Mineral (möglichst Saphir) gefertigtes Hütchen und sein Nordende n ist regelmäßig auffallend bezeichnet.

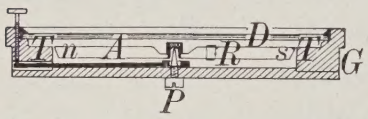


Fig. 70.

Die Bussolenteilung T ist entsprechend der Magnetlänge bis auf 1^0 oder $^1/_2{}^0$ ausgeführt und widersinnig von 0^0 bis 360^0 beziffert, weil beim Gebrauche der Index (Magnetenden) fest bleibt und die Teilung sich dreht. Aus dem in § 21 Gesagten ergibt sich leicht, daß die durch exzentrische Lage des Magnetdrehpunktes gegen den

Teilkreismittelpunkt und die wegen etwaiger Knickung des Magneten verursachten Fehler durch Ablesung am Nord- und Südende des Magneten und Mittelbildung unschädlich werden. Vor jeder Magnetablesung muß das ganze Instrument durch leichtes Klopfen mit einer Fingerspitze auf die Mitte der Deckplatte oder durch leichtes Kratzen mit dem Fingernagel am geränderten Knopfe einer Schraube etwas erschüttert werden, damit die kleinen Reibungswiderstände zwischen Magnet und Pinne leichter überwunden werden können. Selbstverständlich darf kein magnetisches Material (z. B. eiserne Drähte in steifen Hüten) das freie Spiel des Magneten stören. Nach vielfachen Versuchen liegt der mittlere Einstellfehler eines guten Magneten zwischen $\pm 2'$ und $\pm 6'$.

Die Bussole des Fig. 53 abgebildeten Instruments ist in eine passende Eindrehung der Alhidadenscheibe des Theodoliten eingesetzt und in dieser derart verstellbar, daß die Nullinie der Bussolenteilung nahezu mit der Zielebene des Fernrohrs zusammenfällt. Mit Hilfe von Kreuzlibellen (ev. einer Dosenlibelle) kann der Umdrehzapfen der Bussole lotrecht gerichtet werden. Durch Anbringen der Nivellierlibelle (hier Doppelschlifflibelle) auf dem Fernrohr und eines Höhenkreises wird das Instrument zum Nivellieren und Höhenwinkelmessen brauchbar.

Mitunter liegt auch an Bussoleninstrumenten die Zielvorrichtung exzentrisch zur Umdrehachse. Der Einfluß dieser Exzentrizität wird dann (wenn nötig) durch Durschlagen der Zielvorrichtung nach der ersten Messung, Wiederholen der Messung in dieser zweiten Lage der Zielvorrichtung und Mittelbildung unschädlich gemacht.

Prüfung und Berichtigung.

Damit die Ziellinie beim Kippen stets eine vertikale Ebene beschreibt, muß

1. die vertikale Umdrehachse mit Hilfe der Kreuzlibellen nach § 19 lotrecht gerichtet werden,
2. die Ziellinie durch Seitwärtsverschieben des Fadenkreuzes nach § 24, 1. A senkrecht zur Fernrohrkippachse gerichtet werden und dann
3. die Fernrohrkippachse nach § 24, 3 senkrecht zur Umdrehachse, also horizontal, gerichtet werden durch Heben oder Senken eines Kippachsenlagers.

Wenn diese drei Berichtigungen ausgeführt sind, können mit der Bussole nach § 31 richtige Richtungswinkel in einer Fernrohrlage gemessen werden. Sollen mit dem Instrument auch Höhen entweder durch Nivellieren oder aus gemessenen Höhenwinkeln bestimmt werden, dann ist außerdem

4. die Achse der Nivellierlibelle durch Heben oder Senken eines ihrer Enden nach § 20 parallel zur Ziellinie zu richten und
5. ev. der Höhenindexfehler nach § 28 zu beseitigen, so daß bei einspielender Höhenlibelle (Alhidadenlibelle in Richtung des Höhenkreises) und bei einspielender Nivellierlibelle (wodurch die Ziellinie horizontal liegt) am Höhenkreis 90^0 (ev. 0^0) abgelesen wird.

§ 31. Messung von Streich- bzw. Richtungswinkeln mit der Vollkreisbussole.

Die Messungen werden in der Regel nur in einer Fernrohrlage gemacht, weshalb im folgenden ein nach § 30 vollständig berichtigtes Instrument mit zentrischer Visiervorrichtung vorausgesetzt wird.

Die Ablesungen an den Magnetenden müssen um eine Größe k verbessert werden, um sie in Richtungswinkel überzuführen. Zur Bestimmung dieser Verbesserung muß der Richtungswinkel α einer Geraden $O.P$ (Fig. 69, S. 69) gegeben sein. Die Bussole wird dann z. B. zentrisch über O aufgestellt und ihre Umdrehachse hinreichend scharf lotrecht gerichtet. Nach Lösen der Magnetarretierung wird hierauf P angezielt und dann (nach leichtem Beklopfen) am Nordende des Magneten n und am Südende s abgelesen. Folglich ist

$$N = \frac{n + (s \pm 180^0)}{2} \tag{1}$$

der Winkel zwischen der magnetischen Südnordrichtung und der Nullrichtung des Teilkreises. Bezeichnen i den Winkel zwischen dieser Nullrichtung und der Zielebene des Fernrohres und δ den Winkel zwischen der Richtung der $+X$-Achse und der magnetischen Südnordrichtung, beide im Sinne der Kreisbezifferung (widersinnig) positiv genommen, dann ist, wenn jetzt in Fig. 69, S. 69, der Winkel oOn mit N bezeichnet wird:

$$\alpha = N - (\delta + i) = N + k \tag{2}$$

oder

$$k = -(\delta + i) = \alpha - N. \tag{3}$$

Diese Verbesserung k ist wegen der Veränderlichkeit der Mißweisung δ mit der Zeit etwas veränderlich. Die zu einer bestimmten Zeit zu benutzende Verbesserung kann deshalb zwischen zwei benachbarten Werten von k passend eingeschaltet werden (siehe § 29).

Durch Verdrehen des Bussolengehäuses in der Alhidadenscheibe der Fig. 53 kann k zu Null gestellt werden.

Zur Bestimmung des Richtungswinkels irgend einer Geraden $\overline{P_1 P_2}$ wird die Bussole z. B. in einem der Endpunkte, etwa in P_1, in der gleichen Weise wie vorher in O zentrisch usw. aufgestellt, der andere

Endpunkt P_2 angezielt und dann am Magneten abgelesen n_1 und s_1. Ist α_1 der gesuchte Richtungswinkel der Strecke $\overline{P_1 P_2}$, k die Korrektion der Magnetablesung, so ist nach Gleichung (2):

$$\alpha_1 = N_1 + k, \quad \text{wobei} \quad N_1 = \frac{n_1 + (s_1 \pm 180^0)}{2}. \tag{4}$$

Zahlenbeispiel: Mit dem in Fig. 53 abgebildeten Instrumente wurde gefunden

$$n = 342{,}1^0, \quad s = 162{,}1^0 \quad \text{wobei} \quad \alpha = 330{,}60^0,$$

folglich $k = 330{,}60 - 342{,}10 = -11{,}50^0$ (westlich).

Unmittelbar darauf wurde gemessen:

$$n_1 = 69{,}7^0, \quad s_1 = 249{,}8^0;$$

folglich $\alpha_1 = 69{,}75 - 11{,}50 = 58{,}25^0$.

§ 32. Die Orientierbussole und ihr Gebrauch. Der Röhrenkompaß.

Wie schon in § 30 angedeutet wurde, kann eine Vollkreisbussole auch als Orientierbussole dienen, wenn ein zweiter geteilter Horizontalkreis vorhanden ist. Meist sind aber die Orientierbussolen in ein langes schmales Gehäuse, ev. eine Röhre, eingeschlossen und besitzen nur wenige Teilstriche oder eine sonstige Vorrichtung, durch die eine bestimmte Richtung des Gehäuses in die magnetische Südnordrichtung gebracht werden kann.

Eine auf die Kippachse K des berichtigten Theodoliten (Fig. 54) wie eine Kippachsenlibelle aufsetzbare Spiegelbussole (nach Neumayer-Schmidt-Hildebrand von Hildebrand in Freiberg i. S.), die sich bei feineren Messungen gut bewährt hat, zeigt die Fig. 71.

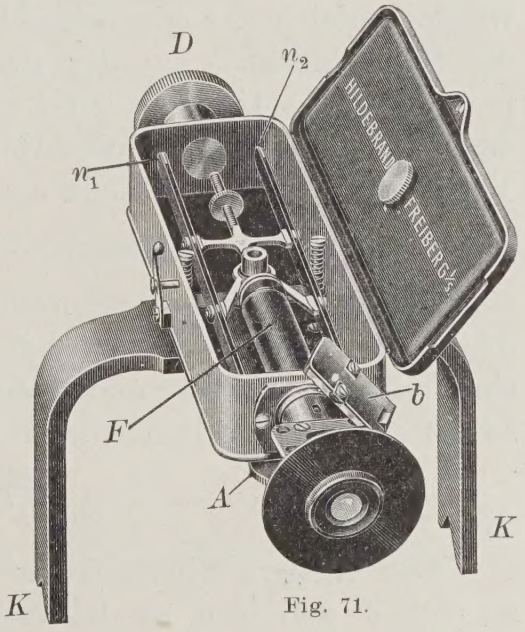


Fig. 71.

Der Gehäusedeckel D ist abschraubbar, so daß das Zielfernröhrchen F — nach Herausnehmen des Magnetsystemes $n_1 n_2$ — durch Seitwärtsverschieben der Fadenkreuzplatte oder durch Verstellen des ganzen Fernröhrchens leicht auf einen vorher mit dem Theodolitfernrohr angezielten, nahezu im Horizont liegenden Punkt gerichtet werden kann, wodurch diese beiden Fernrohrzielebenen parallel werden. In die obere

Hälfte des Diaphragmas des Zielfernröhrchens F ragt eine kleine Beleuchtungsvorrichtung (Glasprisma), die das Spiegelchen b trägt, so herein, daß dadurch entweder die obere Hälfte des Vertikalfadens oder eine kleine, ebenfalls auf der Fadenkreuzplatte angebrachte, horizontale Skala beleuchtet wird. Das aus vier hochkant gestellten Lamellen bestehende Magnetsystem $n_1 n_2$ schwingt mit einem Doppelhütchen auf einer leicht auswechselbaren Stahlspitze (Pinne) und trägt auf der Fernrohrseite ein senkrecht zur Magnetrichtung stehendes Spiegelchen, und auf der entgegengesetzten Seite ein leicht verstellbares Balanziergewichtchen. Das Magnetsystem läßt sich auf der Pinne leicht umlegen, so daß n_1 und n_2 die Plätze tauschen; beim Nichtgebrauch und vor jedem Umlegen wird durch eine Arretiervorrichtung A die Pinne vor Beschädigung geschützt. Blickt man in das Fernröhrchen und dreht den Theodolitaufbau solange, bis das Magnetsystem frei schwingt, dann sieht man den feststehenden Vertikalfaden und (bei richtig balanziertem Magnetsystem) die schwingende Skala, deren Nullpunkt durch ruckweises Drehen an der Alhidade und leichtes Erschüttern der Bussole auf den Faden eingestellt werden kann, wodurch die Spiegelnormale mit der Visierebene zum Zusammenfallen gebracht wird. Die darauf am Horizontalkreis des Theodoliten gemachte Ablesung sei a_1. Diese würde sogleich der magnetischen Südnordrichtung entsprechen, wenn die Spiegelnormale zu der magnetischen Achse des Magnetsystems parallel wäre. Um dies zu finden, legt man (nach der Arretierung) das Magnetsystem $n_1 n_2$ um, bringt wieder den Skalennullpunkt auf den Vertikalfaden und liest dann am Horizontalkreise a_2 ab. Man sieht sogleich ein, daß die Ablesung $A = \frac{a_1 + a_2}{2}$ der Zielung des Zielfernröhrchens (und des Theodolitfernrohrs) in der Richtung der magnetischen Südnordlinie entspricht. Wird deshalb mit dem Theodolitfernrohr irgend ein Punkt P angezielt und dann auf dem Horizontalkreis B abgelesen, so ist der Streichwinkel dieser nach P gerichteten Zielung

$$N = B - A. \tag{1}$$

Der mittlere Einstellfehler einiger solcher Magnetsysteme wurde zu $\pm 2,3'$ gefunden, so daß also aus vier Einstellungen (zwei in der einen Magnetlage mit Ablesungen an dem einen Nonius, zwei in der andern Magnetlage mit Ablesung am zweiten Nonius des Horizontalkreises) die magnetische Nordrichtung auf etwa $\pm 1'$ gefunden wird.

Die Messung von Richtungswinkeln mit der Orientierbussole ergibt sich unter Beachtung des hier und in § 31 Angeführten von selbst; nur die Größe i in den Gleichungen (2) und (3) des § 31 wird

bei Benutzung der beschriebenen Orientierbussole zu Null, weshalb sich diese auch gut zur Bestimmung der magnetischen Mißweisung δ eignet, wie es das folgende Zahlenbeispiel zeigt.

Das Azimut des Zielpunktes B ist aus anderweitigen Messungen (z. B. einer Azimutmessung nach § 136) bekannt zu $\alpha = 351^0\,59{,}4'$. Mit einem Nonientheodoliten (Nonienangabe 1′), der mit einer Aufsatzorientierbussole wie Fig. 71 versehen war, wurde am 7. März 1907 nachmittags $4^h\,32^m$ folgendes gemessen:

Zielpunkt	Magnetlage I Nonius 1	Magnetlage II Nonius 2	Mittel	Richtungen	Zeit	v	vv
Magnet	147° 45,5	47	147°46,2	0° 0,0′	$4^h\,27^m$	− 1,4	1,96
	42	46	44,0 (44,8′)			+ 0,8	0,64
	42	47	44,5 (44,8′)			+ 0,3	0,09
	43	46	44,5 (44,8′)		37^m	+ 0,3	0,09
B.	151 06,5	06,5	151 06,5	3 21,7		0,0	2,78

Der Streichwinkel der nach B gehenden Richtung folgt zu

$$N = 3^0\,21{,}7'$$

und sein mittlerer Fehler hinreichend sicher zu

$$\sqrt{\frac{2{,}78}{3 \cdot 4}} = \pm\, 0{,}5'.$$

Da das Azimut dieser Richtung $\alpha = 351^0\,59{,}4'$ beträgt, so ist nach Gleichung (3) § 31:

$$k = 351^0\,59{,}4' - 3^0\,21{,}7' \pm 0{,}5' = -\,11^0\,22{,}3' \pm 0{,}5'.$$

Die magnetische Mißweisung betrug deshalb am Standorte des Theodoliten zu der angegebenen Zeit $11^0\,22{,}3'$ westlich.

Für ungenauere Messungen kann an Stelle des Gehäuses in Fig. 71 eine zu einem Diopter umgestaltete Röhre treten, in der eine Magnetnadel mit aufgebogener Spitze n vor einem Indexstriche bzw. einem Maßstäbchen S (Fig. 71 a u. b) schwingt (Röhrenkompaß). Diese Röhre kann auch mit dem Horizontalkreise des Repetitionstheodoliten fest verbunden werden. Die Einrichtung des Röhrenkompasses ist aus den Figuren 71 a u. b, seine Verwendung aus dem in § 31 Gesagten ersichtlich.

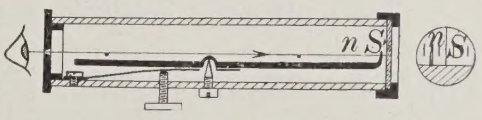


Fig. 71 a. b.

II. Abschnitt.

Einige Längenmeßinstrumente und ihr Gebrauch.

Die wichtigsten Längenmeßinstrumente sind die Meßlatten, die Meßbänder (Stahlbänder) und einige sog. optische Entfernungsmesser. Vom Schrittmaß abgesehen gibt es aber noch viele andere Längenmeßgeräte, wie z. B. die veraltete Drehlatte (Feldzirkel) und Meßkette, dann Meßschnüre (Peilleinen), Meßräder, Meßdrähte und metallene Meßstangen.

5. Kapitel.

Meßlatten und Meßbänder.

§ 33. Meßlatten.

Meßlatten sind Latten oder Stangen aus gut ausgetrocknetem, möglichst astfreiem Kiefern- oder Tannenholz in der Regel von 3 oder 5 m Länge und meistens mit ovalem Querschnitt, der in der Mitte etwa 50, an den Enden etwa 25 mm größten Durchmesser besitzt. Die Enden sind mit möglichst langen Metallzwingen versehen, deren Endflächen gut normal zur Achse abgerichtet sind. Zum Schutze gegen die Einwirkung der Feuchtigkeit und gegen das Abfasern werden die Latten mehrmals mit Leinöl und dann mit Ölfarbe angestrichen und hierbei die einzelnen Meter abwechselnd verschiedenfarbig bemalt, z. B. an einem Paar 5 m-Latten 3 m weiß, 2 m rot und umgekehrt, so daß die eine Latte stets mit einem weißen, die andere stets mit einem roten Meter beginnt („weiße“ oder „rote“ Latte). Die weiteren Unterteile (bis Dezimeter) werden durch umgemalte Ringe und eingeschlagene Nägel bezeichnet.

Zum Messen benutzt man meist eine „weiße“ und eine „rote“ Latte, die von einem oder zwei Gehilfen gelegt werden; viele Verzählfehler werden hierbei vermieden, wenn jede Messung stets mit derselben Latte, z. B. der „weißen“, begonnen wird. Auf ebenem und horizontalem Boden wird zunächst die zu messende Strecke mit Fluchtstäben in etwa $30 \div 50$ m Abstand abgesteckt. Die „weiße“ z. B. 5 m-Latte wird dann vom Messenden gut in die Linie eingerichtet (vom Anfangspunkt aus) und an den Anfangspunkt angelegt. Die „rote“ Latte wird hierauf in die Linie gelegt und vorsichtig an die „weiße“ angestoßen, worauf diese abgehoben und laut Fünf (oder

bei langen Strecken Eins) gezählt wird. Nach Vorwärtsschaffen der „weißen“ Latte, Legen in die Linie, vorsichtiges Anreihen an die „rote“ wird diese abgehoben und laut Zehn (oder Zwei) gezählt usf. Die Schlußablesung erfolgt auf Zentimeter durch deren Abschätzen, nötigenfalls auf Millimeter durch Messen des Abstandes vom vorhergehenden Dezimeterstriche.

Auf ungleichmäßig geneigtem Boden kann in verschiedener Weise, nachdem die zu messende Strecke wieder durch Zwischenpunkte bezeichnet ist, gemessen werden.

Entweder man legt die Latten nach Augenmaß (oder mit einer kleinen Setzlibelle) nahezu wagerecht (ev. senkrecht zur Senkelschnur) und reiht sie durch Vermittelung eines Senkels von etwa 300 gr Gewicht aneinander, wie die Fig. 72a zeigt (sog. Staffelmessung). Oder man legt die Latten bei kleinen Neigungen auf den Boden und läßt

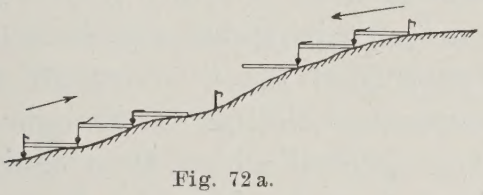


Fig. 72a.

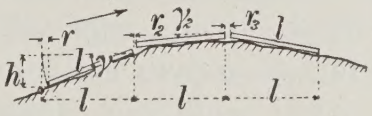


Fig. 72b.

zur Berücksichtigung der Bodenneigung zwischen den Latten kleine Zwischenräume r. Die Latte wird deshalb (Fig. 72b) auch nicht im Anfangspunkte angelegt, sondern sie wird um den kleinen Zwischenraum r (horizontal gemessen) in der Messungsrichtung vorgelegt. Ist ein Ende der Latte l um h zu hoch (tief), so ist nach Fig. 72b

$$r = l - l\cos\gamma = l\left(1 - 1 + \frac{h^2}{2l^2} - \cdots\right)$$
$$\approx \frac{h^2}{2 \cdot l}.$$

Z. B. für $l = 5$ m-Latten wird, wenn r in Millimeter-Einheiten, h in Dezimeter-Einheiten genommen wird,

$$r_{\text{mm}} = h^2_{\text{dm}} \text{ (sog. Dezimeterregel).}$$

Eine dritte Art besteht in der Schrägmessung, bei der die Latten wie bei der Messung in der Horizontalen aneinander gereiht werden. Es wird aber dabei mit Hilfe eines auf die Mitte der Latte aufgesetzten Neigungsmessers (mit langer Auflagelinie, sog. Gradbogen) der Neigungswinkel γ jeder Latte etwa bis auf Zehntelgrade abgelesen. Von der schräg gemessenen Länge wird dann zur Bestimmung der horizontalen Entfernung die Summe der Reduktionen r auf die Horizontale $\left(r = l \cdot 2\sin^2\frac{\gamma}{2}\right)$ abgezogen.

§ 34. Bestimmung der Lattenmeterlänge.

Die Meßlatten müssen gleichmäßig eingeteilt sein und entweder richtige Länge besitzen oder die gemessenen Zahlen müssen wegen der unrichtigen Länge verbessert werden. Nach Vorschrift der Preußischen Anweisung X (für Katastermessungen) dürfen z. B. 5 m lange Latten höchstens $\pm$ 1,6 mm und 3 m-Latten höchstens $\pm$ 1,3 mm falsch sein.

Zur Bestimmung der Länge der Lattenmeter braucht man Normalmaße. Von diesen kommen hier in Betracht die sog. Kontroll- und die Gebrauchsnormale. Für solche Maßstäbe ist bestimmt, daß metallene Kontrollnormale von 1 m Länge bei der Normaltemperatur höchstens $\pm$ 0,01 mm, metallene Gebrauchsnormale von 1 m Länge als Präzisionsmaß um höchstens $\pm$ 0,04 mm von ihrer Sollänge abweichen dürfen. Die Kaiserliche Normal-Eichungskommission (Berlin) eicht auf Verlangen solche Maßstäbe (Endmaße oder Strichmaße) auf die Genauigkeit von Kontroll- oder Gebrauchsnormalen bei 0^0 oder 18^0 C und liefert für jeden Stab einen Beglaubigungsschein mit der Stabgleichung. Z. B.: Zwei stählerne Maßstäbe von quadratischem Querschnitt von 1 cm Seitenlänge und mit keilförmigen Endschneiden, der Technischen Hochschule in Braunschweig gehörig, erhielten hierbei:

$$1791\,\text{a} = 1\,\text{m} - 0{,}002\,\text{mm} + 0{,}011\,(t^0 - 18^0)\,\text{mm},$$
$$1791\,\text{b} = 1\,\text{m} - 0{,}007\,\text{mm} + 0{,}011\,(t^0 - 18^0)\,\text{mm}.$$

Mit einem Paar solcher Maßstäbe mißt man den Abstand von zwei auf einem Brette (das z. B. durch eine Rippe T-förmigen Querschnitt erhält und durch geeignete Lagerung weiterhin vor starker Durchbiegung geschützt ist) im Abstande von etwas über 5 m angebrachten feinen Strichen durch ein- bis zweimaliges Abschieben ab (Anlegen an die Striche durch Vermittlung eines kleinen Metallwinkels mit scharfer Kante, Messen der Schlußmaße mit Zirkel und z. B. Millimeter-Maßstab) und erhält dadurch die Länge C des Vergleichsmaßes bis auf etwa $\pm \frac{1}{10}$ mm, wenn die Stäbe vor ungleicher Erwärmung möglichst geschützt werden und die Temperatur an einem passenden Thermometer abgelesen wird. An Stelle der Striche können, wenn solche Vergleichungen häufig gemacht werden müssen, auch metallene Ansatzflächen, z. B. eine horizontale und vertikale Schneide, und statt des Zirkels ein kleiner Meßkeil (§ 15) benutzt werden. Legt man dann die einzelnen Latten an das Vergleichsmaß C an und mißt in derselben Weise wie vorher die verbleibenden Zwischenräume, dann erhält man dadurch leicht die Länge eines Lattenmeters.

Beispiel: Bei $t = +20^0$ Cels. wurden die zwei genannten Stahl-Maßstäbe a und b gleich oft zwischen etwa 5 m entfernten Marken abgeschoben und die Reststücke gemessen zu 32,65 und 32,60, im Mittel 32,62 mm. Demnach ist

$$C = 5 \cdot \left\{1\,\text{m} - \frac{0{,}002 + 0{,}007}{2}\,\text{mm} + 0{,}011\,(20^0 - 18^0)\,\text{mm}\right\} + 32{,}62\,\text{mm}$$

$$= 5\,\text{m} - 0{,}02\,\text{mm} + 0{,}11\,\text{mm} + 32{,}62\,\text{mm} = 5\,\text{m} + 32{,}71\,\text{mm}.$$

Nach Einlegen der Meßlatten 8a und 8b wurden die Zwischenräume zu 32,0 und 32,3 mm gemessen. Demnach ist

$$1 \text{ Lattenmeter von } 8\,\text{a} = \frac{5\,\text{m} + 32{,}7\,\text{mm} - 32{,}0\,\text{mm}}{5} = 1\,\text{m} + 0{,}14\,\text{mm},$$

$$1 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad 8\,\text{b} = \frac{5\,\text{m} + 0{,}4\,\text{mm}}{5} = 1\,\text{m} + 0{,}08\,\text{mm}.$$

Im Mittel für das Lattenpaar 8 ist demnach genügend genau **1 Lattenmeter = 1 m + 0,11 mm.** Wurde mit diesen Latten z. B. die Strecke $(s) = 326{,}740$ gemessen, so ist die wegen fehlerhafter Lattenlänge verbesserte Strecke

$$s = (s) \cdot (1\,\text{m} + 0{,}11\,\text{mm}) = 326{,}740\,\text{m} + 35{,}9\,\text{mm} = 326{,}776\,\text{m}.$$

Untersucht man auf diese Weise hölzerne Latten bei verschiedener Temperatur und Luftfeuchtigkeit, dann zeigt sich, daß sie durch die Wärme nur sehr wenig, erheblich stärker aber durch die Feuchtigkeit beeinflußt werden. Bei gut gestrichenen 5 m-Latten aus (harzreichem) Kiefernholz hat man in einem Sommer Änderungen bis zu 0,6 mm, in verschiedenen Jahren bis zu 1,3 mm und bei Latten aus Erlenholz bis zu 1,5 mm beobachtet. Bei feineren Arbeiten müssen deshalb die Latten wiederholt (z. B. täglich) mit dem Normalmaße verglichen werden.

§ 35. Genauigkeit der Lattenmessung. Fehlergrenzen.

Wird bei der Messung der Längeneinheit der mittlere zufällige Fehler $\pm \mu$ begangen, dann folgt aus der Fehlerfortpflanzungsregel (§ 4 Gleichung (8')), daß der mittlere Fehler der Länge s (Summe von s gemessenen Einheiten) wird

$$m_s^2 = s \cdot \mu^2 \quad \text{oder} \quad m_s = \pm \mu \sqrt{s}. \tag{1}$$

Mißt man demnach dieselbe Strecke mit denselben Latten mehrmals zu $s_1, s_2 \ldots s_n$, bildet den Mittelwert $\underline{s} = \frac{[s]}{n}$, dann die Fehler $v_n = \underline{s} - s_n$

und daraus den mittleren Fehler einer der Messungen durch $m_s = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$ (vgl. Ausgleichen direkter Beobachtungen § 5), dann folgt:

$$\mu = \frac{m_s}{\sqrt{s}}. \qquad (2)$$

Beispiel. Mit einem Paar 5 m-Latten wurde auf ebenem Boden gemessen:

Nr.	s m	v mm	vv qmm
1	88,327	+ 7	49
2	,333	+ 1	1
3	,337	− 3	9
4	,340	− 6	36
$\underline{s}$	= **88,334**	+ 1	95

$$\underline{s} = 88{,}334 \pm 0{,}003,$$

$m_s = \sqrt{\frac{95}{3}} = \pm 5{,}66$ mm (mittlerer Fehler einer Messung von 88 m),

$\mu = \frac{\pm 5{,}66}{\sqrt{88{,}3}} = \pm 0{,}60$ mm („ „ „ „ „ 1 m),

$m_{\underline{s}} = \frac{5{,}66}{\sqrt{4}} = \pm 2{,}8$ mm („ „ des Mittelwertes $\underline{s}$).

Der Wert μ schwankt auf verschieden stark geneigtem Gelände zwischen $\pm 0{,}3$ und $\pm 4{,}0$ mm. Aus vielen Messungen verschieden langer Strecken hat Jordan einen allgemeinen Mittelwert zu $\mu = \pm 3$ mm berechnet.

Betrachtet man den Messungsvorgang etwas näher, dann findet man, daß der sich zeigende Fehler m_s durch Zusammenwirken im wesentlichen der folgenden Einzelfehler entsteht:

a) Die Latten werden am Anfangspunkt nicht scharf angelegt, am Endpunkt wird nicht richtig abgelesen; die Endpunkte sind womöglich unscharf bezeichnet. Dieser Fehler wirkt zufällig und ist unabhängig von der Größe der Strecke.

b) Durch das Ausweichen der Latten aus der Geraden in horizontaler und vertikaler Richtung wird die Maßzahl stets vergrößert.

c) Durch das Anstoßen der folgenden Latte an die vorhergehende wird die Länge vergrößert und bei unscharfer Berührung der Lattenstoßflächen wegen zwischenliegenden Schmutzes, nicht normal abgearbeiteter Enden, u. dgl. wird die Länge verkleinert; das Aneinanderreihen der Latten durch Vermittlung des pendelnden Senkels ändert die Maßzahl unregelmäßig; der Anreihefehler wirkt demnach unregelmäßig.

d) Das Durchbiegen der Latten vergrößert die Länge.
e) Unregelmäßige Veränderungen der Länge der Latten während der Messung wirken zufällig (vergrößernd oder verkleinernd).

Soll demnach m_s klein werden, dann müssen auch die Einzelfehler klein gemacht werden, die Anreihefehler z. B. durch Anbringen stählerner Endschneiden an den Latten, Messen längs abgeschnürter Linien. Häufig überwiegen die vergrößernden Fehler etwas und es könnte deshalb durch geringe Vergrößerung der Meßlatten diesem entgegengewirkt werden.

Erfahrungsgemäß läßt sich der mittlere Fehler m_s darstellen durch Funktionen von den Formen

$$m_s^2 = c^2 + \mu^2 \cdot s + f^2 \cdot s^2 \quad \text{und} \quad m_s = c + \mu \sqrt{s} + f \cdot s. \qquad (3)$$

c rührt hiebei von den Ablese- und Anlegefehlern an den Endpunkten, μ von den bald vergrößernd, bald verkleinernd wirkenden Messungsfehlern, f von den stets im gleichen Sinne wirkenden Messungsfehlern her.

Diese Größen c, μ und f sind demnach von der Art der Ablesung und Bezeichnung der Endpunkte, vor allem aber von der Beschaffenheit der Bodenoberfläche, der Aufmerksamkeit der Gehilfen und den ausgeführten Maßvergleichungen abhängig und deshalb sehr verschieden. (Extreme Fälle $c = 0$, $f = 0$ und $c = 0$, $\mu = 0$.)

Man kann mit gewöhnlichen 5 m-Latten durch eine Messung bedeutende Genauigkeit erreichen; z. B. Prof. Reinhertz hat (nahezu) fehlerfrei gegebene Strecken von 150 bis 1400 m Länge auf gut ebenem, festem Boden mit gewöhnlichen 5 m-Latten, die vor, während und nach der Messung mit dem Normalmaß verglichen wurden, wiederholt nachgemessen und gefunden

$$m_s = \sqrt{10 + 0{,}0204 \cdot s + 0{,}00056 \cdot s^2} \qquad (4)$$

(s in Meter-, m_s in Millimeter-Einheiten).

Dies gibt für $s = 1000$ m; $m_s = \pm 24$ mm, wobei leicht ersichtlich ist, daß die fortschreitenden Fehler bei großen Entfernungen die andern Fehler überwiegen. Durch das Mittel aus $n = 4$ solchen Messungen wird dann 1 km auf $\frac{m_s}{\sqrt{n}} = \pm 12$ mm gefunden.

Für Eigentumsvermessungen, Katastermessungen u. dgl. sind in den einzelnen Staaten Fehlergrenzen vorgeschrieben, die die Differenzen zweier mit dem gleichen Meßwerkzeuge ausgeführter Messungen derselben Strecke nicht überschreiten dürfen. Je nach der Geländeneigung sind diese Grenzen häufig verschieden.

Ist m_s der mittlere Fehler einer Messung der Strecke s, dann ist nach § 4, Gl. (6′) bis (8′) der mittlere Fehler der Summe oder Differenz zweier solcher Messungen $\sqrt{m_s^2 + m_s^2} = \sqrt{2} \cdot m_s$. Wird der Maximalfehler nach § 4 zum etwa dreifachen Betrag des mittleren Fehlers genommen, so wird die Fehlergrenze a für die Differenz

$$a = \pm 3 \cdot \sqrt{2} \cdot m_s \approx \pm 4 \cdot m_s. \qquad (5)$$

Durch Einsetzen von m_s z. B. nach Gleichung (3) erhält man a.

Z. B. in Preußen ist für mit Meßlatten oder dem 20 m langen Meßbande ausgeführte Katastermessungen nach Anweisung IX für ebenes Gelände bestimmt $a_{\mathrm{I}} = 0{,}01\sqrt{4 \cdot s + 0{,}005 \cdot s^2}$, für sehr unebenes Gelände $a_{\mathrm{III}} = 0{,}01\sqrt{8 \cdot s + 0{,}01 \cdot s^2}$.

In Bayern: $a = 0{,}007\sqrt{s} + 0{,}02$, was in ungünstigem Gelände ausnahmsweise um $^2/_3$ seines Betrages überschritten werden darf.

Für $s = 100\ m$ wird $a_{\mathrm{I}} = \pm 0{,}21\ m$; $a = \pm 0{,}09\ m$.

Diese Grenzen sind demnach ziemlich weit; für viele ingenieurtechnische Zwecke, z. B. für Bogenabsteckungen, viel zu weit.

§ 36. Meßbänder.

Die in der Feldmessung verwendeten Bänder sind meistens in der Länge von 20 m aus gutem Federstahl von 10 bis 25 mm Breite und etwa $^1/_2$ mm Dicke gefertigt. An den Enden sind drehbare Ringe, die über die etwa $1^1/_2$ m langen Band- oder Ziehstäbe (mit runden oder schaufelförmigen Spitzen zum Einstoßen in den Boden) gesteckt werden; die Teilpunkte sind meist durch kleine Löcher in 1 dm Abstand und die einzelnen Meter durch aufgenietete Nummernplättchen bezeichnet. Zum Bezeichnen der Bandenden bei der Messung und gleichzeitig zum Zählen der Bandlängen dienen 10 Zählnägel. Zum Transport und zur Aufbewahrung wird das Band aufgerollt.

Bei der Messung wird das Band von zwei Gehilfen gehandhabt.

Nachdem die zu messende Linie auf ebenem horizontalem Boden durch einige Stäbe abgesteckt ist, wird der eine Bandstab am Anfangspunkt lotrecht gestellt und zweckmäßig durch Vorsetzen eines Fußes fest angehalten, der vordere Bandstab wird dann in die Gerade eingerichtet, das Band gerade gelegt, so daß nach kräftigem Zuge von etwa 15 kg das Bandende durch Eindrücken der Spitze des vorderen Bandstabes und sodann mit einem Zählnagel (ev. einem Strich auf festem Boden) bezeichnet werden kann. Der vordere Bandstab mit dem Band wird hierauf vorwärts gebracht, der hintere Bandstab an dem vorher mit dem Zählnagel bezeichneten Punkte angehalten usw.

Auf geneigtem Boden mißt man entweder mit sehr nahezu aufliegendem Bande und Vorstecken des Zählnagels in der Messungsrichtung um den Unterschied zwischen dem horizontalliegenden Bande und der Projektion des geneigten Bandes oder mit horizontal ausgespanntem kurzem Bande von wenigen Metern Länge und Abloten.

Ist γ der gemessene Neigungswinkel des Bandes, dann ist der vordere Zähler vorzustecken um $r = l - l\cos\gamma = 2\,l\sin^2\frac{\gamma}{2}$. ($r$ ist horizontal zu messen.) γ oder noch bequemer r selbst wird an kleinen Höhenwinkelmessern abgelesen, z. B. an dem sog. Horizontalmesser (Fig. 73). Das Instrumentchen wird auf einen lotrecht gestellten Bandstock aufgesteckt und nach Anzielen des andern oberen Bandstabendes mit dem kleinen am Gradbogen befestigten Diopter (Schauloch und Spitze) wird am Zeiger Z sogleich r abgelesen, das dann mit einem Taschenmaßstab vorwärts gemessen wird.

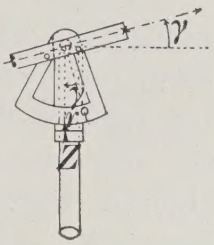


Fig. 73.

20 m lange Stahlbänder dürfen nach der Preuß. Anweisung X unter Berücksichtigung der Wärmeausdehnung höchstens $\pm$ 3,5 mm falsch sein.

Zur Bestimmung der Länge des Bandmeters mißt man zunächst auf einer geeigneten Unterlage (z. B. Kegelbahn) mit Normalmaßstäben den Abstand C zweier etwas über 20 m entfernten Marken. An einem eingeschlagenen Nagel wird dann der eine Bandring angehängt und das Band mit normaler Spannung, z. B. 15 kg, ausgespannt, worauf die Abstände der Ringmitten von den Marken etwa mit Zirkel und Maßstab gemessen werden. Die Meßbandtemperatur t wird wenigstens genähert an einem aufgehängten Thermometer abgelesen. Als Wärmeausdehnungskoeffizient für Stahl darf $\alpha = 0{,}000011$ für 1^0 C genommen werden. Z. B. $C = 20$ m + 63,2 mm. Bandlänge bei $20^0 = C$ — 62,5 mm = 20 m + 0,7 mm, folglich 1 Bandmeter bei 20^0 C = 1 m + 0,035 mm.

Die Bandmessung ist unter gewöhnlichen Verhältnissen ungenauer als die Lattenmessung, das Messen mit beiden Werkzeugen geht ungefähr gleich rasch, aber die Gehilfen werden durch das Band etwas weniger ermüdet. Nach Jordan beträgt der mittlere Fehler der Bandmessung etwa $m_s = \pm 0{,}005\sqrt{s}$.

Bei der Bandmessung kommen fast die gleichen Fehlerquellen wie bei der Lattenmessung in Betracht, nur der Größe nach sind sie verschieden. Der Anreihefehler ist bei der beschriebenen Bandmessung größer. Die Änderungen der Bandlänge l durch die Wärme t betragen etwa $0{,}000011 \cdot t \cdot l$, z. B. für $t = 20^0$ beträgt für ein 20 m Meßband

die Verlängerung 4,4 mm; die Bänder sollen deshalb bei der Gebrauchstemperatur von etwa 18° C richtig sein. Die Fehler durch Ausweichen aus der Geraden sind erheblich kleiner als bei der Lattenmessung. Die Bandlänge ändert sich aber noch mit dem Zug P z. B. bei einem Stahlband mit dem Elastizitätsmodul $E = 21000$ kg/qmm, einer Dicke von $d = 0{,}5$ mm, Breite $b = 15$ mm, Länge $l = 20$ m beträgt die Verlängerung λ durch $P = 15$ kg: $\lambda = l \cdot \frac{P}{\frac{d \cdot b}{E}} = 1{,}9$ mm.

Zur Erhöhung der Genauigkeit macht man durch besondere Vorrichtungen den Anreihefehler sehr klein, spannt das etwa 20 bis 100 m lange dünne Band (bzw. den Draht) bei der Messung stets mit gleichem Gewicht, beobachtet die Meßbandtemperatur und macht deren Einfluß auf das Material des Bandes (oder Drahtes) durch Verwendung geeigneter Metallegierungen (z. B. Nickelstahl mit 36% Ni, das sog. Invar) sehr klein. Auf diese Weise hat man mit 24 m langen (etwa 1,5 mm dicken) Invardrähten, deren Enden mit etwa 10 cm langen Millimetermaßstäbchen versehen waren und die zwischen zwei Spannstativen meist in annähernder Brusthöhe mit 10 kg gespannt wurden, den mittleren Fehler einer Messung einer mehrere Kilometer langen Linie auf etwa $\mu = \pm 0{,}07$ mm (auf 1 m) erniedrigt (siehe § 35). Das Anreihen erfolgte hierbei durch feine Strichmarken, die auf mindestens drei Stativen in je 24 m Abstand scharf in die Messungsrichtung eingewiesen wurden und an denen auf den Millimetermaßstäbchen mehrmals zu gleichen Zeiten abgelesen wurde. Das Einweisen der Strichmarken und die Messung der Neigung jeder Drahtlage geschah mit einem kleinen, auf die Markenstative aufsetzbaren Fernrohre. Bei dieser Messungsart, die sehr rasch vor sich geht (nach Hammer etwa 1 km in 1 Stunde), kommt der Unebenheit des Geländes keine sehr große Bedeutung zu.

6. Kapitel.

Entfernungs- oder Distanzmesser.

Mit Hilfe der Entfernungsmesser wird die Entfernung stets aus einem spitzwinkeligen Dreieck, in dem die kurze Seite und zwei weitere Bestimmungsstücke gegeben bzw. gemessen werden, bestimmt. Diese kurze Seite, die Basis l, befindet sich am Anfang oder am Ende der zu ermittelnden Strecke E und liegt entweder stets horizontal, oder vertikal oder senkrecht z. B. zu E. Der der Basis gegenüberliegende spitze Winkel β, der sog. distanzmessende Winkel wird entweder direkt oder

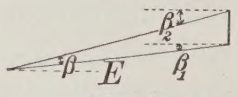


Fig. 74.

durch die Einzelwinkel β_1 und β_2 oder auch durch Funktionen (z. B. Sehnenfunktionen von β, Tangensfunktionen von β_1 und β_2) dieser Winkel bestimmt. Da entweder l oder β (bzw. Funktionen von β) konstant genommen werden kann, so erklärt sich die große Anzahl von möglichen Entfernungsmessern. Für die in diesem Buche verfolgten Zwecke am wichtigsten ist der

§ 37. Okularfadendistanzmesser.

Dieser entsteht aus dem Zielfernrohr durch Anbringen zweier Fäden im Abstande p auf dem Diaphragma. In der Regel spannt man außer dem mittleren Horizontalfaden zwei weitere Horizontalfäden, die sog. Distanzfäden aus (Fig. 75), so daß durch diese zwei Fäden bei beliebiger Stellung des Fernrohrauszuges nach Andeutung der Fig. 76 der konstante distanzmessende Winkel β hergestellt wird. Wenn ein mit gleichmäßiger Teilung versehener Maßstab, die sog. Abstands- oder Distanzlatte, senkrecht zur Mittelvisur aufgestellt ist, dann wird auf ihm zwischen den Distanzfäden das Stück l gesehen.

Fig. 75.

Für positive Okulare, z. B. für Ramsdensche, liest man, wenn E die Entfernung der Latte von der Fernrohrkippachse und F die Objektivbrennweite ist, aus Fig. 76 die Proportion ab:

$$\frac{E-c}{l} = \frac{F}{p} \quad \text{oder:} \quad \boldsymbol{E = c + \frac{F}{p} \cdot l = c + C \cdot l.} \qquad \text{(I)}$$

D. h. die Entfernung der Latte vom vordern Objektivbrennpunkt F_1 ist proportional dem zwischen den Distanzfäden gesehenen Lattenstücke. Dieser Punkt F_1 heißt deshalb der anallaktische Punkt. Die

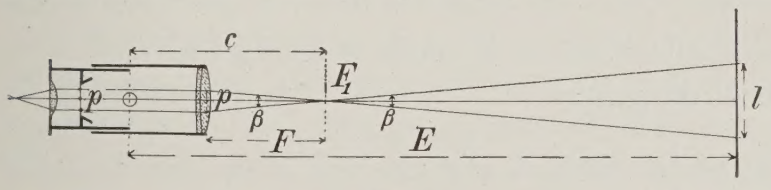


Fig. 76.

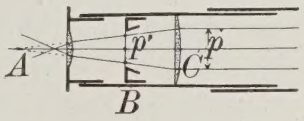


Fig. 77.

Proportionalitätskonstante C kann bei diesen Entfernungsmessern nur geändert werden, wenn die Distanzfäden mit Hilfe besonderer Stellschräubchen gegeneinander bewegt werden können; sehr häufig ist aber neuerdings der Fadenabstand unveränderlich.

In negativen Okularen, z. B. dem Huygensschen, bleibt die Gleichungsform (I) erhalten. Ist in Fig. 77 A der Brennpunkt der Kollektivlinse C, und p' der Fadenabstand, so ist:

$$\frac{p}{p'} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \quad \text{oder} \quad p = p' \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}.$$

und demnach wegen (I):

$$E = c + \frac{F}{p' \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}} \cdot l = c + C \cdot l.$$

Durch Verschieben des Diaphragmas B oder der Kollektivlinse C in der Fernrohrrichtung (d. h. Ändern von $\overline{BC}$) wird demnach die Proportionalitätskonstante C etwas geändert.

Der anallaktische Punkt wird im Porroschen Distanzmesser (Fig. 78) durch Einschalten einer Linse, deren Abstand vom Objektiv konstant

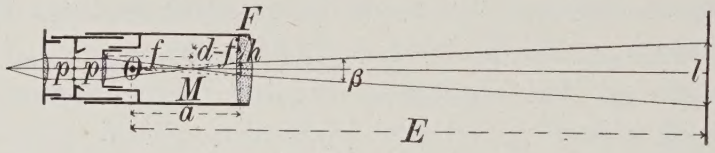


Fig. 78.

bleibt, in die Kippachse O verlegt ($c = 0$). Die Brennweite dieser sog. anallaktischen Linse sei f, ihr Abstand vom Objektiv d, die Objektivbrennweite F, dann liest man aus der Fig. 78 unter Benutzung der eingeschriebenen Bezeichnungen ab:

$$\frac{E}{l} = \frac{a}{h} \quad \text{oder} \quad E = \frac{a}{h} \cdot l. \tag{1}$$

Um a und h durch die Instrumentendimensionen auszudrücken, erhält man zunächst, da M und O in bezug auf das Objektiv Gegenstands- und Bildpunkt sind, durch die dioptrische Hauptgleichung:

$$F^2 = (F - d + f)(F + a) \quad \text{oder:} \quad a = \frac{F^2}{F - d + f} - F = \frac{F(d - f)}{F + f - d} \tag{2}$$

(a ist der Abstand des anallaktischen Punktes vom Objektiv).

Außerdem gilt die Proportion:

$$\frac{h}{d - f} = \frac{p}{f} \quad \text{oder} \quad h = p \cdot \frac{d - f}{f}. \tag{3}$$

Durch Einsetzen von (2) und (3) in Gleichung (1) wird:

$$E = \frac{F \cdot f}{F + f - d} \cdot \frac{1}{p} \cdot l, \tag{4}$$

und da der erste Faktor nach § 9 die Äquivalentbrennbreite φ des Linsensystems (F, f, d) ist, so wird

$$E = \frac{\varphi}{p} \cdot l = C \cdot l. \tag{II}$$

Die Proportionalitätskonstante C ändert sich demnach durch Verschieben der anallaktischen Linse f (Ändern von d); dadurch erleidet aber nach

Gleichung (2) auch die Lage des anallaktischen Punkts O im Fernrohre eine Verschiebung. Die Fernrohrvergrößerung und auch die Lichtstärke des Fernrohrs wird nach dem früher Gesagten durch das Anbringen der anallaktischen Linse regelmäßig geringer.

Die Multiplikationskonstante C liegt bei den Distanzmessern in der Regel zwischen 50 und 200, meistens ist sie nahezu 100. In distanzmessenden Fernrohren mit positiven Okularen und auf der Fadenplatte fest angeordneten Fäden kann C nicht geändert werden; ist aber der Fadenabstand mit Hilfe von Schräubchen (wie meist an älteren Entfernungsmessern) etwas verstellbar, dann kann C auf einen runden Wert, z. B. 100,0, gestellt werden. Das Gleiche kann in negativen Okularen durch Verschieben der Fadenkreuzplatte oder der Kollektivlinse bzw. in Porroschen Distanzmessern durch Verschieben der anallaktischen Linse erreicht werden.

Um C nahezu auf einen runden Wert zu stellen, mißt man vom jeweiligen anallaktischen Punkte aus auf nahezu horizontalem Boden mit Meßlatten u. dgl. eine Strecke von etwa $E' = 100{,}00$ m ab, stellt im Endpunkte eine gleichmäßig geteilte Latte lotrecht auf und führt eine der angegebenen Veränderungen aus bis schließlich zwischen den Distanzfäden das Stück $l = \frac{E'}{C}$ gesehen wird.

Die Distanz- oder Abstandslatten sind in der Regel hölzerne, gleichförmig in metrischem Maße geteilte Maßstäbe von etwa 1 dm Breite und 3 bis 4 m Länge; sehr häufig werden mit Zentimeterteilung versehene Nivellierlatten als Distanzlatten verwendet, für geringere Genauigkeit aber auch in Dezimeter geteilte Latten. Wenn auf Abstandslatten noch auf größere Entfernung scharf abgelesen werden soll, muß auch die Fernrohrvergrößerung passend gewählt sein, sie bewegt sich im allgemeinen zwischen 10 und 40. Die Latteneinteilung erfolgt durch Felder bzw. Striche, deren Größe (cm, dm) bzw. Stärke und Abstand sich nach der notwendigen Messungsschärfe (den zu messenden Längen, der Güte des Fernrohrs) richtet; die Teilpunkte werden meist mit Zahlen von passender Größe übersichtlich beziffert. Gewöhnlich wird mit lotrecht stehender Latte gemessen; die Lotrechtstellung erfolgt am besten mittels einer an der Latte befindlichen Dosenlibelle; das Festhalten der Latte geschieht entweder freihändig oder bei feineren Messungen unter Zuhilfenahme einer Strebe (z. B. eines angehaltenen Fluchtstabes) oder eines Lattenstatives.

Das Lattenstück l wird entweder durch die Differenz zweier an den Fäden gemachten Ablesungen oder, nach Einstellen des einen Fadens auf eine deutliche Nullmarke der Latte (z. B. auch auf die

Mitte eines Zentimeterfeldes), sogleich durch Ablesen am andern Faden ermittelt. Die Konstante c kann im letzteren Falle mechanisch berücksichtigt werden, indem der eine Faden auf den im Sinne der wachsenden Lattenbezifferung um $\frac{c}{C}$ verschobenen Nullpunkt (bzw. Teilpunkt) eingestellt wird. Die Ablesung am andern Faden liefert dann sogleich das Stück $L = l + \frac{c}{C}$, so daß nach Gleichung (I) $E = C \cdot L$ wird. Z. B. mit einem Distanzmesser mit $c = 0{,}5$ m; $C = 100$ wurde bei nahezu horizontaler Zielung der eine Faden auf $1{,}005 = 1{,}000 + \frac{0{,}5}{100}$ eingestellt und hierauf am andern Faden 1,987 abgelesen. Demnach ist $L = 0{,}987$ also $E = 100 \cdot 0{,}987 = 98{,}7$ m.

Besitzt C einen unrunden Wert z. B. 98,63 dann kann man zur Berechnung von $E = c + C \cdot l$ bzw. $C \cdot L$ z. B. eine kleine Zahlentafel verwenden, die für den Eingang l bzw. L sogleich E liefert.

§ 38. Scharfe Bestimmung der Distanzmesserkonstanten.

Die Additionskonstante c mißt man bei den gewöhnlichen Distanzmessern am einfachsten als den Abstand des vorderen Objektivbrennpunktes von der Kippachse bis auf cm am Instrumente direkt ab.

Die Multiplikationskonstante C bestimmt man dann aus einigen entsprechenden Werten von E und l, indem man auf nahezu horizontalem Boden von der Kippachse aus die Strecken $E_1, E_2 \ldots E_n$ scharf abmißt und hierauf auf der in den Endpunkten lotrecht aufgestellten Latte die zugehörigen Stücke $l_1, l_2 \ldots l_n$ ermittelt. Aus der allgemeinen Gleichung (I) findet man

$$C_1 = \frac{E_1 - c}{l_1};\quad C_2 = \frac{E_2 - c}{l_2} \ldots C_n = \frac{E_n - c}{l_n}. \tag{1}$$

Unter der näherungsweise zutreffenden Annahme, daß der Fehler in l proportional mit E wächst, wird der beste Wert

$$\underline{C} = \frac{C_1 + C_2 + \cdots C_n}{n} = \frac{[C]}{n} \tag{2}$$

und dessen mittlerer Fehler (siehe § 5 S. 10)

$$m_{\underline{c}} = \sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}} \quad \text{wenn} \quad v_n = \underline{C} - C_n. \tag{3}$$

Macht man den Zähler in den Gleichungen (1) zu runden Zahlen z. B. 20, 40 . . . 140 m, indem man diese Strecken vom anallaktischen Punkte aus abmißt, dann kann die Berechnung sehr erleichtert werden, wenn C nahezu 100 wird, wie dies das folgende Zahlenbeispiel zeigt.

c wurde bei einem entfernungsmessenden Fernrohr mittlerer Größe (20fache Vergrößerung), direkt gemessen zu 0,42 m, die Lattenstücke l sind Mittelwerte aus je 4 Bestimmungen auf einer leidlich gut geteilten Latte von richtiger Länge. Bei jeder Bestimmung wurde an zwei Fäden abgelesen.

Nr.	$E-c$ m	l m	$\frac{100}{C}$	v	vv
1	20,00	0,2012	1,0060	− 18	324
2	40,00	0,4020	1,0050	− 8	64
3	60,00	0,6022	1,0037	+ 5	25
4	80,00	0,8030	1,0037	+ 5	25
5	100,00	1,0042	1,0042	0	0
6	120,00	1,2042	1,0035	+ 7	49
7	140,00	1,4050	1,0036	+ 6	36
		Mittel = 1,0042		− 3	523

Das Mittel der Zahlen

$$\frac{100}{\underline{C}} \text{ wird } 1{,}0042 \pm 10^{-4}\sqrt{\frac{523}{7 \cdot 6}}.$$

Folglich:

$$\underline{C} = \frac{100}{1{,}0042 \pm 0{,}00035} = 99{,}58 \pm 0{,}035$$

und

$$E = 0{,}42 + 99{,}58 \cdot l.$$

Zur Bestimmung der Konstanten des Porroschen Distanzmessers ermittelt man die Lattenstücke l_1 und l_2 für eine kleine Entfernung E_1 (etwa 20 m) und für eine größere Entfernung E_2 (etwa 100 m) der Distanzlatte von der Kippachse. Aus den zwei Gleichungen $E_1 = c + C \cdot l_1$ und $E_2 = c + C \cdot l_2$ ergeben sich dann die beiden Unbekannten c und C, wobei häufig erstere nicht zu Null wird.

Da sich C sehr stark durch eine sehr kleine Veränderung des Abstandes der Distanzfäden ändert, so muß es von Zeit zu Zeit wieder bestimmt werden.

§ 39. Messung horizontaler und vertikaler Strecken auf geneigtem Boden.

Die Abstandslatte wird entweder senkrecht zu einer der drei geneigten Ziellinien oder vertikal gerichtet.

a) Im ersteren Falle wird an der Latte ein kleines Diopter befestigt, so daß sie damit leicht senkrecht z. B. zur unteren Zielung

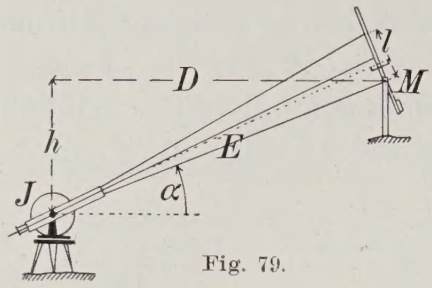


Fig. 79.

gestellt werden kann. Bei der nebenstehend (Fig. 79) skizzierten Kreuterschen Latte wird die untere Zielung stets auf die Nullmarke M der Distanzteilung eingestellt, die Ablesung l bzw. L am anderen Distanzfaden liefert demnach die schiefe Entfernung

$$E = c + C \cdot l \text{ bzw. } = C \cdot L. \qquad (1)$$

Ist α der Neigungswinkel der unteren Zielung, dann ergeben sich horizontale und vertikale Projektion zu

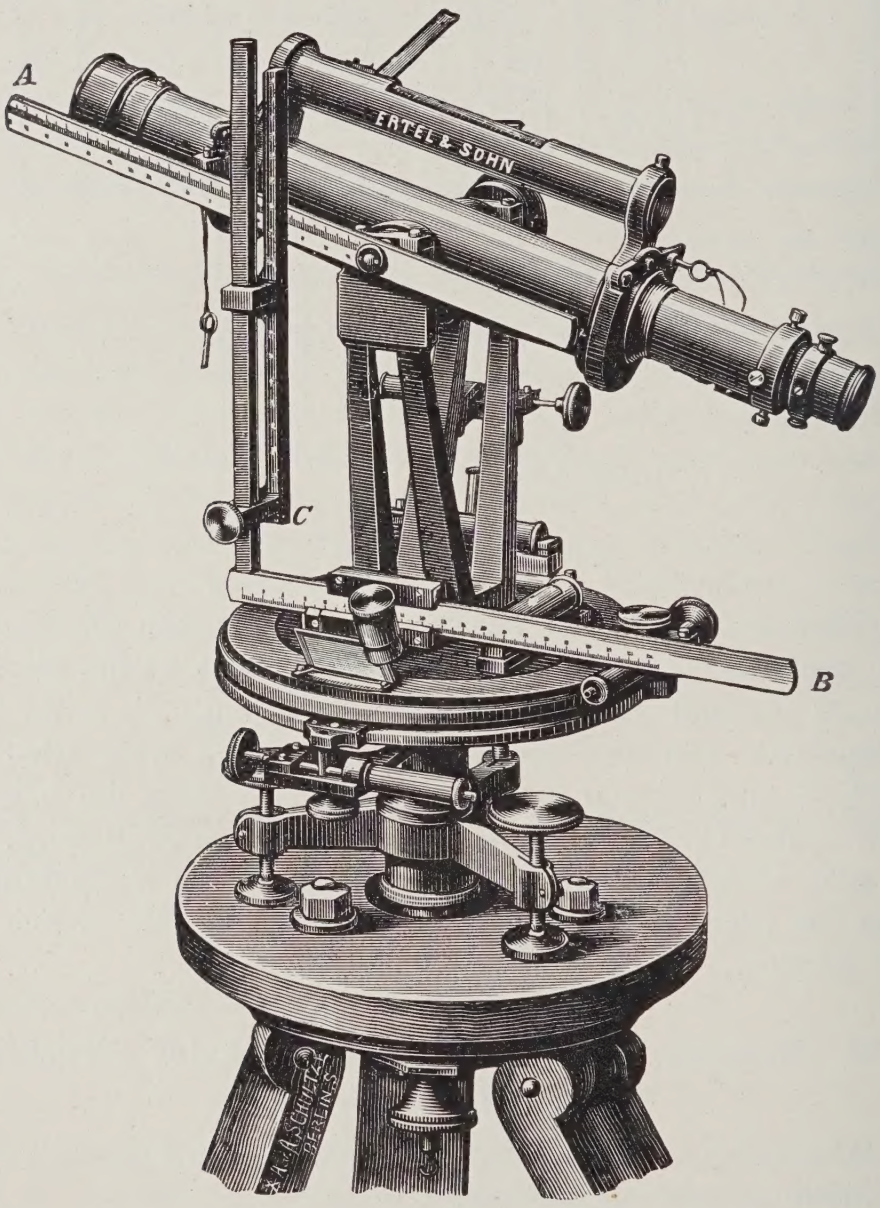


Fig. 80. Tachymeterrepetitionstheodolit von Ertel & Sohn in München nach Kreuter. Horizontalkreis 16 cm Durchm., $^1/_6{}^\circ$ Teilung, 10″ Nonien. Fernrohr (mit 338 mm Brennweite) in den Lagern dreh- und umlegbar.

$$\left.\begin{aligned} D &= E\cos\alpha \\ h &= E\sin\alpha \end{aligned}\right\}. \qquad (2)$$

Diese Gleichungen (2) können auch mechanisch durch Projizieren berechnet werden. Zu diesem Zwecke werden am sog. Schiebetachymeter, wie Fig. 80 zeigt, drei gleichgeteilte (etwa in mm) Maßstäbe A, B, C angebracht; B liegt stets horizontal, C stets vertikal, A ist stets parallel zur unteren Ziellinie und macht alle Bewegungen des Fernrohres mit. Wird durch horizontales Verschieben des Vertikalmaßstabes auf A die abgelesene Entfernung E eingestellt, dann wird auf dem horizontalen Maßstabe sogleich D, auf dem vertikalen Maßstabe h bzw. (konst. $+ h$) abgelesen. Figur 80 zeigt die Verbindung der Projektionsvorrichtung mit einem Theodolit bei dem Kreuterschen Schiebetachymeter. Nach Berichtigung der Reitlibelle, des Ringfernrohres (Fadenkreuzzentrierung), dann dessen Distanzmeßeinrichtung und hierauf des Theodolits (soweit dies möglich) erfolgt die Parallelstellung des Lineals A zur unteren Visierlinie. Durch Ablesen des Mittelfadens auf einer in etwa 100 m Entfernung aufgestellten Latte bei einspielender Reitlibelle ist die horizontale Zielung bekannt; stellt man dann den oberen Faden (untere Zielung) auf diese Ablesung ein, so liegt die untere Zielung horizontal und es ist hierauf das Lineal A mit zwei Stellschräubchen so lange zu verstellen, bis die Ablesung auf dem Höhenmaßstabe C bei beliebiger Einstellung auf B unverändert bleibt. (Die Umdrehachse ist hierbei als lotrecht stehend vorausgesetzt.)

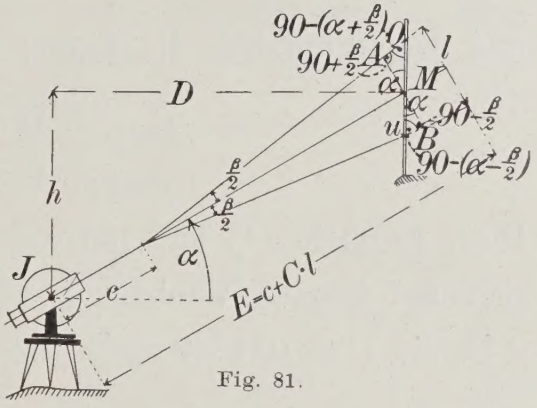


Fig. 81.

b) Häufiger wird aber die lotrecht stehende Latte verwendet. Sind c und C die Distanzmesserkonstanten, l das zwischen den Fäden gesehene Lattenstück und α der Neigungswinkel der mittleren Zielung, dann ist nach Andeutung der Fig. 81 die Hilfsgröße

$$E = c + C \cdot l \overset{\text{bzw.}}{=} C \cdot L. \qquad (1)$$

Denkt man sich die Latte in Punkt M senkrecht stehend zur Mittelzielung JM, die den distanzmessenden Winkel β halbieren soll, dann würde auf ihr das Stück $\overline{A.B}$ abgelesen, so daß die schiefe Entfernung wird

$$\overline{J.M} = c + C \cdot \overline{A.B} = c + C \cdot 2 \cdot \overline{A.M}. \qquad (2)$$

Durch zweimalige Anwendung des Sinussatzes auf die zwei Dreiecke $A.M.O$ und $B.M.u$ wird:

$$\overline{O.u} = l = \frac{\overline{A.M}\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)} + \frac{\overline{B.M}\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)} = 2\cdot\overline{A.M}\,\frac{\cos\alpha\cos^2\frac{\beta}{2}}{\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}$$

oder

$$2\cdot\overline{A.M} = l\,\frac{\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\alpha\cos^2\frac{\beta}{2}}. \tag{3}$$

Setzt man diesen Wert in (2) ein, dann wird

$$\overline{J.M} = c + C\cdot l\,\frac{\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\alpha\cos^2\frac{\beta}{2}} \tag{4}$$

und demnach (siehe die Figur)

$$\left.\begin{aligned} D &= \overline{J.M}\cos\alpha \\ h &= \overline{J.M}\sin\alpha = D\,\mathrm{tg}\,\alpha \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Diese Formeln (4) und (5) werden in der Praxis nicht benutzt, weil sich bei kleinen Winkeln $\frac{\beta}{2}$ bequemere Näherungsformeln ergeben; z. B. für $C = 100$ ist nach § 37

$$\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2} = \frac{p}{2\cdot F} = \frac{1}{2\cdot C} \quad \text{also} \quad \frac{\beta'}{2} \approx \frac{\varrho'}{2\cdot 100} = 17'.$$

Die goniometrischen Reihen für $\frac{\beta}{2}$ konvergieren deshalb sehr stark. Setzt man

$$\sin\frac{\beta}{2} = \frac{\beta}{2} - \cdots, \quad \cos\frac{\beta}{2} = 1 - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2\frac{1}{2} + \cdots$$

und vernachlässigt höhere als zweite Potenzen von $\frac{\beta}{2}$, so wird nach einigen Umformungen

$$\frac{\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\alpha\cos^2\frac{\beta}{2}} = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\frac{\beta}{2}}{\cos\alpha\cos^2\frac{\beta}{2}} = \cos\alpha - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2\mathrm{tg}\,\alpha\sin\alpha - \cdots$$

und wenn im zweiten Gliede noch genähert $C = \frac{\varrho'}{\beta'}$ genommen wird, so geben die Gleichungen (4) und (5)

$$\overline{J.M} = c + C \cdot l \cos \alpha - l \frac{\operatorname{tg} \alpha \sin \alpha}{4 \cdot C} \tag{6}$$

und

$$\left.\begin{aligned} D &= c \cdot \cos \alpha + C \cdot l \cdot \cos^2 \alpha - l \frac{\sin^2 \alpha}{4\,C} \\ h &= D \cdot \operatorname{tg} \alpha \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

In der Regel rechnet man nach den Näherungsformeln:

$$\left.\begin{aligned} (D) &= E \cdot \cos^2 \alpha \overset{\text{oder}}{=} E - E \sin^2 \alpha \\ (h) &= (D) \cdot \operatorname{tg} \alpha = E \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = E \cdot \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

und vernachlässigt demnach:

$$\left.\begin{aligned} D - (D) &= 2\,c \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \alpha - l \frac{\sin^2 \alpha}{4\,C} \\ \text{und} \\ h - (h) &= 2\,c \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \alpha - l \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha \sin^2 \alpha}{4\,C} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Die zweiten Glieder in (9) dürfen stets vernachlässigt werden, denn für die sehr selten vorkommende Neigung $\alpha = + 40^0$, sowie für $c = 0{,}5$ m, $C = 100$ und $l = 2{,}000$ m wird z. B.

$$D - (D) = + 0{,}089 - 0{,}002$$
$$h - (h) = + 0{,}075 - 0{,}001 .$$

Die ersten Glieder lassen sich, wenn nötig, sehr bequem aus dem kleinen Diagramm (Fig. 82) entnehmen.

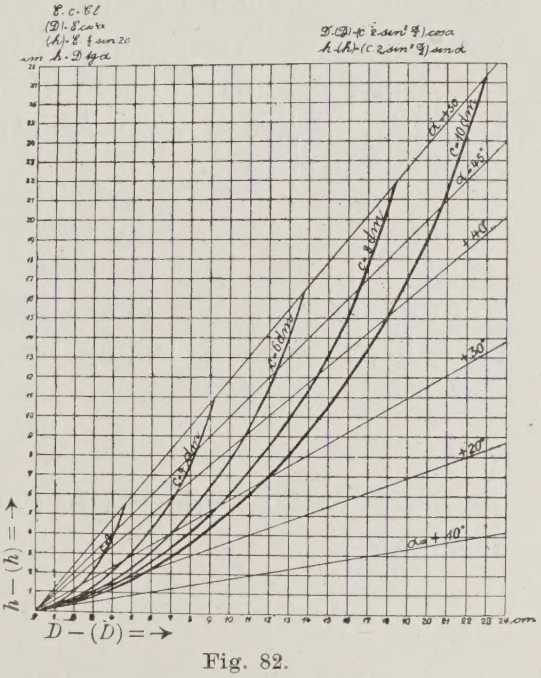


Fig. 82.

Zur Berechnung der Gleichungen (8) gibt es viele Hilfsmittel:

1. für einzelne scharfe Werte 4 bis 5 stellige logarithmische Rechnung und dazu aus dem Diagramme (Fig. 82) die Korrektionen (9) (auch die unter 2. genannte Zahlentafel von Jadanza kann zur scharfen Rechnung dienen).
2. Zahlentafeln, die die Größen $E \cdot \cos^2 \alpha$ und $E \cdot \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ enthalten z. B. die Jordanschen „Hilfstafeln für Tachymetrie“ (4. Aufl.) für alte Teilung mit der Ergänzung durch Dr. Reger und „Tachymetertafeln für zentesimale Winkelteilung“ von Jadanza (deutsche Ausgabe nach der 2. Aufl. besorgt von E. Hammer).
3. Besondere Rechenschieber, Diagramme u. dgl. (siehe die § 43, 45, 114).

§ 40. Genauigkeit der Okularfadendistanzmesser.

Die Entfernung wird bei Vernachlässigung der Additionskonstanten durch

$$E = C \cdot l \tag{1}$$

erhalten. Da hier C als fehlerfrei angenommen werden darf, so folgt aus dem Fehler dl im Lattenstücke der Entfernungsfehler

$$dE = C \cdot dl. \tag{2}$$

dl ist u. a. abhängig von der Entfernung E, der Güte und Vergrößerung des Fernrohrs, der Distanzlattenteilung und der Abschätzungsschärfe auf dem Teilungsintervalle. Auch die Abweichung der Latte von der richtigen Lage und das Schwanken der Latte während der Ablesung haben hauptsächlich bei steilen Zielungen einen verhältnismäßig großen Einfluß auf dl. Nach Lorber wird eine freihändig gehaltene, also schwankende, Latte mit dem Senkel auf $\pm 1^1/_3{}^0$ und mit der Dosenlibelle auf $\pm 25'$ richtig gestellt, während sie mit dem Lattenstativ und nahezu auch mit Spreizen bei Verwendung einer Dosenlibelle auf etwa $\pm 5'$ richtig und fest wird. (Die Wärmestrahlung des Bodens beeinflußt die untere Zielung meist stärker, weshalb die Latte in besonderen Fällen zur Erreichung größter Genauigkeit horizontal und senkrecht zur Mittelzielung auf Stative gelegt wird.)

Genähert darf man dl als Folge kleiner Zielfehler $\pm \delta$ betrachten. Werden zwei Ablesungen zur Bestimmung von l gemacht, dann ist nach § 4

$$dl = \pm \frac{\delta''}{\varrho''} \sqrt{2} \cdot E. \tag{3}$$

Wird aber mit dem einen Faden eine scharfe Nullmarke eingestellt, so daß nur eine Ablesung zu machen ist, dann wird

$$dl = \pm \frac{\delta''}{\varrho''} \cdot E. \tag{3 a}$$

Durch Einsetzen von (3) in (2) erhält man die Relativfehler der Entfernung:

$$\frac{dE}{E} = \frac{\delta''}{\varrho''} \sqrt{2} \cdot C \text{ bzw. } = \frac{\delta''}{\varrho''} \cdot C. \tag{4}$$

Durch Verkleinern von C (Vergrößern des distanzmessenden Winkels) kann demnach der Fehler kleiner gemacht werden.

In § 38 wurde aus 28 fehlerhaften Lattenablesungen mit Hilfe eines mittleren Fernrohres von etwa 20facher Vergrößerung der mittlere Fehler von C zu $\pm 0{,}035$ berechnet. Bei Vernachlässigung von c er-

hält man durch Differenzieren der Entfernungsgleichung $E = C \cdot l$ den bei einer Messung im Lattenstücke begangenen Fehler zu

$$dl = -\frac{E}{C^2} \cdot dC = \pm \frac{E}{100^2} \cdot (0{,}035 \cdot \sqrt{28}) = \pm 0{,}00001851 \cdot E.$$

Mit Gleichung (3) findet man damit $\delta'' = \pm 2{,}7''$ und mit Gleichung (4) bei dem Übergange zu mittleren Fehlern

$$m_E = \pm 0{,}1848 \cdot E = \pm \tfrac{1}{540} \cdot E$$

für Entfernungen von 20 bis 140 m.

Durch sehr viele sorgfältige Versuche wurde für ein größeres entfernungsmessendes Fernrohr mit 32facher Vergrößerung (388 mm Brennweite, 32 mm freie Objektivöffnung, $C \approx 100$) in Verbindung mit einer in Halbzentimeter geteilten und mit Hilfe einer Dosenlibelle freihändig lotrecht gehaltenen Latte bei mittleren Lichtverhältnissen auf nahezu horizontalem Boden zwischen 40 und 100 m der mittlere Zielfehler zu $\delta = \pm 1{,}8''$ gefunden. Ohne bzw. mit Benutzung einer Nullmarke wird damit der mittlere Entfernungsfehler

$$m_E = \pm \tfrac{1}{810} \cdot E \text{ bzw. } \pm \tfrac{1}{1140} \cdot E.$$

Mit schwachen Fernrohren steigt der Fehler bei wenig sorgfältiger Messung, Verwendung in Zentimeter geteilter Latten, großen Entfernungen und steilen Zielungen etwa bis auf das Drei- bis Vierfache der letzteren Zahlen an.

Zur scharfen Messung längerer Strecken, etwa einer $E = 300$ m langen Seite, stellt man zweckmäßig die Abstandslatte nahezu in der Streckenmitte auf und mißt die beiden Teilentfernungen E_1 und E_2. Ist m_E der mittlere Fehler der ganzen Strecke, m_{E_1} und m_{E_2} der der beiden gleichen Teile, so folgt nach § 4 und obiger Gleichung (4) $m_E = \sqrt{m_{E_1}^2 + m_{E_2}^2} = \pm \frac{k \cdot E}{\sqrt{2}}$. Würde aber die Latte im Endpunkte der ganzen Strecke aufgestellt, dann betrüge der mittlere Fehler $m'_E = \pm k \cdot E$; durch Zerlegung in zwei Teilstrecken wird deshalb der Entfernungsfehler $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7$ mal kleiner.

§ 41. **Der Hammer-Fennelsche Entfernungsmesser.**

Es gibt mehrere Entfernungsmesser, bei denen zwischen den „Distanzfäden“ auf einer lotrecht stehenden Latte unmittelbar ein der horizontalen bzw. vertikalen Entfernung (D bzw. h) proportionales Stück abgelesen wird (selbst reduzierende Distanzmesser).

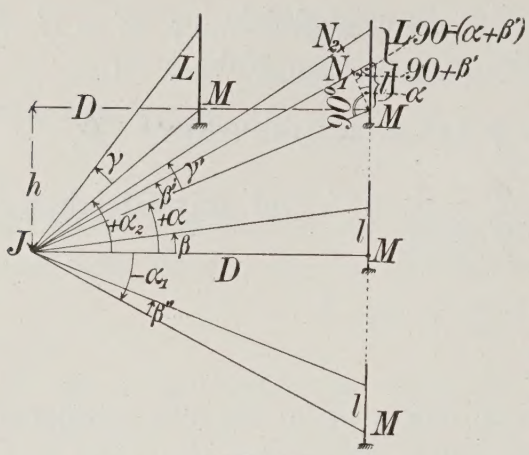


Fig. 83.

a) Wenn bei gleicher horizontaler Entfernung D zwischen den zwei „Distanzfäden“ auf der an verschiedenen Orten befindlichen, lotrecht stehenden Latte stets dasselbe Lattenstück l, das der Entfernung D proportional ist, gesehen werden soll, dann muß der distanzmessende Winkel β sich mit der Neigung α der Zielung verändern. Fällt (Fig. 83) der anallaktische Punkt des Distanzmessers nach J und ist C_1 die Proportionalitätskonstante, dann gilt

$$D = l \cdot C_1. \tag{1}$$

Aus Fig. 83 liest man sofort ab:

$$\overline{M.N_1} = \frac{l}{\cos \beta'} \cos (\alpha + \beta')$$

und

$$D = \overline{M.N_1} \operatorname{ctg} \beta' \cos \alpha = \frac{l \cdot \cos (\alpha + \beta') \cos \alpha}{\sin \beta'}, \tag{2}$$

folglich aus (1) und (2)

$$C_1 = \frac{\cos \alpha \cos (\alpha + \beta')}{\sin \beta'} \cdot$$

Die Auflösung nach β' liefert:

$$\operatorname{ctg} \beta' = \frac{C_1}{\cos^2 \alpha} + \operatorname{tg} \alpha \tag{3}$$

Dieser mit α veränderliche distanzmessende Winkel β' wird im Hammer-Fennelschen Entfernungsmesser durch Verändern des Fadenabstandes p in einem Porroschen Fernrohre mit der konstanten Äquivalentbrennweite φ hergestellt. Bedeutet deshalb p den Fadenabstand bei horizontaler Zielung ($\alpha = 0$), dann ist $\operatorname{ctg} \beta = \frac{D}{l} = \frac{\varphi}{p} = C_1$. Bei geneigter Zielung α wird der Fadenabstand zu p' und demnach wegen (3)

$$\operatorname{ctg} \beta' = \frac{\varphi}{p'} \quad \text{oder} \quad p' = \frac{\varphi}{\operatorname{ctg} \beta'} = p \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{1 + \frac{p}{2\varphi} \sin 2\alpha}. \tag{4}$$

b) Wenn bei gleicher Höhe h des Punktes M über J zwischen den beiden „Höhenfäden“ an der lotrecht stehenden Latte stets das gleiche Stück L, das der Höhe h proportional ist, gesehen werden soll, dann muß auch der höhenmessende Winkel γ mit der Neigung α der Zielung sich ändern (bei horizontaler Zielung $\overline{JM}$ also Null sein). Ist C_2 diese Proportionalitätskonstante, dann folgt

$$h = L \cdot C_2. \tag{1'}$$

In ähnlicher Weise wie oben wird

$$\overline{M.N_2} = \frac{L \cos(\alpha + \gamma')}{\cos \gamma'}$$

und

$$h = \overline{M.N_2} \operatorname{ctg} \gamma' \cdot \sin \alpha = L \frac{\cos(\alpha + \gamma') \sin \alpha}{\sin \gamma'}. \qquad (2')$$

Durch Vergleichen von (1') und (2') wird

$$C_2 = \frac{\cos(\alpha + \gamma') \sin \alpha}{\sin \gamma'} = \operatorname{ctg} \gamma' \sin \alpha \cos \alpha - \sin^2 \alpha$$

und daraus

$$\operatorname{ctg} \gamma' = 2 \frac{C_2 + \sin^2 \alpha}{\sin 2\alpha}. \qquad (3')$$

Ist q der veränderliche Fadenabstand, φ die konstante Äquivalentbrennweite, dann folgt

$$\operatorname{ctg} \gamma' = \frac{\varphi}{q} \quad \text{oder} \quad q = \varphi \cdot \operatorname{tg} \gamma'. \qquad (4')$$

Die Änderungen der Gl. (3) und (3') für negative Winkel (Tiefenwinkel) α sind leicht auffindbar. Die Konstanten betragen bei dem Hammer-Fennelschen Entfernungsmesser $C_1 = 100$, $C_2 = 20$.

Berechnet man aus (4) und (4') die Werte von p' und q und trägt diese (Fig. 84) von dem Kreisbogen MM aus zu den Winkel α in radialer Richtung auf, dann erhält man ein Diagramm, das auf photographischem Wege sehr scharf verkleinert auf ein Glasplättchen übertragen werden kann. Dieses in feste Verbindung mit dem einen Kippachsenlager gebrachte Diagramm wird durch zwei kleine Prismen und ein Linsensystem in die Fadenkreuzebene des Zielfernrohres so projiziert, daß der Bildkreis von MM beim Kippen des Fernrohrs stets einen in der Fadenkreuzebene aufgespannten Faden F (Fig. 86) berührt. Verschieden weit entfernte Zielpunkte werden im Fernrohre durch Verschieben des Objektivsystems des anallaktischen Fernrohres deutlich sichtbar gemacht.

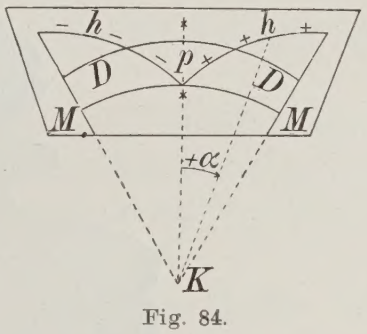


Fig. 84.

Die Verbindung des Hammer-Fennelschen Entfernung- und Höhenmessers mit einem Repetitionstheodoliten zeigt die Fig. 85; am kürzlich erworbenen Instrumente der Braunschweigischen Technischen Hochschule wurde außerdem ein Höhenbogen mit $\frac{1}{2}'$-Nonius angebracht. Das Fernrohr kann nach dem Herausheben aus den Kippachsenlagern durchgeschlagen und auch umgelegt werden. Das mit

einer geeigneten Beleuchtungsvorrichtung versehene Diagramm ist u. a. durch die Schräubchen h und d in radialer Richtung verschiebbar und drehbar, macht aber die Kippbewegung des Fernrohres nicht mit. Im Fernrohre befindet sich gegenüber dem Diagramme ein kleines

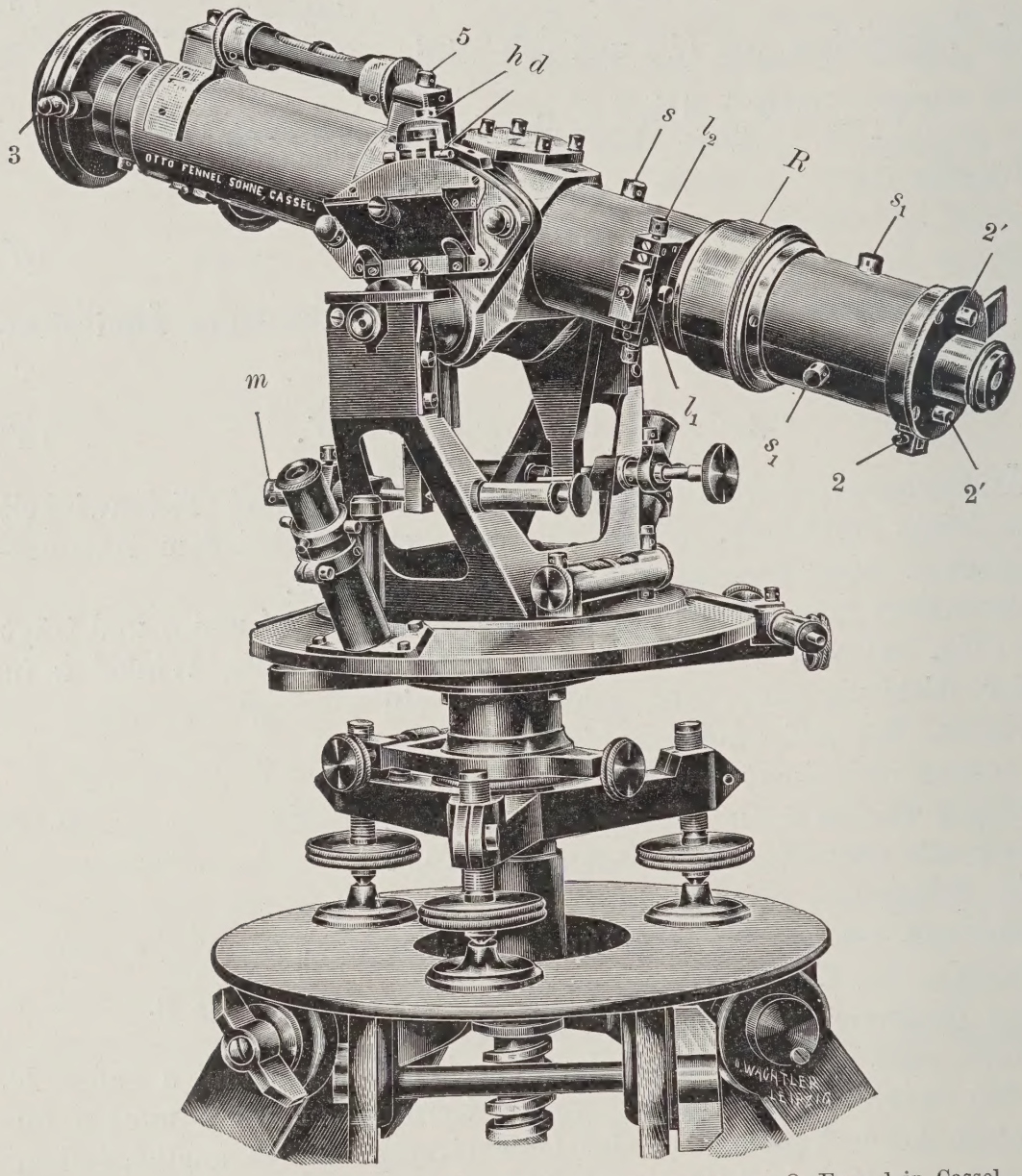


Fig. 85. Hammer-Fennels Tachymeterrepetitionstheodolit von O. Fennel in Cassel. Horizontalkreisdurchmesser 15 cm, $^1/_6{}^\circ$ Teilung, 2 Strichmikroskope. Fernrohrlänge 38 cm, Vergrößerung 19fach. Teilwert der Doppelschlifflibelle (Fernrohr) 30″, der Kreuzlibellen 90″.

festes Prisma, dann die kleine Projektionslinse, die mit den Schräubchen l_1 und l_2 nach links und rechts sowie nach oben und unten und, nach Lösung der Preßschrauben s, durch Drehen des Ringes R auch in der Fernrohrrichtung etwas verschiebbar ist. Fernerhin ist im

Okulare ein zweites Prisma derart befestigt, daß in ihm das von der Projektionslinse erzeugte Bild des Diagramms gesehen wird. Dieses zweite Prisma teilt das Gesichtsfeld in zwei Teile, seine Kanten stehen (bei horizontal gerichtetem Fernrohre) lotrecht und können mit den Schräubchen 2 ev. lotrecht gerichtet werden (nach Lösen der Schräubchen 2'); außerdem ist im Gesichtsfeld ein fester Faden F (Fig. 86) senkrecht zur Prismenkante ausgespannt, der beim Kippen des Fernrohres stets den Kreisbogen MM des Diagramms in der Prismenkante berührt. Nach Lösen der Preßschrauben s_1 kann der ganze Okularkopf (mitsamt dem zweiten Prisma und dem Faden) etwas in der Fernrohrrichtung verschoben werden, um ein deutliches Bild des Diagramms am Faden F zu erhalten.

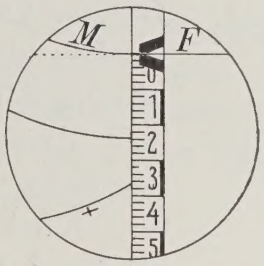


Fig. 86.

Den Anblick der lotrecht stehenden, durch Striche in Zentimeter geteilten Latte mit dem nach oben gekippten Fernrohre zeigt die Fig. 86. Die Ablesungen sind $l = 0{,}238$ und $L = +0{,}365$, so daß sich $D = 100 \cdot l = 23{,}8$ und $h = 20 \cdot L = +7{,}30$ ergibt. Bei mittleren Entfernungen werden die horizontalen Entfernungen bis auf einige Dezimeter und die Höhenunterschiede etwa auf 1 dm richtig gefunden.

Damit mit dem beschriebenen Instrumente richtig gemessen werden kann, müssen folgende Berichtigungen ausgeführt sein:

1. Lotrechtstellung der Umdrehachse mit Hilfe der Kreuzlibelle auf der Alhidade (s. § 19).
2. Sehr genäherte Vertikalstellung der im Okular sichtbaren Prismenkante mit Hilfe der Schräubchen 2 (Anzielen eines Punktes mit der Prismenkante und Kippen des Fernrohres, wobei der Punkt angezielt bleiben muß).
3. Senkrechtstellung der Ziellinie (durch den Schnittpunkt des Fadens F mit der Prismenkante) zur Fernrohrkippachse durch Seitwärtsverschieben des Objektives mit Hilfe der Schräubchen 3 (Anzielen eines Punktes; vorsichtiges Umlegen des Fernrohrs in den Lagern nach § 24, 1. B.).
4. Horizontallegung der Kippachse durch Heben bzw. Senken eines Lagers nach § 24, 3.
5. Parallelstellung der Achse der Nivellierlibelle zur Ziellinie durch den festen Faden mit dem Schräubchen 5 durch Nivellieren aus der Mitte und aus einem Ende nach § 20.
6. Verschieben des Diagramms mit den Schräubchen d und h (ev. auch mit dem Mikrometer m) und sodann der Projektionslinse

mittels der Schräubchen l_1 und l_2 derart, daß beim Kippen des Fernrohrs die Kreislinie des Diagramms stets vom festen Faden berührt wird und daß bei einspielender Nivellierlibelle und lotrecht stehender Umdrehachse die Prismenkante im Okular durch den mit zwei Sternchen bezeichneten Diagrammhalbmesser geht (durch Verschieben des Nonius am Höhenbogen wird gleichzeitig ein etwaiger Indexfehler beseitigt).

7. Die Konstanten für die Entfernung- und Höhenmessung werden auf 100 bzw. 20 durch Verschieben der Projektionslinse in Richtung des Fernrohrs durch Drehen am Ringe R (nach vorheriger Lösung von s) und sogleich nachfolgendes deutliches Sichtbarmachen des Diagramms durch Verschieben des Okulares (nach Lösung der Schräubchen s_1) eingestellt. Zu diesem Zwecke mißt man etwa 100,00 m wagerechte Entfernung z. B. mit Meßlatten ab, stellt die Latte im Endpunkte dieser Strecke lotrecht auf und führt die zwei angegebenen Verschiebungen solange aus, bis $l = 1{,}000$ m abgelesen wird, wodurch gleichzeitig die Höhenkonstante auf 20 gestellt ist.

III. Abschnitt.

Der Meßtischapparat und sein Gebrauch zur Herstellung von Lage- und Höhenplänen.

§ 42. Der Meßtischapparat; seine Prüfung und Berichtigung.

Der zur graphischen Planaufnahme dienende Meßtischapparat besteht aus

1. dem eigentlichen Meßtische mit der etwa 60/60 cm großen, gut ebenen Meßtischplatte, die mit Zeichenpapier bespannt wird;
2. der Lotgabel zur Einlotung von auf der Meßtischplatte gegebenen Punkten in die entsprechenden Feldpunkte und umgekehrt und einer Dosenlibelle zum Wagerechtstellen der Tischfläche;
3. dem Meßtischaufsatz oder der Kippregel;
4. den Zeichengeräten, wie Zirkel, verjüngter Maßstab (Transversalmaßstab), Zeichendreieck usw.

Die Meßtischkonstruktionen sind sehr verschieden; wesentlich ist daß die verhältnismäßig große Meßtischplatte durch Anziehen der Klemmschrauben eine möglichst unveränderliche Lage erhält; deshalb muß die Verbindung zwischen Stativ und Platte (Meßtischkopf) durch kräftige Konstruktionen (große Querschnitte) erfolgen. Die Tischplatte muß horizontal gelegt werden können und drehbar sein; bei Meßtischen zum Aufnehmen in großem Maßstabe soll sie außerdem nach allen Seiten um mehrere Zentimeter verschiebbar sein. Ein vorzüglicher Meßtisch ist der Geyersche Ringtisch (Fig. 87), wie er von M. Sendtner in München ausgeführt wird. Das Stativ trägt mit den drei Fußschrauben s durch Vermittlung zylindrischer Lagerbolzen m den zweiteiligen Ring t, in dem der mit Zahnkranz versehene Ring i drehbar ist. Der Trieb G greift mit einem Zahnrädchen in den Zahnkranz

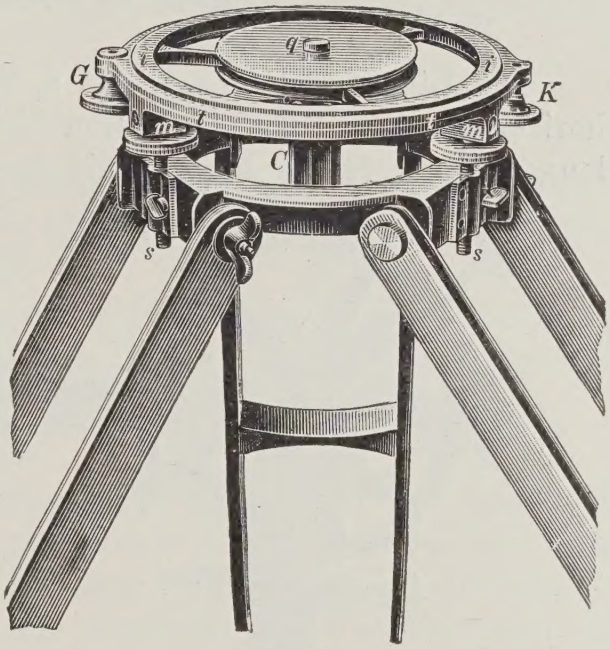


Fig. 87.
Geyerscher Meßtisch von M. Sendtner in München.

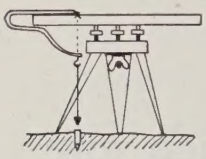


Fig. 88.

ein, durch Anziehen der Klemmschraube K wird der Ring i zwischen den zwei Teilen t festgepreßt. Mit Hilfe der Zentralschraube Cq wird die Meßtischplatte, die um die Ausschnittgröße auf dem Ringe i verschoben werden kann, an diesem befestigt.

Die Lotgabel besteht aus einem Bügel, an den unten ein Senkel angehängt werden kann. Ihren Gebrauch deutet Fig. 88 an.

Das Meßtischblatt muß horizontal gelegt werden können und außerdem soll es drehbar und nach allen Seiten etwas verschiebbar sein, damit eine auf dem Tischblatte gegebene Richtung in die Vertikalebene der entsprechenden Feldrichtung (Orientieren) und ein auf dem Meßtisch gegebener Punkt in das Lot des entsprechenden Feldpunktes (Zentrieren) gebracht werden kann. Die Aufgabe löst man am einfachsten durch Versuche, wobei zweckmäßig in der angegebenen Reihenfolge vorgegangen wird. Die scharfe Orientierung kann erst nach Anlegen der Kippregel an die auf dem Tischblatte gegebene Richtung durch Drehen der Tischplatte erfolgen.

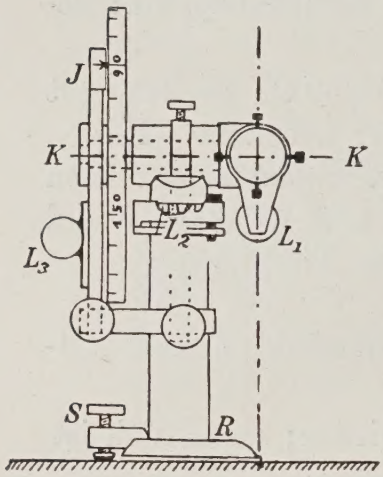


Fig. 89.

Die Kippregel (Figuren 89 u. 90) besteht aus einem um eine horizontale Achse KK kippbaren Zielfernrohre und einem etwa 6 dm langen Lineal R (der Regel), mit dessen Hilfe die einzelnen Zielungen auf das Tischblatt aufgezeichnet werden. Zweckmäßig ist das Zielfernrohr durchschlagbar eingerichtet und mit Distanzmeßvorrichtung versehen; zum Zwecke schärferer Höhenwinkelmessung (auf Bogenminuten) ist

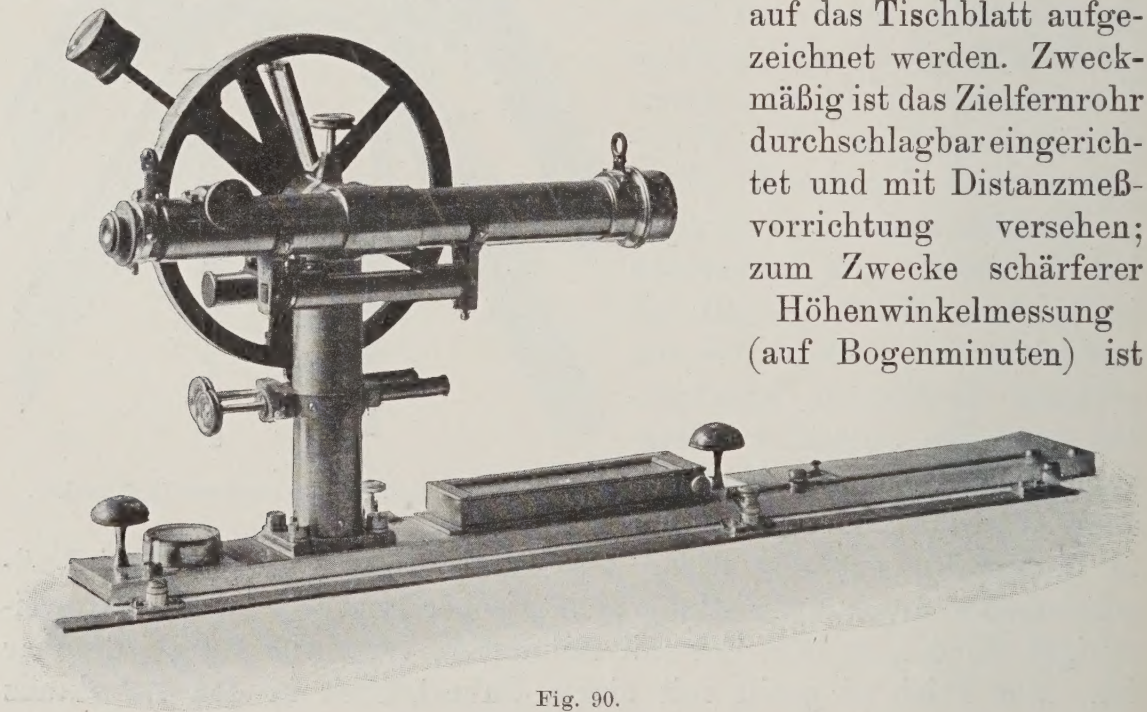


Fig. 90.

ein Höhenbogen mit Libellenalhidade L_3, J und den hierzu nötigen Klemm- und Mikrometerwerken versehen. Zur leichten Horizontallegung der Ziellinie dient eine mit dem Fernrohr fest verbundene Nivellierlibelle L_1 (zweckmäßig Doppelschlifflibelle) und zur Horizontallegung der Kippachse die Libelle L_2 und die Stellschraube S. Mit einer auf dem Lineal befestigten Orientierungsbussole, deren Nullinie nahezu parallel zur Ziehkante des Lineals liegt, kann das Meßtischblatt auch genähert gegen die Himmelsrichtungen orientiert werden. Die in Fig. 90 abgebildete Kippregel wurde von Günther und Tegetmeyer in Braunschweig hergestellt; das Lineal ist aus Magnalium (und mit einer entbehrlichen Parallelführung versehen), an passenden Stellen sind aus der Unterfläche etwas hervorragende Elfenbeinköpfe angeordnet, so daß die Kippregel beim Gebrauche auf diesen Köpfen und auf der ähnlich ausgerüsteten Schraube S aufliegt, um die Beschmutzung der Zeichnung beim Verschieben der Kippregel möglichst zu vermeiden. Das distanzmessende Fernrohr besitzt etwa 24fache Vergrößerung, $c = 0{,}47$ m und $C = 100{,}0$; sämtliche Libellen haben annähernd $20''$ Teilwert.

Die wichtigsten Linien oder Achsen an der Kippregel sind:

1. die durch den Schnittpunkt der Mittelfäden bestimmte Fernrohrziellinie;
2. die Kippachse;
3. die gerade Linealkante.

Damit die ausschließlich in einer Fernrohrlage mit derselben Kippregel gemessenen Horizontalwinkel bei angenähert horizontaler Tischfläche richtig werden, muß:

a) die Ziellinie zur Kippachse senkrecht stehen (Kollimationsfehler);
b) die Kippachse bei einspielender Kippachsenlibelle L_2 horizontal liegen (Neigungsfehler);
c) die Linealkante gerade sein.

Zur Untersuchung des Kollimationsfehlers wird ein nahezu im Horizont des Instrumentes gelegener Punkt P angezielt und die Linealrichtung durch Einstecken zweier feiner Nadeln an der Ziehkante bezeichnet. Nach Durchschlagen des Fernrohres und vorsichtigem Anlegen des Lineals auf der anderen Seite der beiden Nadeln zeigt sich die dem doppelten Kollimationsfehler entsprechende Abweichung von P, die zur Hälfte durch horizontales Verschieben des Fadenkreuzes, zur anderen Hälfte durch Drehen der Tischplatte beseitigt wird.

Zur Untersuchung der Kippachsenneigung wird bei einspielender Kippachsenlibelle L_2 ein hoch gelegener Punkt P angezielt und das

Lineal wie vorhin fixiert. Nach Durchschlagen des Fernrohrs, Wiederanlegen an den Nadeln und Einspielenlassen von L_2 entspricht die sich zeigende Abweichung dem doppelten Einflusse der Kippachsenneigung (§ 24. 3). Die Hälfte ist deshalb durch Neigen der Kippachse mit Hilfe der Schraube S, die andere Hälfte an den Korrektionsschräubchen der Libelle L_2 (bis sie wieder einspielt) zu verbessern.

Zieht man längs des Lineals eine scharfe Nadellinie, so darf sich nach dem Umlegen des Lineals bei seinem Verschieben längs der Linie keine Abweichung zeigen.

Damit scharfe Höhenwinkel (auf etwa 1′) erhalten werden, muß

d) die Mittelzielung parallel zur Achse der Nivellierlibelle L_1 sein und

e) bei horizontaler Mittelzielung und einspielender Höhenalhidadenlibelle L_3 muß auf dem Höhenkreis 90^0 (oder 0^0) abgelesen werden.

Die Parallelstellung der Nivellierlibellenachse oder der Achsen der Doppelschlifflibelle mit Hilfe der Korrektionsschräubchen an der Libelle zur Mittelzielung ist in § 20 ausführlich besprochen.

Wird hierauf die Mittelzielung durch Einspielenlassen von L_1 horizontal gelegt, der Index am Höhenkreis dann auf 90^0 (oder 0^0) gestellt, dann ist der sich zeigende Ausschlag der Höhenalhidadenlibelle L_3 an deren Korrektionsschräubchen wegzuschaffen.

An Stelle des gewöhnlichen Fernrohres mit Höhenbogen (oder -kreis) kann auch eine Projektionsvorrichtung oder ein selbstreduzierender Entfernungsmesser (nach § 39 oder 41) an der Kippregel angebracht werden.

§ 43. Kleine Lageplanaufnahme mit Benutzung des entfernungsmessenden Fernrohres.

Es soll ein wagerechter Plan z. B. im Maßstabe $M = 1 : 5000$ gefertigt werden.

Die Genauigkeit der Darstellung auf Zeichnungen kann annähernd zu $a = 0{,}05 \div 0{,}1$ mm angenommen werden. Die zu messenden Entfernungen sollen deshalb auf $\frac{1}{M} \cdot a = 0{,}25 \div 0{,}5$ m sicher sein. Mit einem etwa 25fach vergrößernden guten Fernrohre mit der Konstanten $C = 100{,}0$ kann deshalb nach dem in § 40 Gesagten auf einer Zentimeterlatte bei gutem Lichte (ohne Benutzung einer Nullmarke) bis auf etwa 200 m abgelesen werden. Liegen die aufzunehmenden Punkte innerhalb eines Kreises von etwa 200 m Halbmesser, dann wird der Meßtisch nahezu in der Mitte der als übersichtlich angenommenen

Fläche fest aufgestellt, die Tischplatte horizontal gerichtet und festgeklemmt. Der auf der Zeichenfläche angenommene Punkt a (Fig. 91) wird auf das Feld abgelotet und dort etwa mit dem Pflocke A bezeichnet. Ist von A aus ein möglichst weit entfernter Punkt P sichtbar, dann wird das Kippregellineal an a angelegt und P angezielt, worauf am Rande des Tisches zwei feine Nadellinien pp (Anschnitte) eingerissen werden. (Sollte während der folgenden Arbeiten die Tischplatte eine Veränderung erleiden oder soll der Tisch wiederholt über A aufgestellt werden, dann wird die Zeichnung auf der Meßtischplatte durch Zentrieren von a über A derart, daß dabei pp genähert in Richtung AP liegt, Horizontallegen der Tischplatte, Anlegen der Kippregel an den Anschnitten pp und Anzielen von P wieder auf etwa $\pm 15'' \div 20''$ genau orientiert; derartige Anschnitte heißen deshalb auch Orientierungslinien.)

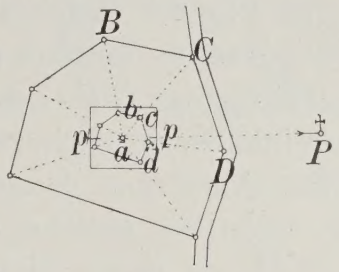


Fig. 91.

Der Gehilfe hält dann in Punkt B die Latte lotrecht, nach Anlegen des Kippregellineals an a und Anzielen der Latte wird auf

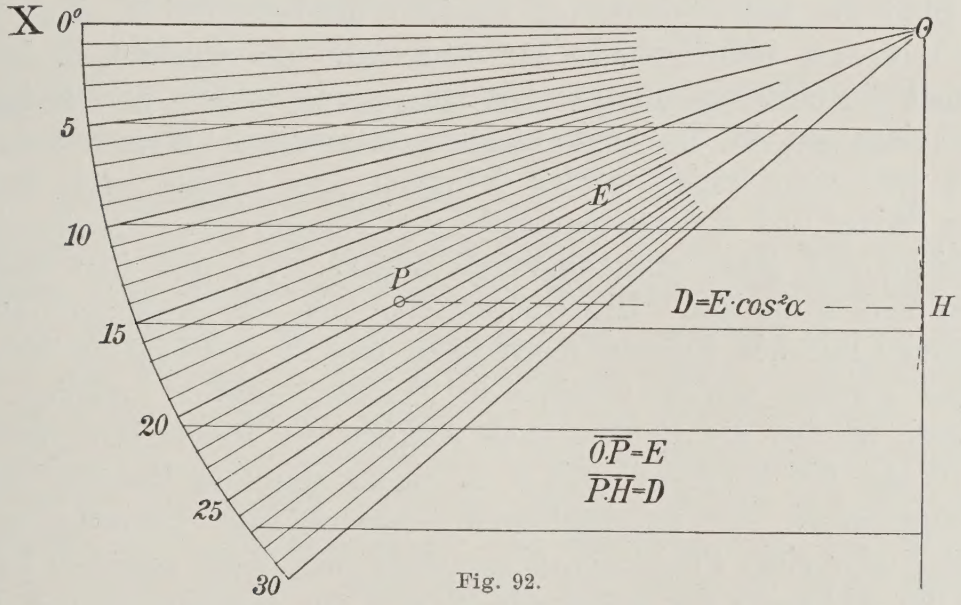


Fig. 92.

dieser das Lattenstück L (unter Berücksichtigung von c) und am Höhenbogen der Kippregel (ungefähr) der Neigungswinkel α der Mittelzielung abgelesen, worauf der Gehilfe abgewinkt wird und nach dem Punkte C weitergeht. Aus einem nach § 15 im verjüngten Maßstabe $M \cdot C$ (worin C die Multiplikationskonstante des Distanzmessers, z. B. 100,0, und M das Verjüngungsverhältnis des zu fertigenden Planes sind), also im vorliegenden Falle in $\frac{1}{5000} \cdot 100{,}0 = \frac{1}{50}$ der Lattenstücke L gezeichneten Transversalmaßstabe (Fig. 42a) entnimmt man für das

abgelesene Lattenstück L sogleich als Zirkelöffnung die Hilfsgröße $E = (MC) \cdot L$ (s. § 39). Die vom Punkte a aus an der Ziehkante der Kippregel abzutragende horizontale Strecke ergibt sich nach § 39 zu $D = E\cos^2\alpha$ und diese Strecke D erhält man mit dem Diagramm von Fig. 92 sogleich als Zirkelöffnung. Der Winkel $XOP = y$ dieses Diagramms beträgt nicht etwa $20^0\,0'$, sondern er ergibt sich aus der Bedingung $\overline{OP} \cdot \cos y = \overline{OP} \cdot \cos^2\alpha$ oder $y = \arccos(\cos^2\alpha)$. Diese Winkelwerte y sind für einige runde Werte von α ($5^0, 10^0, 15^0, \ldots$) zu berechnen und danach ist das Diagramm aufzutragen.

In der gleichen Weise erfolgt die Aufnahme der weiteren Punkte $C, D, \ldots$, deren Bilder $c, d, \ldots$, im Plane schließlich richtig zu verbinden sind.

Bemerkungen: Von Zeit zu Zeit muß die Orientierung des Tisches durch Anlegen an den Anschnitten pp und Anzielen von P geprüft werden.

Wenn steile Zielungen vorkommen, muß die Kippachse mit der Neigungsschraube S (Fig. 89) vor jedem scharfen Anzielen eines Punktes horizontal gerichtet werden.

Sind die aufzunehmenden Figuren unübersichtlich, dann begeht man mit dem Gehilfen vor der Aufnahme die Grenzen u. dgl., bezeichnet die einzelnen Punkte mit Nummernspachteln und fertigt eine Handskizze an, in die auch kleinere Messungen (Wegbreiten, Haustiefen usf.) eingetragen werden können. Der Gehilfe wird dann mit dieser Skizze und der Abstandslatte von Nummer zu Nummer herumgeschickt und jeder aufgenommene Punkt wird auf dem Meßtische fortlaufend numeriert. Die Übereinstimmung der Nummern auf dem Meßtische mit den Feldnummern kann hierbei zweckmäßig bei jedem fünften Punkte durch vereinbarte Zeichen geprobt werden. Zum Schlusse werden die Punkte nach Angabe der Handskizze verbunden.

Wenn die Kippregel mit z. B. einem Hammer-Fennelschen Entfernungsmesser zur unmittelbaren Ablesung der horizontalen Entfernung oder einer Projektionseinrichtung nach § 39 versehen ist, dann fällt die Ablesung der Höhenwinkel und die Berechnung von D fort.

§ 44. Größere Lageplanaufnahme.

Verwendung der Orientierungsbussole bei Aufnahmen in kleinen Maßstäben. Zugmessung mit Sprungständen.

Das zu vermessende Gebiet teilt man in einzelne Meßtischblätter ein; im Aufnahmemaßstab $M = 1 : 5000$ würde z. B. einem quadratischen Blatte von 500,0 mm Seitenlänge eine quadratische Feldfläche

von 2,5 km Seitenlänge entsprechen. Auf jedem Meßtischblatte sollen zwei möglichst entfernte Punkte a und b aufgetragen sein (Fig. 93), deren entsprechende Punkte A und B im Gelände bezeichnet sind. Diese Punkte a und b werden durch Auftragen der rechtwinkligen Koordinaten von A und B inbezug auf die Blatträndern oder auf irgend eine andere Weise (Auftragen der zwischen A und B gemessenen Strecke) erhalten. Durch a und b sind die Grundlinie $\overline{ab}$ und die Anschnitte $a-b$ an den Blatträndern bekannt. Der Abstand $\overline{A.B}$ sei so groß, daß mit dem vorhin behandelten Verfahren die Blattfläche von diesen Punkten aus nicht vollständig aufgenommen werden kann. Dann müssen zu diesem Zwecke zunächst noch weitere Punkte $C, D, E, F, \ldots$ bestimmt werden. Dies erfolgt durch

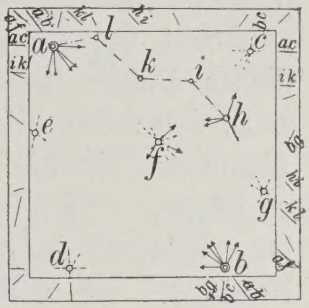


Fig. 93.

A. Vorwärtsabschneiden (Visieren und Schneiden),

B. Seitwärtsabschneiden,

C. Rückwärtsabschneiden und

D. Polygonzugmessung oder Polygonisieren.

Insofern durch diese Messungen neue Meßtischstandorte (Stationen) bestimmt werden, bezeichnet man sie häufig als Stationieren.

A. Vorwärtsabschneiden.

Von A und B aus seien die Punkte C, D, E und F sichtbar. Nachdem diese Punkte im Felde mit Signalen bezeichnet sind, stellt man den Meßtisch z. B. zunächst in A auf, zentriert a über A, horizontiert die Tischplatte und orientiert ab scharf in AB durch Anlegen der Kippregel an die Anschnitte ab und Anzielen von B. Hierauf werden alle von A aus sichtbaren Punkte angezielt, die Visierstrahlen mit scharfen Nadel- oder Bleilinien gezogen und an den Rändern die Anschnitte $ac, \ldots af$ bezeichnet. Der Meßtisch wird sodann nach B gebracht, dort zentriert, horizontiert und nach A scharf orientiert, worauf die von B aus sichtbaren Punkte C, D, E, F und G angezielt und die entsprechenden Schnittstrahlen und Anschnitte an den passenden Stellen gezogen werden. Die Schnittpunkte entsprechender Strahlen liefern die gesuchten Punke c, d, e und f.

Man sieht sofort ein, daß dieses Verfahren auch zur Aufnahme übersichtlicher Figuren ohne Benutzung des abstandmessenden Fernrohres verwendet werden kann, wenn nur eine geeignete Grundlinie $\overline{AB}$ gemessen wird.

B. Seitwärtsabschneiden.

Der Punkt f würde durch Vorwärtsabschneiden von A und B aus wegen der spitzen Schnitte der ihn bestimmenden Strahlen sehr unsicher oder überhaupt nicht erhalten. Schätzt man in diesem Falle zunächst die genäherte Lage von f auf dem Planbilde, dann kann dieser Punkt über F des Feldes zentriert und der Tisch mit Hilfe z. B. des Anschnittes af scharf nach A orientiert werden. Wenn von F aus das Signal in C sichtbar ist, dann wird die Kippregel an Punkt c angelegt, C angezielt und diese Zielung auf dem Tische gezogen. Diese liefert dann durch den Schnittpunkt mit dem Strahle af den Punkt f. Ist z. B. von F aus auch D sichtbar, dann wird durch den in der gleichen Weise erhaltenen Seitwärtsschnitt df die richtige Bestimmung von d und f geprüft. Durch die Zielung nach G kann g als Vorwärtsschnitt von B und F aus erhalten werden, wenn G von B aus angezielt (angeschnitten) wurde.

C. Rückwärtseinschneiden.

Die beiden vorher genannten Verfahren erfordern zur Bestimmung eines Punktes je zwei Meßtischaufstellungen, das Rückwärtseinschneiden nur eine, aber es müssen auf dem zu bestimmenden Punkte mindestens drei gegebene Punkte sichtbar sein.

Von dem zu bestimmenden Punkte H aus seien die gegebenen Punkte C, G und F sichtbar. Der Meßtisch wird dann nach H gebracht, die genäherte Lage von h etwa in h_1 (Fig. 94) auf dem Plane geschätzt, h_1 über H zentriert und nach Anlegen der Kippregel z. B. an $h_1 g$ und Anzielen von G genähert orientiert. Zielt man nun in derselben Weise wie beim Seitwärtsabschneiden die Punkte F und C an und zeichnet diese Seitwärtsstrahlen mit Bleistift auf, dann schneiden sich diese wegen der fehlerhaften Orientierung des Tisches nicht in einem Punkte, sondern bilden ein sog. fehlerzeigendes Dreieck 1, 2, 3. Ändert man nun die Orientierung des Tisches um den Winkel δ (nach Drehen der Tischplatte um δ) und zielt wieder die drei Punkte C, G, F an, dann erhält man in derselben Weise ein zweites fehlerzeigendes Dreieck 1′, 2′, 3′. Der gesuchte Punkt h ergibt sich als Schnittpunkt der in Fig. 94 angedeuteten drei geometrischen Örter (Kreise über den Sehnen fc, cg und gf mit den Peripheriewinkeln fhc, chg und ghf), die für die in Frage kommenden kurzen Strecken näherungsweise als Gerade angenommen werden dürfen. Irgendein weiterer sichtbarer Punkt, z. B. E,

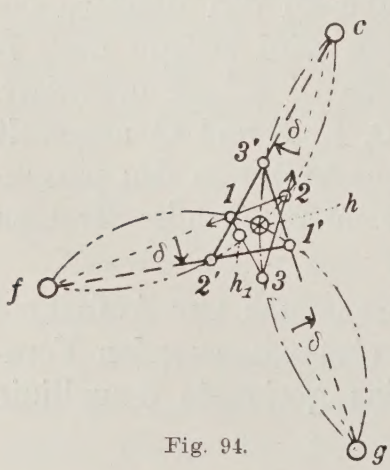


Fig. 94.

dient zur Prüfung der Punktbestimmung. Die unter A), B) und C) aufgeführten Punktbestimmungsarten werden oft als graphische Triangulierung bezeichnet. Schnittwinkel kleiner als etwa 30° liefern hierbei unscharfe Punkte und sollen nur zur Probe genommen werden.

D. Polygonisieren.

Soll der Polygonzug H, I, K, L, A (Fig. 93) von H aus aufgenommen werden, dann wird der Meßtisch in H zentriert und nach einer möglichst langen Orientierungslinie, z. B. durch Anlegen der Kippregel an hf und Anzielen von F, orientiert. Nach Anlegen des Kippregellineals an h und Anzielen des Punktes I werden die Anschnitte hi am Rande des Blattes angegeben und sodann wird die z. B. mit Meßlatten gemessene Polygonseite HI im Maßstabe des Planes von h aus angetragen. Der Meßtisch wird nach I gebracht, dort zentriert, mit den Anschnitten hi nach H orientiert, hierauf K angezielt, die Randmarken ik angegeben und die gemessene Strecke IK angetragen, wodurch k erhalten wird. In derselben Weise wird fortgefahren. Wegen der unvermeidlichen Messungsfehler wird der von l aus aufgenommene Endpunkt a' des Zuges in der Regel von dem Punkte a etwas abweichen. Diesen kleinen Abschlußfehler verteilt man auf die einzelnen Punkte i, k und l. Die Polygonseiten werden häufig mit dem Okularfadendistanzmesser (ev. Mittel aus einigen Bestimmungen) gemessen.

Wenn in sehr kleinem Maßstabe, z. B. 1 : 10000 oder 1 : 25000, aufgenommen wird, kann die auf der Kippregel angebrachte Orientierungsbussole mit großem Vorteile zur Orientierung des Tisches verwendet werden, weil in diesen Maßstäben ein kleiner Orientierungsfehler von etwa $\pm$ 0,2° den Endpunkt einer Polygonseite nur sehr wenig quer zur Seite verschiebt (z. B. bei 300 m Zugseitenlänge und $\pm$ 0,2° Richtungsfehler wird im Maßstabe 1:10000 der Endpunkt nur um $\pm \frac{1}{10000} \cdot \frac{0{,}2^0}{57{,}3^0} \cdot 300$ m $= \pm$ 0,00010 m seitlich verschoben). Zur leichten Verwendung der Orientierungsbussole bringt man zunächst auf dem Meßtischblatte eine magnetische Orientierungslinie an, indem man nach Zentrierung und Orientierung des Meßtisches nach scharf bestimmten Punkten die Kippregel auf dem Tischblatte bis zum Einspielen der mit ihr verbundenen Magnetnadel dreht. Diese Lage des Lineals wird auf dem Tischblatte mit Anschnitten bezeichnet und diese bilden dann die magnetische Orientierungslinie. Legt man die Kippregel nach Aufstellen des Tisches über einem beliebigen Punkte an diese Linie an und dreht die Tischplatte, bis die Nadel einspielt, dann ist der Tisch orientiert (wenn die Richtung des magnetischen Meridians für die Breite des Blattes dieselbe bleibt).

Man sieht, daß der Tisch bei Benutzung der Orientierungsbussole zum Zwecke der Polygonzugmessung im obigen Beispiele D sogleich nach I gebracht und dort näherungsweise zentriert werden darf; nach Anlegen der Kippregel an die magnetische Orientierungslinie und Drehen der Tischplatte, bis die Magnetnadel einspielt, ist der Tisch in I orientiert. Wird dann die Kippregel an h angelegt und H angezielt, so braucht nur noch von h aus am Lineal die gemessene Strecke $\overline{HP}$ aufgetragen zu werden, um i zu finden. Nach Anzielen von K, wobei das Lineal an i anliegt, und Auftragen der Strecke $\overline{IK}$ ist k auf dem Blatte bestimmt. Der Meßtisch wird dann sogleich nach L gebracht — der Punkt K wird also übersprungen — wo sich dieselben Vorgänge wiederholen. Das Angeben der Anschnitte zwischen den Polygonpunkten hätte hier keinen Zweck. Diese Meßart wird als Messung mit Sprungständen bezeichnet.

§ 45. Aufnahme von Höhenplänen (Meßtischtachymetrie).

Auf dem Meßtischblatte ist die Lage eines Punktes A gegeben, dessen Höhe Q über einer Vergleichsfläche, z. B. der Meeresfläche, bekannt ist; außerdem ist die Richtung (durch Anschnitte) nach einem von A aus sichtbaren Punkte P (oder eine magnetische Orientierungslinie) auf dem Blatte bezeichnet. Die Lage und Höhe von Punkten, die über die aufzunehmende Fläche beliebig zerstreut sind, ist zu bestimmen, um danach z. B. die Kurven gleicher Höhe etwa in Abständen von 2 zu 2 m — die sog. Schichtenlinien oder Höhenlinien — konstruieren zu können.

Der Maßstab für die Lagedarstellung möge $M = 1 : 5000$ sein und es soll vom Höhenmessen mit horizontal gelegter Ziellinie (Nivellieren, siehe Kap. 14) zunächst Abstand genommen werden.

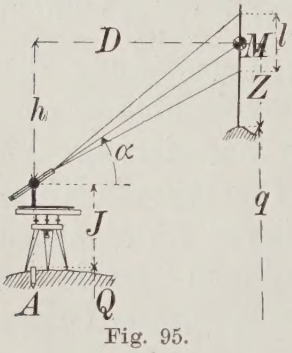


Fig. 95.

Der Meßtisch wird über A horizontal und zentrisch aufgestellt und durch Anlegen der vollständig berichtigten, zum Entfernungs- und Höhenwinkelmessen eingerichteten Kippregel (§ 42) an die Orientierungslinie (Anschnitte) und Anzielen von P orientiert. Mißt man (Fig. 95) die Höhe J der Kippachse über A, dann ist die Kippachsen- oder Instrumentenhöhe $Q + J$. Im Abstande Z vom Aufsatzpunkte der Abstandslatte wird an dieser eine Zielmarke M angebracht (oder gedacht), die zum Zwecke der auf eine (oder einige) Minute scharfen Höhenwinkelmessung stets mit dem Mittelfaden angezielt wird. Ist h die Höhe (oder Tiefe)

dieser Zielmarke über dem Instrumentenhorizont, q die gesuchte Höhe des Aufsatzpunktes der lotrechten Abstandslatte, dann folgt:

$$q = Q + J + h - Z. \tag{1}$$

Häufig nimmt man $Z = J$, demnach

$$q = Q + h. \tag{1'}$$

Der Gehilfe stellt nun im aufzunehmenden Punkte 1 die Latte lotrecht auf. Nach Anlegen der Kippregel am Bildpunkte von A und Anzielen der Latte wird der Mittelfaden zunächst ungefähr auf die Zielmarke gerichtet, dann wird das zwischen den Abstandsfäden gesehene Lattenstück l bzw. L abgelesen und unmittelbar darauf (ohne aufzublicken) der Mittelfaden auf die Zielmarke M eingestellt. Der Gehilfe darf dann abgewinkt werden und geht nach dem zweiten Punkte weiter. Nachdem die Höhenalhidadenlibelle zum Einspielen gebracht ist, wird der Höhen-(Tiefen-)winkel α der Mittelzielung am Höhenkreis auf etwa 1′ abgelesen. (Punktnummer, L und α können auch in einem Feldbuche aufgeschrieben werden.)

Mit dem verjüngten Maßstabe und dem Diagramme nach § 43 findet man aus l bzw. L die Hilfsgröße E und mit α die horizontale Entfernung D sogleich als Zirkelöffnung, so daß damit der Bildpunkt von 1 im Plane aufgetragen werden kann. Die diesem Punkte beizuschreibende Höhe q folgt aus Gl. (1), worin nach § 39

$$h = D \operatorname{tg} \alpha \quad \text{oder} \quad = E \cdot \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha. \tag{2}$$

Unter Benutzung eines zweiten Diagramms und eines Höhenmaßstabes kann h und weiterhin sogleich $q = (Q + J - Z) + h$ mit dem Zirkel berechnet werden, wie Fig. 96 andeutet. Es sei z. B. $Q + J - Z = 97{,}5$ m. Mit $\alpha = + 3^0\,45'$ wird für die in dem Zirkel befindliche horizontale Entfernung D mit dem Diagramm II und Höhenmaßstabe $h = + 10{,}1$ oder sogleich $q = 97{,}5 + 10{,}1 = 107{,}6$ gefunden.

Derselbe Messungs- und Rechnungsvorgang wiederholt sich auf allen weiteren Punkten 2, 3, . . ., n.

Da die Höhenunterschiede h meist schärfer bestimmt werden müssen als die horizontalen Entfernungen D, so trägt man die Höhen h in dem Diagramme II in k-fachem Maßstabe der horizontalen Entfernungen D auf und erhält zu diesem Zwecke aus $h = k \cdot D \operatorname{tg} \alpha$ die für $\alpha = 1^0, 2^0, \ldots$ zugehörigen Geraden. Häufig wird $k = 5$ oder 10 gewählt, so daß der Höhenmaßstab dann $k \cdot M$ wird, wenn M den Maßstab für die horizontalen Entfernungen D bzw. für die Hilfsgrößen E vorstellt. Z. B. für $M = 1 : 5000$ und $k = 5$ würde ein Millimetermaßstab sogleich Metereinheiten für die Höhen geben. Die beiden

Hilfsmittel von § 43 und das zur Höhenbestimmung dienende Diagramm nebst Höhenmaßstab (Fig. 96) können leicht auf ein Blatt 23/26 cm aufgezeichnet werden.

Diagramm II.

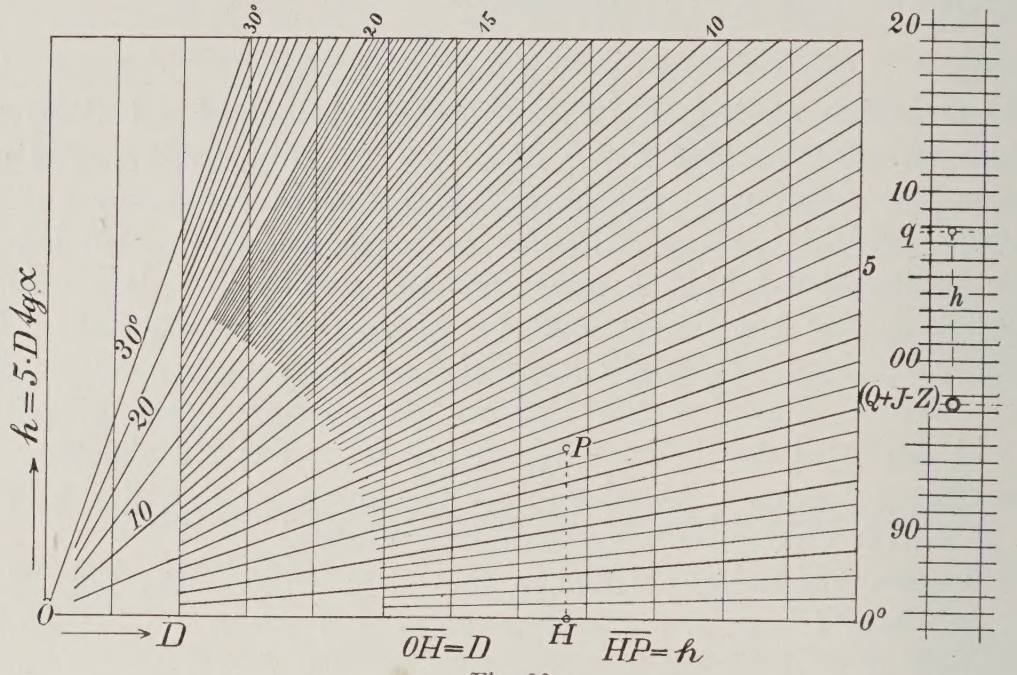


Fig. 96.

Bemerkungen. In unübersichtlichem Gelände begeht man zuerst mit dem Gehilfen die aufzunehmende Fläche, bezeichnet die charakteristischen Höhenpunkte mit Nummernspachteln (z. B. jedes Mal von 1 ÷ 20) und führt darüber einen Handriß. Mit diesem und mit der Abstandslatte geht dann der Gehilfe von Nummer zu Nummer, die aufgenommenen Punkte werden hierbei auf dem Meßtische fortlaufend numeriert und z. B. jeder fünfte Punkt durch vereinbarte Zeichen geprobt.

Die Höhenwinkel müssen umso sorgfältiger gemessen werden, je größer die Entfernungen D sind, denn ein Fehler von $\pm 1'$ im Höhenwinkel verursacht für je 344 m den Höhenfehler von etwa $\pm 0{,}1$ m.

Bei Aufnahmen in kleinem Maßstabe ($M = 1:10000$ oder $1:25000$) verwendet man an Stelle des Höhendiagrammes entweder Zahlentafeln, die für gegebenes E oder D und α den Höhenunterschied $h = E \cdot \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ oder $= D \operatorname{tg} \alpha$ liefern, oder auch sonstige Rechenhilfsmittel (wie z. B. Rechenschieber, siehe § 39).

Der Einfluß der Erdkrümmung und Strahlenbrechung auf h darf meist vernachlässigt werden (siehe 15. Kapitel).

Wird der Meßtisch zu Anfang der Messung auf einem nach Lage und Höhe unbekannten Punkte aufgestellt, dann wird der Standort

im wagerechten Sinne zuerst durch Rückwärtseinschneiden nach mindestens drei bekannten Punkten bestimmt. Ist weiterhin ein gegebener Punkt mit bekannter Höhe q sichtbar (z. B. ein Turmknopf), dann wird nach diesem der Höhenwinkel α gemessen und seine horizontale Entfernung D vom Standorte durch Abgreifen vom Plane bestimmt. Die Kippachsenhöhe folgt dann nach Gl. (1) zu $Q + J = q - D \cdot \operatorname{tg}\alpha$, so daß nach Abmessen von J auch die Standorthöhe Q bekannt wird. Etwa weiterhin nach Lage und Höhe gegebene Punkte benutzt man zur Probe von Q.

Mit Distanzmessern zum unmittelbaren Ablesen von D und h auf der Abstandslatte, wie z. B. mit dem Hammer-Fennelschen, fällt die Ablesung von α und die Berechnung von D und h weg, so daß lediglich das Abmessen und Auftragen von D und die Berechnung von q verbleibt. Wenn an diesen Instrumenten zur Messung einzelner Höhenwinkel ein Höhenbogen angebracht ist, dann sind sie auch für Geländeaufnahmen in kleinem Maßstabe mit großem Vorteile brauchbar. Bei Verwendung von Schiebetachymetern (§ 39) wird D und q aus dem abgelesenen Lattenstücke L ohne jede Rechnung erhalten.

§ 46. Genauigkeit der Meßtischaufnahme.

Die Genauigkeit eines mit dem Meßtische angefertigten Lageplanes hängt vom Aufnahmemaßstab, von der Güte des Meßtisches und Abstandmessers und sehr stark von der Übung des Aufnehmenden ab. Auf alle Fälle liefert die Aufnahme nur einen verjüngten Plan, der aber angesichts der Natur entsteht und aus dem für irgend welche Zwecke benötigte Längen abgemessen und infolgedessen häufig unsicherer gefunden werden als durch unmittelbare Längenmessung im Felde. Zum Zwecke der Sicherung der Eigentumsgrenzen wird deshalb der Meßtisch nur noch selten verwendet und ist hierfür in mehreren Staaten verboten. Für ingenieur-technische Aufnahmen, z. B. für die Aufnahme der Höhenpläne für die allgemeinen Vorarbeiten bei Eisenbahnbauten etwa im Maßstabe 1 : 5000 mit Höhenlinien von 2 ÷ 3 m Abstand hat sich der Meßtisch dagegen im schwierigen Gelände der Schweiz (nach Prof. Dr. Koppe) vorzüglich bewährt und auch für die in noch kleinerem Maßstabe (1 : 10000 bis 1 : 25000) auszuführenden topographischen Aufnahmen wird der Meßtisch fast ausnahmslos verwendet.

IV. Abschnitt.
Lagevermessung nach der Zahlenmethode.

7. Kapitel.
Lagevermessungen mit Benutzung von Meßlatten, Winkelspiegel u. dgl.

§ 47. Kleine Lageplanaufnahme.

Eine kleine Fläche, z. B. ein Bauplatz, Acker usf., kann in der Regel auf eine einzige Aufnahme- oder Messungslinie als Abszissenachse durch Messen der rechtwinkeligen Koordinaten aller Eckpunkte aufgenommen werden. Mit Rücksicht auf die Ungenauigkeit der mit Kreuzscheibe, Winkelspiegel und Prisma abgesteckten rechten Winkel dürfen die Ordinaten die Länge von etwa 50 m nicht überschreiten, wenn die Fußpunkte auf etwa $\pm$ 3 cm richtig sein sollen (vgl. § 8).

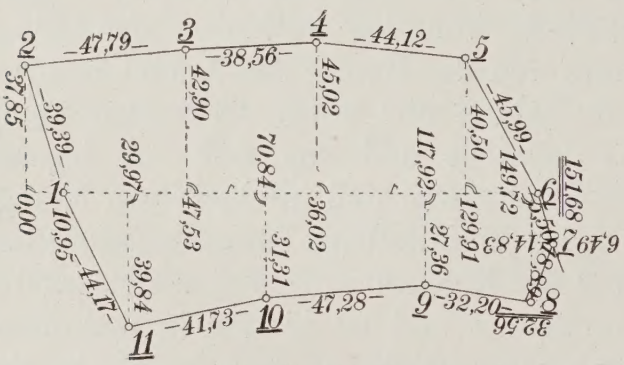


Fig. 97.

Die Aufnahmelinie ist deshalb so zu wählen, daß die aufzunehmenden Punkte innerhalb etwa 50 m zu beiden Seiten liegen. Die Messungslinie 1.6 (Fig. 97) wird mit drei, besser vier Stäben abgesteckt und dann werden die Fußpunkte der von den Punkten 2, 3, 4, ... auf die Aufnahmelinie gefällten Lote aufgesucht und passend bezeichnet. Bei der hierauf folgenden Längenmessung mißt man zuerst die Aufnahmelinie in durchlaufender Zählung von einem beliebigen Nullpunkte aus, liest hierbei die Abszissen der einzelnen Lotfußpunkte ab und schreibt die Zahlen in eine Skizze, den Handriß, ein, z. B. nach Andeutung der Fig. 97. Hierauf werden die Ordinaten gemessen und die Messungszahlen aufgeschrieben. Eine willkommene, wenn auch nicht durchgreifende Probe der Aufnahme bietet sich durch Messen der Längen von Grenzpunkt zu Grenzpunkt; zum Unterschiede von den Koordinatenzahlen schreibt man diese Spannmaße meist zwischen Striche.

Das Fällen der Lote, Ablesen der Abszissen und Messen der Ordinaten kann auch für jeden Punkt unmittelbar nacheinander ausgeführt werden; es ist dann aber die Verwendung eines zweiten Längenmeßwerkzeuges für die Ordinaten zu empfehlen.

Wenn z. B. auf der Strecke 2 bis 5 viele Punkte liegen, kann die Meßarbeit durch Abstecken der Aufnahmelinie 2 . 5 und Aufnehmen der Punkte 3, 4, . . . auf diese verringert werden. Scharf bezeichnete Punkte, wie Hausecken, Gleis- und Grenzsteinmitten, liest man meist auf Zentimeter, unscharf bezeichnete Punkte, wie Hecken, Gräben u. dgl., auf Dezimeter ab. Bei Gebäuden wird häufig der Sockelumfang und die erste über dem Sockel hochgehende lotrechte Fläche aufgenommen. Durch Verwendung von Instrumenten zum Abstecken von 45°-Winkeln können einzelne Ordinaten über Bäche u. dgl. auch in der Aufnahmelinie gemessen werden.

§ 48. Erweiterung der Aufnahme.

Reicht eine Aufnahmelinie nicht aus, dann benutzt man mehrere, durch Längenmessung (von Dreiecksseiten) miteinander verbundene Messungslinien. Dieses Messungsliniennetz wird zunächst im Gelände aufgesucht und abgesteckt; die Messung der einzelnen Linien erfolgt in der Regel gleichzeitig mit der Aufnahme der Eck- und Grenzpunkte. Diese werden gegen das Messungsliniennetz entweder durch rechtwinkelige Koordinaten oder durch Einbinden der durch je zwei Punkte gehenden Geraden (z. B. einer Hausflucht) in zwei passend gelegene Messungslinien festgelegt.

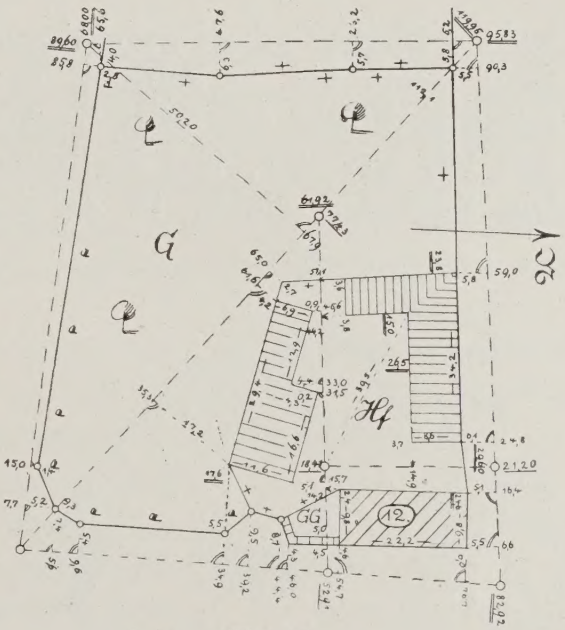


Fig. 98.

Infolge der unvermeidlichen Längenmessungsfehler wird die Form der von den Messungslinien gebildeten Dreiecke bei der Anfertigung des Planes unsicher erhalten, wenn die den Eckpunkt liefernden beiden Kreisbogen sich unter spitzen Winkeln schneiden. Man vermeidet deshalb derartige Konstruktionen und mißt auch einzelne Messungslinien doppelt, wenn sich keine sonstige Sicherung ergibt. Zu letzterem Zwecke sollen alle Messungslinien und eingebundenen Linien in ihrer ganzen Länge gemessen werden („Durchmessen").

Die Messungszahlen werden zweckmäßig in einen ungefähr maßstäblich geführten Handriß nach bestimmten Regeln eingeschrieben, z. B. wie dies in der Fig. 98 angedeutet ist.

Bei der Anfertigung des Lageplans werden die Maße nach Vorschrift des Handrisses etwa mit Zirkel und Transversalmaßstab in verjüngtem Maßstabe aufgetragen.

8. Kapitel.

Lageplanaufnahme auf polygonometrischer Grundlage.

§ 49. Zweck der Polygonzüge.

In bebautem Gelände (Ortschaften, Wäldern) und bei der Aufnahme langer, schmaler Flächen (Eisenbahnen, Wege, Flüsse) können die Aufnahmelinien lediglich durch Längenmessungen meistens nicht

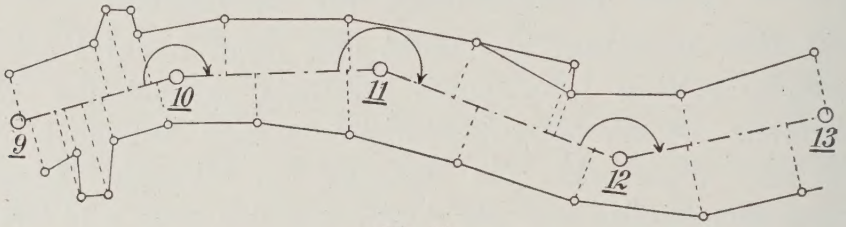


Fig. 99.

mehr genügend scharf gegeneinander festgelegt werden. Dies erfolgt dann durch die Vermittlung von Polygonzügen, die die zu vermessende Fläche um- oder durchziehen, wie das z. B. die Figuren 99 und 100 andeuten, und deren Seiten und Winkel gemessen werden. Die Zugseiten dienen in der Regel zugleich als Aufnahmelinien, weitere solche werden durch Verbindungsgerade von Punkten auf Polygonseiten erhalten oder auch durch die Zugseiten von Polygonzügen, die solche Punkte verbinden. Wenn z. B. die gerade Messungslinie 3a, 5a in Fig. 100 nicht möglich gewesen wäre, hätte ein kleiner Polygonzug 4, 3a, 3b, 5a, 5 eingelegt werden können. Auf die Aufnahmelinien werden in der gleichen

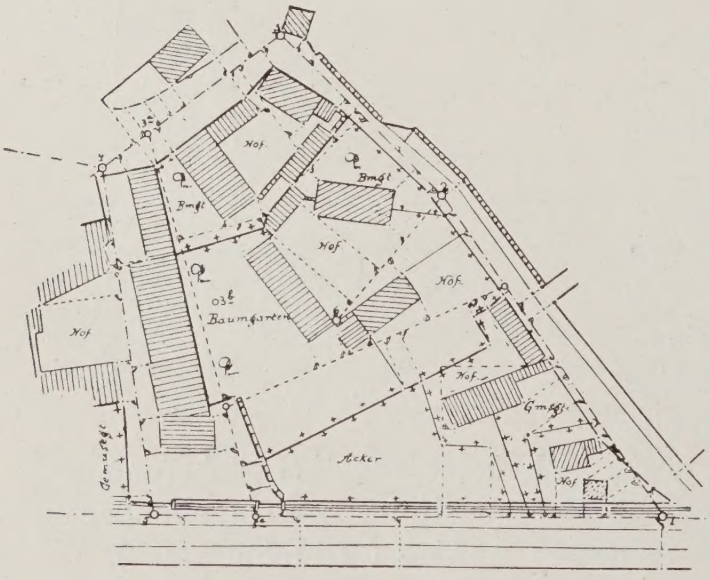


Fig. 100.

Weise wie im 7. Kapitel die einzelnen Eckpunkte, Grenzen u. dgl. eingemessen.

Bei umfangreichen Aufnahmen verlaufen die sog. Hauptpolygonzüge möglichst gestreckt zwischen Endpunkten, deren Entfernung durch vorhergegangene trigonometrische und polygonometrische Arbeiten bereits unveränderlich scharf bestimmt ist (Vermessung auf trigonometrischer und polygonometrischer Grundlage, vgl. Abschn. VII); außer solchen an- und abgeschlossenen Zügen kommen aber für kleinere Aufnahmen auch geschlossene Polygonzüge 1, 2, . . ., 5, 1 (Fig. 100) und freie polygonale Züge 9, 10, 11 . . . (Fig. 99) zur Verwendung.

§ 50. Anlage und Messung des Polygonzuges.

Die Polygonpunkte werden im Gelände so ausgewählt, daß

a) die einzelnen Seiten im allgemeinen zwischen 50 und 300 m, im Durchschnitt etwa 150 m lang und nicht zu sehr verschieden sind. Man vermeidet möglichst, daß im gleichen Zuge eine kurze und eine lange Seite aneinanderstoßen und daß das Verhältnis der kürzesten zur längsten Seite des Zuges kleiner als etwa 1 : 3 wird.

b) die Seiten mit Meßlatten oder mit dem Meßband leicht gemessen werden können.

c) die Hauptpolygonzüge mit Rücksicht auf einfache Fehlerverteilung möglichst gestreckt sind.

Die Punkte werden entweder mit Bohrpflöcken (ev. mit beigeschlagenen Nummernpflöcken), zugespitzten Gasrohrstücken, Tonrohren, dauerhaften Steinen oder einbetonierten Eisenrohren mit Schutzkappe und Deckel bezeichnet (siehe § 1). Die Signalisierung erfolgt in der Regel durch lotrecht gestellte Fluchtstäbe; zum Festhalten der Stäbe über in Steine eingemeißelten Punkten sind kleine Drahtdreifüße u. dgl. gut verwendbar.

Die Seitenmessung geschieht meist bis auf cm mit Meßlatten oder dem 20 m-Meßband einmal in jeder Richtung. Diese beiden Messungen dürfen bei Katastermessungen die zulässigen Fehlergrenzen nicht überschreiten (siehe § 35). In besonderen Fällen werden die Seiten mit abstandmessenden Fernrohren gemessen oder aus den scharf gemessenen Höhenwinkeln α_1 und α_2 bzw. tg α_1 und tg α_2 nach zwei auf einer lotrecht stehenden Stange im Abstande bis zu etwa $l = 5{,}000$ m befindlichen Zielmarken (Fig. 101) durch $D = \frac{l}{\text{tg } \alpha_2 - \text{tg } \alpha_1}$ berechnet.

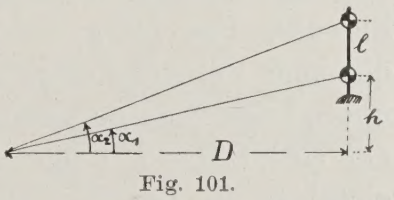


Fig. 101.

Die Winkelmessung wird mit kleinen Theodoliten von 0,5′ bis 1′ Nonienangabe durch einmalige vollständige Satzmessung oder auch durch doppelte Repetition (einmal in jeder Fernrohrlage) ausgeführt. Da kleine Zentrierungsfehler sowohl der Signale als auch des Theodoliten die Polygonwinkel wegen der verhältnismäßig kurzen Seitenlängen erheblich verändern, so müssen die Signalstäbe gut zentrisch und lotrecht aufgestellt und möglichst tief am Boden angezielt und auch der Theodolit muß scharf zentriert werden. Ein Zentrierungsfehler des Theodoliten von ± 3 cm quer zum Zuge verändert z. B. einen gestreckten Polygonwinkel mit 100 m langen Schenkeln um $\pm 2 \cdot \frac{3}{10000} \cdot 206265'' = \pm 124''$. Mit Rücksicht auf den großen Einfluß der Zentrierungsfehler bei kurzen Seiten geht man mit der Seitenlänge nicht gern unter 50 m herunter.

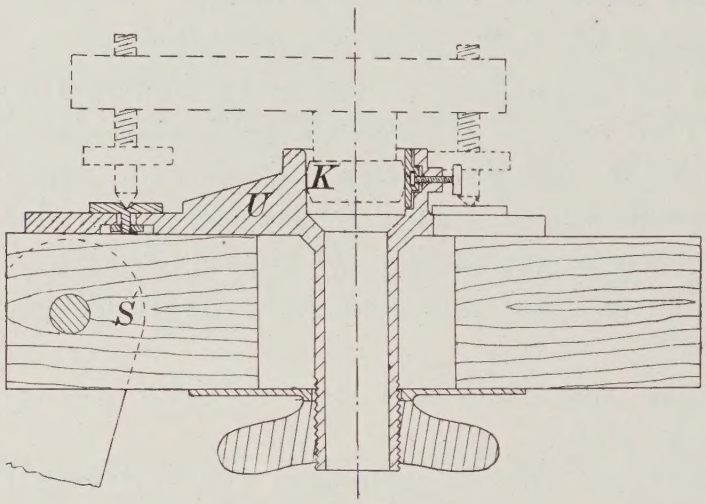


Fig. 102.

Bei Grubenvermessungen (Bogenabsteckungen in Tunnels u. dgl.) sind aber Züge mit sehr kurzen Seiten bis zu wenigen Metern nicht immer zu umgehen. In solchen Fällen benutzt man zur Beseitigung der dann sehr bedeutenden Zentrierungsfehlereinflüsse mechanische Zentrierungsvorrichtungen, z. B. die sog. Freiberger Aufstellung (von Hildebrand in Freiberg), durch die Theodolit und Signale abwechselnd auf Bruchteile des Zehntelmillimeter leicht an dieselbe Stelle des Raumes gebracht werden. Die genannte Vorrichtung besteht aus drei gleichen Untersätzen U (Fig. 102), die auf drei Stativen S über drei aufeinanderfolgenden Polygonpunkten zentriert und dann befestigt werden. Sowohl der Theodolit nach Fig. 54 als auch die zwei Signale, Fig. 103a, und der zum scharfen Abloten bzw. Zentrieren dienende Fernrohrlotapparat, Fig. 103b, der meist entbehrlich ist, haben unten kugelförmige Ansätze K, mit denen sie in entsprechende Bohrungen der Untersätze U eingesetzt werden können. Dadurch erfolgt dann mechanisch die Zentrierung des Theodolits bzw. der Signale. Durch eine Schraubenstange, die durch den Untersatz hindurchgeht, kann der Theodolit mit diesem, wenn nötig, vorübergehend fester verbunden werden.

Die Polygonwinkel werden auf 0,1′ oder bis auf einzelne Sekunden berechnet. Die Messungsergebnisse (Seiten und Winkel)

können (nach Anbringung passender Überschriften) in das auf S. 59 angegebene Formular eingetragen werden; für den in Fig. 100 benutzten Polygonzug seien die in § 53 zusammengestellten Größen gefunden worden.

Mit Hilfe von Transporteur und Maßstab würde bei langen Zügen

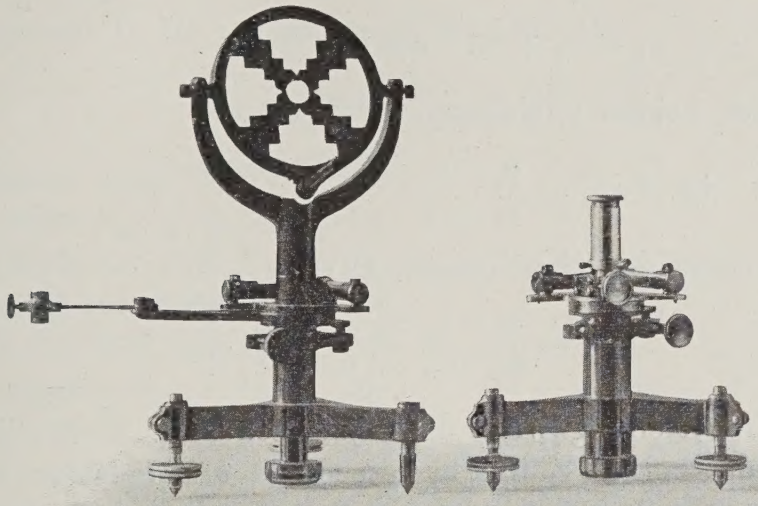


Fig. 103 a. Fig. 103 b.

die Lage der Polygonpunkte wegen der ungünstigen Fehlerfortpflanzung ungenau erhalten. Man berechnet deshalb in der Regel für die Polygonpunkte rechtwinklige ebene Koordinaten und trägt sie damit bei der Plananfertigung in ein scharfes Quadratnetz (etwa dm-Quadrate) ein.

§ 51. Das rechtwinkelige ebene Koordinatensystem.

Am häufigsten wird das rechtwinkelige ebene Koordinatensystem verwendet (Fig. 104). Die Richtung der $+ y$-(Ordinaten-)Achse weicht von der Richtung der $+ x$-(Abszissen-)Achse stets um $+ 90^0$ ab.

x_1 und x_2 sind die Abszissen der Punkte 1 und 2,

y_1 „ y_2 „ „ Ordinaten „ „ 1 „ 2.

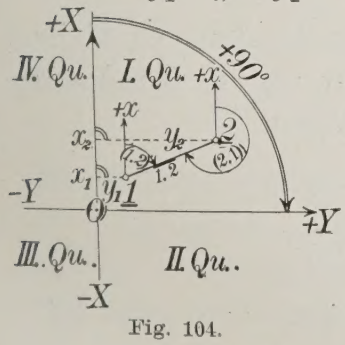


Fig. 104.

Der Richtungswinkel (1.2) der Strecke $\overline{1.2}$ im Punkte 1 nach dem Endpunkte 2 unterscheidet sich vom Richtungswinkel (2.1) der Strecke $\overline{1.2} = \overline{2.1}$ im Punkte 2 nach dem Endpunkte 1 um 180^0; also

$$(2.1) = (1.2) \pm 180^0. \qquad (1)$$

Die Richtungswinkel werden von der Richtung

der $+x$ Achse aus von 0^0 bis 360^0 im Sinne der Uhrzeigerbewegung gezählt. Bezeichnet $\overline{1.2} = \overline{2.1}$ die stets positive Strecke von 1 nach 2, dann gilt (als Definitionsgleichung für die Sinus- und Cosinusfunktion) ganz allgemein:

$$\left.\begin{aligned} y_2 &= y_1 + \overline{1.2} \sin (1.2), \\ x_2 &= x_1 + \overline{1.2} \cos (1.2). \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Durch Division der beiden Gleichungen (2) wird

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} (1.2) &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ \text{oder durch Umformen der Gleichungen (2)} & \\ \overline{1.2} &= \frac{y_2 - y_1}{\sin (1 \cdot 2)} \overset{\text{oder}}{=} \frac{x_2 - x_1}{\cos (1 \cdot 2)}. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Aus dieser letzten Gleichung wird die Hypothenuse $\overline{1.2}$ zweckmäßig mit der größeren der beiden Katheten berechnet. (Lalandesche Regel).

Bei dem Aufschlagen der goniometrischen Funktionen von Winkeln aus den (Logarithmen-)Tafeln und umgekehrt ist mit Rücksicht auf die Einrichtung der Tafeln zu beachten, daß zweckmäßig stets die Überschüsse der Winkel über Vielfache von 90^0 (Quadrantengrenzen) benutzt werden. Die Vorzeichen der Funktionen sind in den vier Quadranten

Wenn $\sphericalangle (1.2)$ liegt im	dann ist		
	sin	cos	tang
I. Quadranten	+	+	+
II. „	+	−	−
III. „	−	−	+
IV. „	−	+	−

Liegt dann der Winkel (1.2) im 1. oder 3. Quadranten, so bleiben die aufzuschlagenden Funktionen dieselben; im 2. und 4. Quadranten ist aber stets die jeweilige Kofunktion aufzuschlagen.

Z. B. $\operatorname{tg} 145^0\,12'\,17'' = -\operatorname{ctg} 55^0\,12'\,17''$,

$\sin 230^0\,29'\,26'' = -\sin 50^0\,29'\,26''$,

$\cos 341^0\,51'\,35'' = +\sin 71^0\,51'\,35''$.

§ 52. Berechnung der Koordinaten der Polygonpunkte. Fehlergrenzen.

A. Offener oder freier Polygonzug.

Gegeben seien die Koordinaten $x_I\, y_I$ des Anfangspunktes I, außerdem $x_{III}\, y_{III}$ des Punktes III; der Richtungswinkel (I . III) der Anschlußseite $\overline{I\,.\,III}$ ist demnach bekannt aus

$$\operatorname{tg}(I.III) = \frac{y_{III} - y_I}{x_{III} - x_I}. \tag{1}$$

Gemessen seien (s. Fig. 105) die Seiten $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{II}$, die Polygonwinkel $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, deren linker Schenkel stets durch die Richtung nach dem vorhergehenden Punkte gebildet wird, und außerdem der Anschlußwinkel β_I, durch den der Zug orientiert wird.

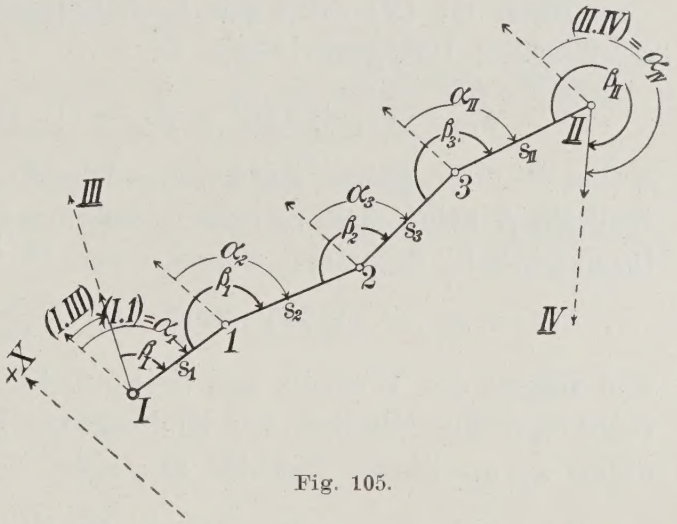


Fig. 105.

Damit die Koordinaten der Punkte 1, 2, . . ., II berechnet werden können, sind die Richtungswinkel α der einzelnen Zugseiten nötig. Man erhält mit den Grundformeln des § 51:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= (I \cdot III) + \beta_I, \\ \alpha_2 &= \alpha_1 \pm 180^0 + \beta_1, \\ \alpha_3 &= \alpha_2 \pm 180^0 + \beta_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{II} &= \alpha_3 \pm 180^0 + \beta_3, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

und

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= y_I + s_1 \sin\alpha_1, & x_1 &= x_I + s_1 \cos\alpha_1, \\ y_2 &= y_1 + s_2 \sin\alpha_2, & x_2 &= x_1 + s_2 \cos\alpha_2, \\ y_3 &= y_2 + s_3 \sin\alpha_3, & x_3 &= x_2 + s_3 \cos\alpha_3, \\ &\cdots\cdots\cdots & &\cdots\cdots\cdots \\ y_{II} &= y_3 + s_{II} \sin\alpha_{II}, & x_{II} &= x_3 + s_{II} \cos\alpha_{II}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

B. Geschlossener bzw. an- und abgeschlossener Polygonzug.

Im geschlossenen Zuge sind außer den zur eindeutigen Bestimmung der Koordinaten hinreichenden Stücken noch weitere bekannt. Es seien noch gegeben die Koordinaten $x_{II}\, y_{II}$ des Zugendpunktes II

(der auch mit dem Anfangspunkte zusammenfallen kann), und außerdem der Abschlußwinkel β_{II} zwischen der letzten Polygonseite und der Richtung von II nach IV, deren Richtungswinkel (II . IV) aus den gegebenen Koordinaten von II und IV sich ergibt durch

$$\operatorname{tg}(\underline{\mathrm{II.IV}}) = \frac{y_{IV} - y_{II}}{x_{IV} - x_{II}}. \tag{4}$$

Der Polygonzug ist demnach doppelt orientiert (durch β_I und β_{II}) und an- und abgeschlossen (an I und II).

Nach Gl. (2) folgt der Richtungswinkel der Seite II . IV aus den gemessenen Polygonwinkeln zu

$$\alpha_{IV} = \alpha_{II} \pm 180^0 + \beta_{II} = (\mathrm{I.III}) + \sum\beta - k \cdot 180^0, \tag{5}$$

wobei k eine ganze Zahl ist. Wegen der Fehler in den Polygonwinkeln β zeigt sich zwischen den aus (4) und (5) berechneten Richtungswinkeln derselben Strecke der Widerspruch

$$w_\beta = \alpha_{IV} - (\underline{\mathrm{II.IV}}) = (\mathrm{I.III}) + \sum\beta - k \cdot 180^0 - (\underline{\mathrm{II.IV}}) \tag{6}$$

und wegen der Winkel- und Seitenmeßfehler weichen die nach (3) berechneten Koordinaten des Endpunktes II von den gegebenen Koordinaten $\underline{x_{II}}\,\underline{y_{II}}$ dieses Punktes ab; also

$$w_y = y_I + \sum s \sin\alpha - \underline{y_{II}}, \tag{7}$$

$$w_x = x_I + \sum s \cos\alpha - \underline{x_{II}}. \tag{8}$$

Diese drei Widersprüche müssen durch Verbesserung der gemessenen Winkel und Seiten zum Verschwinden gebracht werden. In der Regel erfolgt dieses näherungsweise durch stufenförmige Ausgleichung in folgender Weise:

a) Man verteilt zuerst den Winkelwiderspruch w_β durch Verbesserung jedes der n annähernd gleich genau gemessenen Winkel β um

$$d\beta = -\frac{w_\beta}{n}. \tag{9}$$

Die einmal verbesserten Polygonwinkel werden dann, wenn für n der Reihe nach I, 1, . . ., II genommen wird,

$$\beta'_n = \beta_n + d\beta. \tag{10}$$

b) Mit diesen verbesserten Winkeln β'_n werden nach den Gleichungen (2) die verbesserten Richtungswinkel α'_n und mit diesen und den Seiten s dann die einzelnen Koordinatenunterschiede $s_n \sin\alpha'_n$ und $s_n \cos\alpha'_n$ zwischen den aufeinanderfolgenden Punkten berechnet. Fügt man die Summen $\sum s \sin\alpha'$ und $\sum s \cos\alpha'$ zu den Koordinaten des

Anfangspunktes hinzu, dann wird der vorgeschriebene Punkt II meist noch nicht getroffen, es zeigen sich vielmehr die neuen Koordinatenwidersprüche

$$w'_y = \sum s \sin \alpha' - (y_{II} - y_I), \tag{11}$$

$$w'_x = \sum s \cos \alpha' - (x_{II} - x_I). \tag{12}$$

Aus diesen Widersprüchen folgt der sog. lineare Schlußfehler f (siehe Fig. 105 a) des Polygonzuges zu

$$f = \sqrt{w'^2_x + w'^2_y}. \tag{13}$$

Die Widersprüche w'_y und w'_x werden auf die einzelnen Koordinatenunterschiede in sehr verschiedener Weise verteilt, z. B.

1. proportional zu den einzelnen Seitenlängen s oder
2. proportional zur absoluten Größe der einzelnen Koordinatenunterschiede.

Die Verbesserungen sind demnach im ersten Falle

$$\left.\begin{aligned} dx_n &= -\frac{w'_x}{\sum s} \cdot s_n, \\ dy_n &= -\frac{w'_y}{\sum s} \cdot s_n, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

oder im zweiten Falle

$$\left.\begin{aligned} dx_n &= -\frac{w'_x}{\sum |s \cos \alpha'|} \cdot (s_n \cos \alpha'_n), \\ dy_n &= -\frac{w'_y}{\sum |s \sin \alpha'|} \cdot (s_n \sin \alpha'_n). \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Die beiden Verteilungsarten nach (14) oder (15) geben bei gestreckten Zügen die gleichen Verbesserungen. Mit den verbesserten Koordinatenunterschieden $(s_n \sin \alpha'_n) + dy_n$ und $(s_n \cos \alpha'_n) + dx_n$ muß dann zur Probe der vorgeschriebene Endpunkt II getroffen werden.

Bemerkungen. Längere Züge berechnet man häufig mit fünfstelligen Logarithmen (Rechnungsgrenze meist Zentimeter, seltener Millimeter; in den Winkeln 0,1′ oder einzelne Sekunden) und zweckmäßig in Formularen. Die kleinen Verbesserungen $d\beta$, dx_n, dy_n nach (9), (14) und (15) bestimmt man am einfachsten durch Kopfrechnung oder mit dem Rechenschieber.

Bei Katastervermessungen bestehen für die Widersprüche w_β, w'_x, w'_y und f in den einzelnen Staaten Fehlergrenzen, z. B. in Preußen

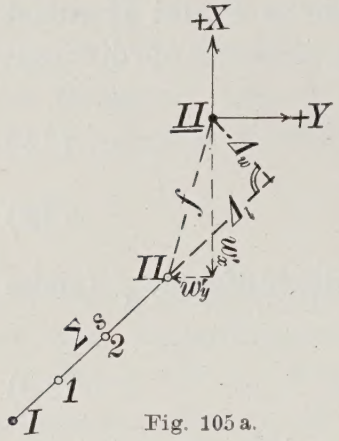


Fig. 105a.

$w_\beta \leqq 1{,}5' \sqrt{n}$, wobei n = Anzahl der gemessenen Winkel, und $f_{\mathrm{I}} \leqq 0{,}01 \sqrt{4 \cdot \sum s + 0{,}005 \left(\sum s\right)^2}$ für Geländeklasse I. Die Seiten müssen bei diesen Vermessungen mit 5 m-Meßlatten oder dem 20 m-Stahlband gemessen werden und die Berechnung geschlossener Polygonzüge, die auf den Ausgangspunkt zurückführen, soll möglichst vermieden werden, weil bei solchen die Fehler in der Länge des Meßwerkzeuges nicht zum Vorschein kommen.

In nahezu gestreckten Zügen kann aus w_x' und w_y' auch die im wesentlichen von der Längen- und die von der Winkelmessung herrührende Abweichung (Δ_l bzw. Δ_w) nach Andeutung von Fig. 105a z. B. auf zeichnerischem Wege gefunden werden.

§ 53. Zahlenbeispiel.

Die Messungsergebnisse des geschlossenen Zuges 1, 2, 3, 4, 5, 1 in Fig. 100 sind

Standpunkt	Zielpunkt	Richtung	Seite
1	III	0° 00,0′	(Nordrichtung)
	5	22 16,8	142,07 m
	2	77 49,3	109,66
2	1	0 00,0	109,66
	6	75 11,2	45,50
	3	169 21,6	63,37
3	2	0 00,0	63,37
	4	98 49,0	62,03
4	3	0 00,0	62,03
	5	117 40,8	99,54
5	4	0 00,0	99,54
	1	98 37,3	142,07

Es werden die Koordinaten des Polygonpunktes 1 willkürlich zu $x_1 = +100$, $y_1 = +100$ und die Richtung $\overline{1 \,.\, \mathrm{III}}$ willkürlich als Richtung der $+x$-Achse angenommen. Demnach ist der Punkt I (Anfangspunkt) des Formulares S. 125 identisch mit $P \,.\, P \,.\, 1$ und außerdem mit dem Endpunkte II, ferner ist Zielpunkt III identisch mit IV und folglich besitzen die An- und Abschlußrichtungen die Richtungswinkel

$$(\underline{\mathrm{I} \,.\, \mathrm{III}}) = (\underline{\mathrm{II} \,.\, \mathrm{IV}}) = \underline{\mathbf{0^0\ 0{,}0'}}$$

Polygonzug von I = $P.P.1$ bis II = $P.P.1$.

Seite s / Punkt	Richtungswinkel α / Polygonwinkel β / $d\beta$ ° ′ ″	log cos α / log s / log sin α	log $s \cdot \cos\alpha$ / log $s \cdot \sin\alpha$	$s \cdot \cos\alpha$ / dx / x	$s \cdot \sin\alpha$ / dy / y	y_{III} = / y_I = / $y_{III} - y_I$ =
(I . III) =	0 0,0			− ,	− ,	x_{III} =
	77 49,3			−	−	x_I =
I = $P.1$	− 0,2			+ 100,00	+ 100,00	$x_{III} - x_I$ =
I.1 = 109,66	77 49,1	9.32 431	1.36 436	+ 23,14	+ 107,19	$y_{III} - y_I$ |
	169 21,6	2.04 005		−	+ 1	$x_{III} - x_I$ |
1 = $P.2$	− 0,2	9.99 011	2.03 016	+ 123,14	+ 207,20	tg (I . III) |
63,37	67 10,5	9.58 874	1.39 062	+ 24,58	+ 58,41	(I · III) = ° ′ ″
	98 49,0	1.80 188		+ 1	−	y_{IV} =
2 = $P.3$	− 0,2	9.96 458	1.76 646	+ 147,73	+ 265,61	y_{II} =
62,03	345 59,3	9.98 688	1.77 948	+ 60,18	− 15,02	$y_{IV} - y_{II}$ =
	117 40,8	1.79 260		+ 1	−	x_{IV} =
3 = $P.4$	− 0,2	9.38 403$_n$	1.17 663$_n$	+ 207,92	+ 250,59	x_{II} =
99,54	283 39,9	9.37 336	1.37 136	+ 23,52	− 96,72	$x_{IV} - x_{II}$ =
	98 37,3	1.99 800		−	+	$y_{IV} - y_{II}$ |
4 = $P.5$	− 0,2	9.98 753$_n$	1.98 553$_n$	+ 231,44	+ 153,87	$x_{IV} - x_{II}$ |
142,07	202 17,0	9.96 629$_n$	2.11 879$_n$	− 131,46	− 53,87	tg (II . IV) |
	337 43,2	2.15 250		+ 2	−	(II . IV) = ° ′ ″
II = $P.1$	− 0,2	9.57 885$_n$	1.73 135$_n$	+ 100,00	+ 100,00	$\Sigma(+ s \cdot \cos\alpha)$ = + 131,42
(II . IV) =	0 0,0	(Soll)		− ,	− ,	$\Sigma(- s \cdot \cos\alpha)$ = − 131,46
(I . III) + $\Sigma\beta$ =	900 01,2	(Ist)		−	−	$\Sigma s \cos\alpha \overset{\text{ist}}{=}$ − 0,04
w_β =	+ 1,2			− ,	− ,	$\Sigma s \cos\alpha \overset{\text{soll}}{=}$ − 0,00
$d\beta$ = −	$\frac{1,2}{6}$ = − 0,2			− ,	− ,	Verbesserung = $-w'_x$ = + 0,04
				−	−	$\Sigma(+ s \cdot \sin\alpha)$ = + 165,60
	−			− ,	− ,	$\Sigma(- s \cdot \sin\alpha)$ = − 165,61
(2 . 1) =	257 49,1			− ,	− ,	$\Sigma s \cdot \sin\alpha \overset{\text{ist}}{=}$ − 0,01
	75 11,2			−	−	$\Sigma s \cdot \sin\alpha \overset{\text{soll}}{=}$ − 0,00
$P.2$	−			+ 123,14	+ 207,20	Verbesserung = $-w'_y$ = + 0,01
45,50	333 00,3	9.94 990	1.60 791	+ 40,54	− 20,65	
		1.65 801		−	−	
$P \cdot 6$	−	9.65 698$_n$	1.31 499$_n$	+ 163,68	+ 186,55	

und der Abschlußwinkel wird

$$\beta_{II} = \sphericalangle (5 \,.\, 1 \,.\, III) = 337^0\,43{,}2'.$$

Die als unveränderlich angenommenen und gegebenen Größen sind in dem Formulare kräftig unterstrichen.

Nach Gleichung (6) wird nach dem Eintragen der gemessenen Seiten und Winkel zuerst der Winkelwiderspruch w_β berechnet und auf die gemessenen Winkel gleichmäßig verteilt. Mit den sodann nach Gleichung (2) und (10) berechneten verbesserten Richtungswinkeln und den Seiten s werden hierauf die Koordinatenunterschiede $s \cos \alpha'$ und $s \sin \alpha'$ (im Formulare mit $s \,.\, \cos \alpha$ und $s \,.\, \sin \alpha$ bezeichnet) berechnet. Deren Summen weichen von den Sollbeträgen nach Gleichung (11) und (12) um $-0{,}05$ und $-0{,}01$ m ab; diese Abweichungen wurden nach Gleichung (15) proportional zu der absoluten Größe der Koordinatenunterschiede auf diese verteilt, so daß danach die Koordinaten der $P \,.\, P$. mit Probe erhalten werden.

§ 54. Abstecken des Aufnahme- oder Messungsliniennetzes. Stückvermessung und Plananfertigung.

Das Messungsliniennetz wird meistens nach der Messung der Polygonzüge abgesteckt, indem diejenigen Punkte von Polygonseiten, von denen Messungslinien ausgehen, nötigenfalls unter Zuhilfenahme des Theodoliten in erstere scharf eingewiesen und dann mit Pflöcken, Eisen- oder Tonrohren vermarkt werden. Sind weitere Messungslinien zwischen Punkten von abgesteckten Linien nötig, dann werden deren Endpunkte in der gleichen Weise scharf eingewiesen und vermarkt. Diese Punkte heißen häufig Klein- oder Bindepunkte.

Die Einmessung dieser Kleinpunkte erfolgt gleichzeitig mit der Aufnahme der einzelnen Parzellen, der sog. Stückvermessung, in derselben Weise wie in § 48, wobei zur Probe jede Messungslinie „durchgemessen“ werden soll. Die Messungsergebnisse werden in einen ungefähr maßstäblich geführten Handriß nach bestimmten Regeln, z. B. wie in Fig. 98, eingetragen mit Bemerkungen über Benutzungsart und Eigentümer der einzelnen Flächen, Grenzmerkmale u. dgl.

Zur Anfertigung des Planes zeichnet man zuerst ein scharfes Dezimeterquadratnetz, das man sogleich mit dünnen blassen (schwarzen) Tuschlinien auszieht. Die Konstruktion dieses Netzes kann in einfacher Weise unter Verwendung eines Stangenzirkels oder besser mit Hilfe eines guten Metalllineals geschehen, auf dem eine Dezimeterteilung und eine solche mit $\sqrt{2}$ erweiterte Teilung (Hypotenuse eines rechtwinklig-gleich-

schenkligen Dreiecks von 1, 2, . . ., 6 dm Schenkellänge) aufgetragen ist. In dieses Netz werden die Polygonpunkte mittels ihrer Koordinaten eingetragen und durch Vergleichen der Polygonseiten mit den direkt gemessenen Strecken geprüft. Dann werden die Kleinpunkte aufgetragen und in derselben Weise wie vorher geprüft; zum Schlusse erfolgt die Konstruktion der einzelnen Parzellenpunkte (Kartierung).

Die mit feinen Nadelstichen bezeichneten Punkte sollten bei der Auszeichnung des Planes nicht mit Farbe verdeckt werden. Durch leichte Bemalung, unter der das Papier nicht leiden darf, sowie auch durch Signaturen werden Benutzungs- und Kulturart der einzelnen Flächen und die Art der Grenzpunkte und -Linien bezeichnet und gleichzeitig erhält der Plan ein gefälliges Aussehen.

V. Abschnitt.
Flächenberechnung und Flächenteilung.

9. Kapitel.
Flächenberechnung.

§ 55. Flächenberechnung aus Naturmaßzahlen.

Die genauesten Flächen werden im allgemeinen unmittelbar mit den im Felde gemessenen Zahlen erhalten.

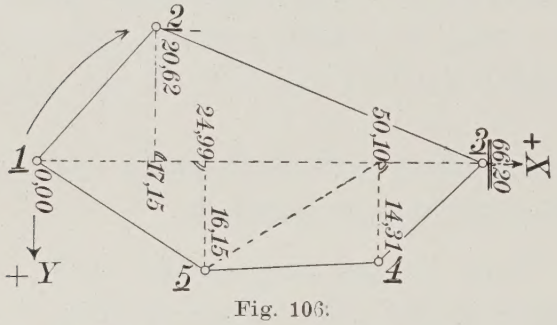


Fig. 106.

a) Sind die rechtwinkeligen Koordinaten der Eckpunkte der Figur bekannt (ev. auch durch die Berechnung der Koordinaten von Polygon- oder Kleinpunkten), dann berechnet man den Flächeninhalt entweder als algebraische Summe von Dreiecken und Vierecken oder mit der allgemeinen polygonometrischen Flächenformel.

Der doppelte Flächeninhalt des in Fig. 106 gezeichneten Fünfecks ergibt sich z. B. in leicht ersichtlicher Weise durch:

$$2F = 66{,}20 \cdot 20{,}62 + 16{,}15 \cdot 50{,}10 + 14{,}31 \cdot (66{,}20 - 24{,}99) =$$
$$= 1365{,}0 + 809{,}1 + 589{,}7 = 2763{,}8\,,$$

also $F = 1381{,}9$ qm.

Die einzelnen Produkte berechnet man in der Regel bis auf eine Stelle nach dem Komma, die Schlußfläche bis auf 0,1 qm.

Wenn die Eckpunkte 1, 2, ... n im Uhrzeigerdrehsinn auf einander folgen, dann ergibt sich der Flächeninhalt durch die allgemeine polygonometrische Flächenformel zu

$$2F = +\sum_{1}^{n} x_n(y_{n+1} - y_{n-1}) \overset{\text{und}}{=} -\sum_{1}^{n} y_n(x_{n+1} - x_{n-1})\,.$$

Sämtliche Abszissen und Ordinaten dürfen vor Anwendung dieser Formeln zur Erzielung kleinerer Faktoren je um eine Konstante verkleinert werden.

Beispiel (Fig. 106 wie vorher):

Punkt Nr. n	x	y	$y_{n+1}-y_{n-1}$	$x_n(y_{n+1}-y_{n-1})$ +	$x_n(y_{n+1}-y_{n-1})$ −	$x_{n+1}-x_{n-1}$	$y_n(x_{n+1}-x_{n-1})$ +	$y_n(x_{n+1}-x_{n-1})$ −
1	0	0	− 36,77	·	·	− 7,84	·	·
2	+ 17,15	− 20,62	0	·	·	+ 66,20	·	1365,1
3	+ 66,20	0	+ 34,93	2312,4	·	+ 32,95	·	·
4	+ 50,10	+ 14,31	+ 16,15	809,1	·	− 41,21	·	589,7
5	+ 24,99	+ 16,15	− 14,31	·	357,6	− 50,10	·	809,1
				3121,5	357,6		·	2763,9
				$2F = 2763{,}9$			$-2F = -2763{,}9$	

Um die rechtwinkligen Koordinaten x', y' von Punkten, die sich auf die Messungslinie (Abszissenachse) x' beziehen, auf das Koordinatensystem (x, y), das den gleichen Ursprung wie das $(x'y')$-System hat, umzurechnen, benutzt man die allgemein gültigen Formeln

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \sin\alpha \\ y &= x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \end{aligned}\right\}$$ wobei α der Richtungswinkel der $+x'$-Achse im (x, y)-System ist.

b) Sind je die drei Seiten a, b, c des Dreiecks gemessen, dann ergibt sich dessen Flächeninhalt F, wenn $s = \frac{a+b+c}{2}$, durch

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Die Zahlenrechnungen werden entweder direkt, mit fünfstelligen Logarithmen, mit Rechentafeln oder mit Rechenmaschinen ausgeführt. Seltener werden große logarithmische Rechenschieber gebraucht, während kleinere Rechenschieber (25 cm lang) zur Prüfung der Rechnung auf grobe Fehler dienen.

§ 56. Flächenbestimmung unter teilweiser Benutzung sowohl unmittelbarer als auch aus einem Plane abgemessener Maßzahlen. Korrektion der Flächen wegen unrichtiger Länge der Meßwerkzeuge oder wegen Planverziehung.

Es ist ein genauer Plan vorhanden und außerdem ein Handriß, aus dem einzelne direkt gemessene Strecken entnommen werden können. Man entnimmt dann stets die kleineren Faktoren, wie z. B. a und b der Fig. 107 aus dem Handrisse und greift die anderen Stücke h_1 und h_2 verhältnismäßig ungenauer aus dem Plane ab, so daß

$$2F = a \cdot h_1 + b \cdot h_2.$$

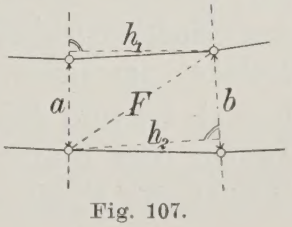


Fig. 107.

Ist z. B. $a = 10$ m, $h_1 \approx 80$ m und sind die Fehler

in beiden Stücken da und dh_1, dann erhält man durch Differenzieren der vorigen Gleichung nach den Veränderlichen a und h_1 den dadurch verursachten Flächenfehler zu $2df = a \cdot dh_1 + da \cdot h_1$. Der gleiche Fehler $da = dh_1 = 0{,}1$ m verursacht demnach, wenn er in der kleinen Seite a begangen ist, den Flächenfehler $\frac{1}{2} \cdot 0{,}1 \cdot 80 = 4$ qm und wenn er in der großen Seite h_1 begangen ist, den Flächenfehler $\frac{1}{2} \cdot 0{,}1 \cdot 10 = 0{,}5$ qm. Daraus geht hervor, daß der kleinere Faktor stets schärfer gemessen werden muß als der größere.

Die aus Naturmaßzahlen berechneten Flächen sind fehlerhaft, wenn das benutzte Längenmeßwerkzeug nicht die richtige Länge besitzt. Die fehlerhaften Flächen müssen dann etwas verbessert werden.

Es werde angenommen, daß die Abszissen x mit um $p\,\%$ zu $\left\{\begin{matrix}\text{langem}\\\text{kurzem}\end{matrix}\right\}$ Meßwerkzeug, die Ordinaten y mit um $q\,\%$ zu $\left\{\begin{matrix}\text{langem}\\\text{kurzem}\end{matrix}\right\}$ Werkzeug gemessen werden. Da man sich die zu berechnende Fläche stets in ein flächengleiches Rechteck mit den Seiten x und y verwandelt denken kann, die dann z. B. mit den unrichtigen Meßlatten gemessen werden, so ist die fehlerhafte Fläche

$$F' = x \cdot y. \tag{1}$$

Demnach wird ihre Änderung dF, wenn sich x um dx und y um dy ändert, hinreichend genau

$$dF = dx \cdot y + dy \cdot x \tag{2}$$

oder

$$\frac{dF}{F'} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y},$$

wofür auch in Prozenten geschrieben werden kann

$$f\,\% = p\,\% + q\,\%, \tag{3}$$

so daß die richtige Fläche wird

$$F = F' + f \cdot \frac{F'}{100}. \tag{4}$$

Dieselben Überlegungen gelten auch dann, wenn die Maße aus einem Plane abgenommen wurden, der sich in der einen Richtung um $p\,\%$ und in der dazu senkrechten Richtung um $q\,\%$ verzogen hat.

Zahlenbeispiel: Die Abszissen wurden mit einem Paar 5 m-Latten gemessen, von denen die eine 5 m + 1,5 mm, die andere 5 m + 1,4 mm lang ist. Die Ordinaten wurden mit einem Paar 3 m-Latten von 3 m + 1,2 mm und 3 m + 1,3 mm Länge gemessen. Die fehlerhafte Fläche sei zu $F' = 6100{,}1$ qm berechnet.

Es ist hinreichend genau

$$p\,\% = + \frac{(1{,}5 + 1{,}4) \cdot 100}{10\,000} = + 0{,}029,$$

$$q\,\% = + \frac{(1{,}2 + 1{,}3) \cdot 100}{6000} = + 0{,}042,$$

folglich $f\,\% = + 0{,}029 + 0{,}042 = + 0{,}071$ und demnach ist die richtige Fläche

$$F = 6100{,}1 + 0{,}071 \cdot \frac{6100}{100} = 6104{,}4 \text{ qm}.$$

§ 57. Flächenbestimmung aus Plänen.

1. Die gezeichnete Figur wird in Dreiecke und Vierecke zerlegt, deren Grundlinien und Höhen abgemessen werden. Die Zerlegung ist mit Rücksicht auf das in § 56 Gesagte in der Weise auszuführen, daß die beiden Faktoren möglichst gleich groß werden. Ist die Figur in verjüngtem Maßstabe M z. B. $= 1 : 1000$ gezeichnet, dann werden meist alle Maße sogleich als Feldmaße (also $\frac{1}{M}$ mal vergrößert) vom Plane abgemessen. (Berücksichtigung des Planein- oder -ausgangs siehe § 56.)

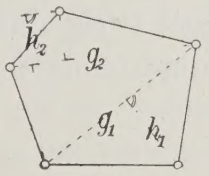


Fig. 108.

2. Lange schmale Figuren zerlegt man zweckmäßig in lauter Trapeze mit gleicher Höhe h, deren Mittelbreiten m mit dem Zirkel abgemessen und summiert werden (siehe Fig. 109). Es ist

$$F = h \cdot (m_1 + m_2 + \cdots) = h \cdot K.$$

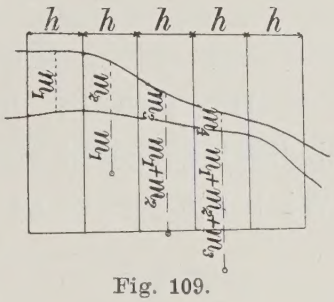


Fig. 109.

Das System der Parallellinien wird durch Fäden, die über einen Rahmen gespannt sind, oder durch Linien, die auf der Zeichnungsfläche vorhanden sind (Millimeterpapier) oder auch in durchsichtige Stoffe (Pauspapier, dünne Zelluloidplatten u. dgl.) eingeritzt sind, gebildet. Anstatt nur mit Parallellinien können diese Stoffe, z. B. auch Glasplatten, mit Quadraten versehen werden, die dann auf die zu berechnende Figur in passender Weise gelegt werden, um den zu berechnenden Inhalt durch Abzählen der deckenden Quadrate bestimmen zu können (Schätzquadrate).

3. Umfahrungsplanimeter. — Das wichtigste Instrument, das den Inhalt der Figur durch deren Umfahren liefert, ist das Polarplanimeter (nach Amsler).

§ 58. Das Polarplanimeter und seine Theorie.

Das Polarplanimeter (Fig. 110) besteht aus dem Fahrarme a mit dem Fahrstift F, der Meßrolle M mit dem zugehörigen Zeiger Z und dem Gelenk G, durch das der den Pol P tragende Polarm p mit dem Fahrarme verbunden ist. Der Pol P wird häufig durch eine Nadelspitze, die beim Gebrauche in die Zeichnungsfläche hineingedrückt wird, gebildet. Das Planimeter ruht in den drei Punkten P, M und F auf, wenn das Gelenk durch eine Achse gebildet wird; ist aber G ein Kugelgelenk, dann muß noch eine Unterstützungsrolle U für den Fahrarm vorhanden sein. Sehr häufig ist der Fahrarm in einer Hülse verschiebbar, so daß dadurch die Fahrarmlänge a verändert werden kann. Der Umfang der Meßrolle ist meist in 100 Teile geteilt, mit Hilfe eines Nonius oder auch durch Schätzung können 0,001 Rollenumdrehungen und mit Hilfe eines Zählrades, in das eine mit der Rollenachse verbundene Schraubenschnecke eingreift, Vielfache von Rollenumdrehungen abgelesen werden. Der aufliegende Rollenrand steht über die Teilung etwas vor und ist aus hartem Material (Stahl, Glas) gefertigt; eines der beiden Rollenachsenlager kann häufig im horizontalen Sinne etwas verschoben werden, z. B. dadurch, daß ein Zylinder mit exzentrischer Bohrung, die das Lager bildet, etwas gedreht wird.

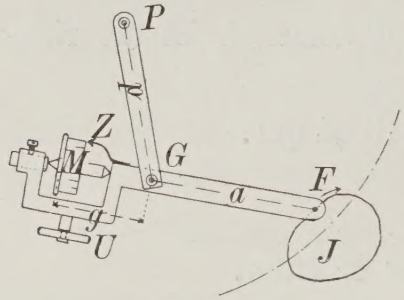


Fig. 110.

Theorie des Polarplanimeters.

Der Fahrstift F (Fig. 111) kann auf den benachbarten Punkt F_2 dadurch gebracht werden, daß der Fahrstrahl $\overline{PF} = r$ um den kleinen Winkel $FPF_1 = d\varphi$ gedreht und hierauf um $\overline{F_1F_2}$ verlängert wird. Während der Fahrstift von F nach F_1 kommt, beschreibt die Rolle den Weg $\overline{MM_1} = r_1 d\varphi$ und es wird hierbei auf ihrem Umfange der Bogen abgewickelt

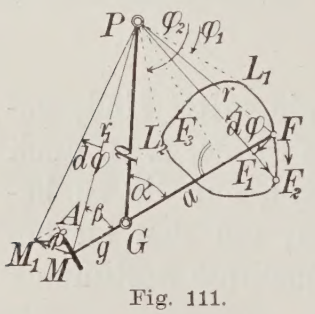


Fig. 111.

$$\overline{MA} = \overline{MM_1} \cos\beta = r_1 \cos\beta d\varphi . \qquad (1)$$

Während der Fahrstift weiterhin den Weg F_1F_2 zurücklegt, möge auf der Rolle der Bogen x abgewickelt werden; die dem Wege FF_2 des Fahrstiftes entsprechende Gesamtabwicklung auf der Meßrolle beträgt deshalb $r_1 \cos\beta\, d\varphi + x$. Denkt man sich die vollständige Umfahrung einer geschlossenen Figur durch die Aufeinanderfolge lauter solcher

Drehungen und Verlängerungen des Fahrstrahles r bewirkt, dann sieht man leicht ein, daß die Summe der von den Verlängerungen herrührenden Rollendrehungen also $\sum x = 0$ werden muß (dies ist stets auch dann der Fall, wenn der Fahrstift wieder in gleiche Entfernung r vom Pol gekommen ist); stellt deshalb u den Umfang der Meßrolle und n die Anzahl der Rollenumdrehungen, also die Differenz zwischen der End- und Anfangsablesung, vor, so ist

$$n \cdot u = \sum r_1 \cos\beta \, d\varphi \,. \tag{2}$$

Drückt man nach Andeutung der Fig. 111 r_1 und β durch die Abmessungen des Planimeters und durch r aus, so wird

$$\left.\begin{aligned} r_1 \cos\beta = p\cos\alpha + g \quad \text{und} \quad r^2 = a^2 + p^2 - 2ap\cos\alpha \\ \text{oder} \qquad \cos\alpha = \frac{a^2 + p^2 - r^2}{2ap} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

und nach Einsetzen in (2)

$$n \cdot u = \sum \left(g + \frac{a^2 + p^2 - r^2}{2a}\right) d\varphi = \sum \left(\frac{a^2 + p^2 + 2ag}{2a} - \frac{r^2}{2a}\right) d\varphi. \tag{4}$$

Setzt man zur Vereinfachung

$$R^2 = a^2 + p^2 + 2ag, \tag{5}$$

dann erhält man aus (4)

$$n \cdot au = \sum \frac{R^2}{2} d\varphi - \sum \frac{r^2}{2} d\varphi \,. \tag{6}$$

1. Liegt der Pol außerhalb der umfahrenen geschlossenen Figur mit dem Inhalte J, dann überstreicht r zwischen den äußersten Stellungen PL_1 und PL_2 (Fig. 111) den Winkelraum L_1PL_2 stets gleich oft im Sinne der Uhrzeigerdrehung (positiv) und im entgegengesetzten. Deshalb wird

$$\left.\begin{aligned} \sum \frac{R^2}{2} d\varphi = \frac{R^2}{2}(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{R^2}{2}(\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \,, \\ \text{und da} \\ \sum \frac{r^2}{2} d\varphi = \text{Fläche}\,(PL_1F_2L_2P) - \text{Fläche}\,(PL_1F_3L_2P) = J, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

so folgt aus (6):

$$n \cdot au = -J \,.$$

Die Rollenbezifferung ist meist derart gewählt, daß sie nach Umfahren der Fläche J im Uhrzeigerdrehsinne (mit „Pol außen“) wächst, so daß sich dann ergibt

$$J = n \cdot au = n \cdot f, \tag{I}$$

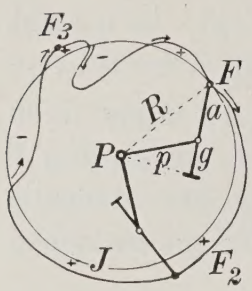


Fig. 112.

d. h. der Flächeninhalt der umfahrenen Fläche ist proportional der Anzahl der Rollenumdrehungen. Die Proportionalitätskonstante $f = au$ kann durch Ändern der Fahrarmlänge a auf einen runden Wert eingestellt werden.

2. Liegt der Pol innerhalb der umfahrenen geschlossenen Figur J (Fig. 112), dann überstreicht der Fahrstrahl r stets einen Vollwinkel (in analytischem Maße 2π), so daß also in Gleichung (6) wird

$$\left.\begin{aligned} \sum \frac{R^2}{2}\, d\varphi &= \frac{R^2}{2} \cdot 2\pi = C, \\ \sum \frac{r^2}{2}\, d\varphi &= \text{Fläche}\,(PFF_2F_3FP) = J, \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

folglich $n \cdot au = C - J$.

Ist die Rollenbezifferung unter Beachtung des unter 1. Gesagten ausgeführt, dann wird nach Umfahren der Fläche J im Uhrzeigerdrehsinn

$$n \cdot au = -C + J \quad \text{oder} \quad J = C + n \cdot f. \qquad (II)$$

Die Rollenumdrehung ist demnach der Fläche zwischen dem Kreise mit dem Radius R um den Pol (Grundkreis) und der Begrenzung der zu bestimmenden Figur proportional. Die Konstante $C = (a^2 + p^2 + 2ag)\pi$ (Gl. (5) und (8)) ändert sich mit den Dimensionen a und p des Planimeters. Wird der Fahrstift auf dem Grundkreise bewegt, dann dreht sich die Rolle nicht; er befindet sich stets dann auf diesem Kreise, wenn die erweiterte Rollenebene durch den Pol geht.

§ 59. Untersuchung und Gebrauch des Planimeters. Kompensationsplanimeter. Genauigkeit.

Damit nach den Formeln (I) und (II) des § 58 richtige Flächen gefunden werden, muß die Meßrolle sehr leicht, aber ohne schädlichen Spielraum drehbar, ihre Einteilung richtig und zentrisch und das Gelenk zwischen Polarm und Fahrarm in Ordnung sein. Diese Bedingungen prüft man durch Vor- und Rückwärtsfahren auf einer Geraden und mehrmaliges Befahren einer Probefigur; die Schlußablesung muß hierbei gleich der Anfangsablesung und die Rollenumdrehungen müssen gleich groß werden. Außerdem muß aber die Rollenachse parallel zur Verbindungsgeraden zwischen Gelenk und Fahrstift liegen. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, dann erhält man bei Umfahren derselben Probefläche J mit verschiedenen Polstellungen P, P_1, P_2 (Fig. 113), verschieden große Rollenumdrehungen n, n_1, n_2 und es muß dann das

eine Achsenlager solange im horizontalen Sinne verschoben werden, bis die Rollenumdrehungen gleich werden (Beseitigung der Rollenschiefe). Die Probeflächen werden meist als Kreisflächen mit Probelinealen erzeugt, deren eines Ende mit einer Nadelspitze N, die den Kreismittelpunkt bildet, versehen ist und das verschiedene Vertiefungen trägt, in die die Fahrstiftspitze eingesetzt werden kann.

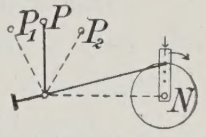


Fig. 113.

Der Einfluß der Rollenschiefe wird beseitigt, wenn der Fahrarm unter dem Polarm hindurch geführt werden und dadurch in die zur ersten Lage symmetrische Lage gebracht werden kann; durch rechtsinniges Umfahren derselben Fläche in den beiden symmetrischen Fahrarmlagen und Mittelbildung der Rollenumdrehungen wird eine etwaige Rollenschiefe unschädlich. Aus diesem Grunde besteht bei dem Langschen Kompensationsplanimeter das Gelenk G aus einer mit dem Polarm verbundenen Kugel, der Fahrarm ruht mit dem Fahrstift F, der Meßrolle M und der Tragrolle U auf der Zeichenfläche und kann unter dem Polarm hindurch geführt werden (Fig. 110).

1. Bestimmung der mittleren Höhe h_m einer gezeichneten Figur.

Man stellt die Fahrarmlänge $a = t$ (Fig. 114) ein, umfährt die Figur mit „Pol außen“ und erhält damit die Rollenumdrehungszahl n. Dann ist

$$J = n \cdot au = t \cdot h_m, \quad \text{folglich} \quad h_m = n \cdot u.$$

Häufig ist der Rollenumfang $u = 60{,}0$ mm.

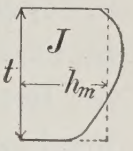


Fig. 114.

2. Flächenbestimmung mit „Pol außen“.

a) Die Fläche wird durch Vergleichen der zu bestimmenden Fläche J_1 mit einer bekannten Fläche J_2, z. B. einem Quadrate oder einem Kreise, der etwa mit dem Probelineal hergestellt wird, mit Hilfe des Planimeters erhalten. Vor der Umfahrung bringt man den Fahrstift nahezu in den Schwerpunkt der Figur J_1, stellt den Polarm nahezu senkrecht zum Fahrarm und legt den Pol fest. Dann umfährt man die zu bestimmende Fläche J_1 und erhält (als Mittel etwa zweier Messungen) die Rollenumdrehung n_1; das unter denselben Bedingungen ausgeführte Umfahren der Fläche J_2 liefert n_2. Nach Gl. (I), § 58, ist

$$\begin{aligned} J_1 &= n_1 \cdot f, \\ J_2 &= n_2 \cdot f, \end{aligned}$$

$$\text{folglich} \quad J_1 = J_2 \cdot \frac{n_1}{n_2}.$$

Die Kenntnis von f ist hier überflüssig. (Beste Meßart.)

b) Man stellt durch Verändern von a den runden Wert $f = au$ ein, umfährt die zu bestimmende Fläche J, wobei die Rollenumdrehung n beobachtet wird, und erhält durch $J = n \cdot f$ den gesuchten Inhalt.

Das Einstellen des runden Wertes f erfolgt durch einige Versuche. Es soll z. B. werden $f = au = 10000{,}0$ qmm. Beim Umfahren einer Kreisfläche von $J = 80{,}0^2\pi = 20106{,}2$ qmm soll demnach die Umdrehungszahl werden

$$n = \frac{J}{au} = 2{,}0106. \tag{1}$$

Bei einer Fahrarmeinstellung von $a' = 327{,}0$ Teilen (Halbmillimeter) wurde nach dem Umfahren der Fläche J erhalten $n' = 2{,}0000$ (Mittel aus 4 Messungen). Dies muß demnach um $dn = +0{,}0106$ Einheiten größer werden. Durch Differenzieren der Gl. (1) nach den Veränderlichen n und a folgt: $da = -a \cdot \frac{dn}{n} = -327 \cdot \frac{0{,}0106}{2{,}00} = -1{,}6$ Teile. Nach Verkürzen der Fahrarmlänge um 1,6 Teile ergab sich $n = 2{,}0105$, so daß weiterhin für diese Fahrarmeinstellung die Gleichung gilt: $J = 10000{,}0 \cdot n$. Häufig wird n in Einheiten von Tausendsteln der Rollenumdrehung gezählt, dann ist $J = 10{,}000\, n$.

3. Flächenbestimmung mit „Pol innen".

Diese Art der Bestimmung wird nur dann angewendet, wenn die zu berechnende Fläche nahezu die Größe der Grundkreisfläche C hat; zur Berechnung von Grundstückflächen für Katasterzwecke ist die Anwendung des Planimeters mit „Pol innen" untersagt.

Nachdem die Konstante f nach dem vorigen Verfahren bestimmt ist, muß noch C nach Gl. (II), § 58, ermittelt werden. Zu diesem Zwecke zeichnet man einen scharfen Kreis vom Inhalte J mit etwas größerem Radius als dem des Grundkreises und umfährt ihn mehrmals rechtsinnig. Während des Umfahrens muß festgestellt werden, ob die Rollenbezifferung wächst oder abnimmt, und nötigenfalls wie oft der Nullpunkt der Zählscheibe für die Vielfachen von Zehnerumdrehungen am Zeiger vorbeikommt.

Beispiel: Mit dem oben benutzten Planimeter mit $f = 10000{,}0$ qmm wurde die Kreisfläche $J = 280{,}0^2\pi = 246301{,}1$ qmm dreimal rechts herum umfahren und an der Rolle der Reihe nach abgelesen 3,076; 4,876; 6,670; 8,461; im Mittel folgt hieraus $n = +1{,}796$. Aus $J = C + 10000\, n$ folgt $C = J - 10000 \cdot n = 228351$ qmm und demnach die Planimetergleichung $J = 228351 + 10000\, n$. Bei Bestimmung einer Fläche mit diesem Planimeter bei „Pol innen" wurde zu Anfang abgelesen $A_1 = 9{,}114$. Während der rechtsinnigen Befahrung des Umfangs nahm die Rollen-

bezifferung beständig ab und am Ende der Umfahrung wurde $A_2 = 3{,}858$ an der Rolle abgelesen. Demnach ist:

$$n = A_2 - A_1 = 3{,}858 - 9{,}114 = -5{,}256$$

und die Fläche $J = 228351 - 52560 = 175791$ qmm.

Genauigkeit der Planimetermessung.

Wird mit einem berichtigten Planimeter eine Figur mehrmals umfahren, dann zeigen sich wegen der Ablesefehler an der Rolle, Umfahrungsfehler u. dgl. zwischen den einzelnen Rollenumdrehungen, die wieder mit n bezeichnet werden sollen, Abweichungen. Der mittlere Fehler m einer Umfahrung, ausgedrückt in Rollenumdrehungen, kann erfahrungsgemäß durch

$$m = k + k_1\sqrt{n} \tag{1}$$

dargestellt werden, worin k und k_1 vom einzelnen Planimeter und der Schärfe der Umfahrung abhängige Konstante sind.

Bei „Pol außen" ergibt sich deshalb der mittlere Fehler m_J der gemessenen Fläche J durch $m_J = m \cdot f$. (2)

Aus 128 freihändigen Umfahrungen dreier Kreise von 30, 60 und 90 mm Radius mit verschiedenen Fahrarmlängen (durchschnittlich stand der Fahrarm senkrecht zum Polarm) wurde für ein Langsches Kompensationsplanimeter (von Coradi in Zürich) gefunden:

$$m = 0{,}00098 + 0{,}00094\sqrt{n} \pm 0{,}00029,$$

also

$$m_J = 0{,}00098 \cdot f + 0{,}00094\sqrt{f} \cdot \sqrt{J}.$$

Ein Quadrat von 100 mm Seitenlänge wird demnach bei der Fahrarmeinstellung, der die Konstante $f = 10000{,}0$ qmm entspricht, durch eine Umfahrung auf

$$m_J = 9{,}8 + 9{,}4 = \pm 19{,}2 \text{ qmm},$$

durch zwei Umfahrungen auf $\pm \frac{19{,}2}{\sqrt{2}} = \pm 13{,}6$ qmm gefunden. Ein Fehler von 0,1 mm in zwei Parallelseiten würde das Quadrat um 10 qmm ändern.

Der Flächenfehler kann durch Verkleinern von f (Verkürzen des Fahrarms) kleiner gemacht werden und es gibt auch Planimeterkonstruktionen, bei denen 0,001 Rollenumfang einer umfahrenen Fläche von wenigen Quadratmillimeter Inhalt entspricht.

§ 60. Fehlergrenzen für Flächenbestimmungen.

Für amtliche Zwecke, z. B. für die Flächenbestimmungen bei Katastervermessungen sind in den einzelnen Staaten Fehlergrenzen festgesetzt, die von zwei unabhängigen Berechnungen derselben Fläche nicht überschritten werden dürfen. Dieselben Grenzen gelten in der Regel aber auch für die aus zwei unabhängigen Aufnahmen desselben Grundstücks berechneten Flächen. In Preußen z. B. dürfen bei Katastervermessungen nach der Anweisung VIII die zwei unabhängigen Berechnungen einer Parzelle (z. B. einmal aus Naturmaßen, das andere Mal aus einem Plane) von einander nicht mehr abweichen als

$$d = 0{,}01\sqrt{60 \cdot F + 0{,}02 \cdot F^2} \qquad (F \text{ und } d \text{ in Aren}).$$

Z. B. für $F = 10000$ qm wird $d = \pm 79$ qm.

10. Kapitel.

Flächenteilung und Grenzregelung.

Bei diesen Aufgaben ist eine Grenzlinie derart zu bestimmen, daß sie von einem Grundstücke einen vorgeschriebenen Inhalt abtrennt und gegen die Umfangsgrenzen des Grundstücks eine vorgeschriebene Lage einnimmt. Häufig muß hierbei der verschiedene Wert der Flächeneinheit (etwa wegen ungleicher Bodengüte, wegen besonderer Lage der abzutrennenden Flächenteile wie bei Vorderflächen auf Bauplätzen) berücksichtigt werden. Die meisten dieser Aufgaben löst man durch einige Versuche, weil die theoretische Lösung häufig zu viel Arbeit verursacht.

§ 61. Parallel- und Senkrechtteilung.

Durch die gerade Trennungslinie XY parallel zu AB (Fig. 115) soll die Fläche f abgetrennt werden.

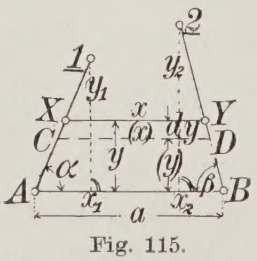


Fig. 115.

Die Begrenzung (1) AB (2) sei durch rechtwinklige Koordinaten nach Andeutung der Figur gegeben.

a) Scharfe Lösung.

Zur Bestimmung der beiden eingeführten Unbekannten x und y liest man aus der Figur ab

$$(a + x)\, y = 2f. \tag{1}$$

$$a - x = y(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta) \tag{2}$$

Durch Multiplikation: $a^2 - x^2 = 2f(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)$

oder

$$\left.\begin{aligned} x &= \sqrt{a^2 - 2f(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)} \\ y &= \frac{2f}{a+x} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

$$\text{wobei} \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x_1 - x_A}{y_1}, \quad \operatorname{ctg}\beta = \frac{x_B - x_2}{y_2}.$$

Die Absteckmaße werden deshalb:

$$\overline{AX} = \frac{y}{\sin\alpha}; \quad \overline{BY} = \frac{y}{\sin\beta}. \qquad (4)$$

Die beste Probe besteht in der Aufnahme und Berechnung des Vierecks $AXYB$ nach Abstecken der Punkte X und Y.

b) Lösung durch Versuche.

Man schätzt zuerst, zweckmäßig unter Benutzung eines maßstäblich gezeichneten Planes, die Parallelverschiebung zu (y), steckt damit die Parallele zu AB ab und sucht die beiden Punkte C und D auf (Fig. 115). Nach Abmessen von $\overline{CD} = (x)$ und $\overline{AB} = a$ ergibt sich die Fläche $ACDB$ zu (f). Näherungsweise ist deshalb CD parallel zu verrücken um

$$dy = \frac{f - (f)}{(x)},$$

wodurch die Punkte X und Y gefunden werden. Die Probe wird wie vorhin erhalten.

Beispiel: Das in Fig. 116 gezeichnete (in § 55 berechnete) Fünfeck soll in zwei gleiche Teile durch eine gerade Grenzlinie senkrecht zu $\overline{2\,.\,3}$ zerlegt werden.

Die Flächenberechnung in § 55 lieferte den ganzen Flächeninhalt $F = 1381{,}8$ qm; folglich ist abzutrennen $f = \frac{F}{2} = 690{,}95$ qm. Der erste rohe Versuch zeigte, daß die Grenzlinie in etwa 20 m Entfernung von (2) verläuft, deshalb wurde $\overline{2C} = 20{,}00$ m abgemessen, D aufgesucht und $\overline{CD} = 30{,}66$ m gemessen. Das Viereck $2CD1$ wurde auf $2D$ aufgenommen und mit den gemessenen Größen berechnet zu

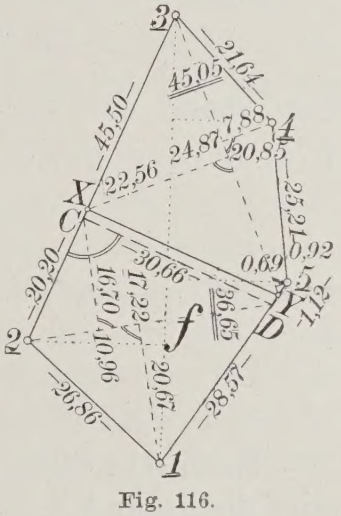


Fig. 116.

$$2(f) = 36{,}65 \cdot (16{,}70 + 20{,}67) = 1369{,}6, \quad \text{also} \quad (f) = 684{,}8 \text{ qm}.$$

Die Rückung beträgt deshalb: $\frac{690{,}95 - 684{,}8}{30{,}66} = 0{,}200$ m, womit die beiden

Punkte X und Y sich ergeben. Zur Probe wurde die Restfläche $Y.X.3.4.5.Y$ aufgenommen und mit den eingeschriebenen Maßzahlen berechnet zu

$$\begin{aligned} 45{,}05 \cdot 22{,}56 &= 1016{,}3 \\ 7{,}88 \cdot 44{,}36 &= 348{,}6 \\ 0{,}92 \cdot 24{,}87 &= 22{,}9 \\ \hline 2 \cdot \text{Fläche} &= 1387{,}8 \\ \text{Fläche} &= 693{,}9 \end{aligned}$$

Da diese Fläche 690,95 qm groß sein sollte, ergibt sich eine Differenz von 3,0 qm (zulässig wäre z. B. nach § 60 $d = 20$ qm).

§ 62. Teilung nach gleichem Seitenverhältnis.

Durch die Grenzlinie $XYZU$ (Fig. 117) soll der Wert

$$W = f_1 w_1 + f_2 w_2 + f_3 w_3$$

derart abgetrennt werden, daß die Strecken $\overline{1.2}$, $\overline{8.3}$, $\overline{7.4}$ und $\overline{6.5}$ in sehr nahezu gleichem Verhältnis v geteilt werden.

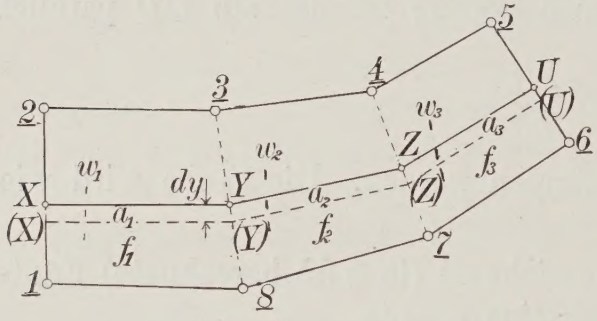


Fig. 117.

f_1, f_2, f_3 bezeichnen hierbei die Flächen $1.X.Y.8$, $8.Y.Z.7$ und $7.Z.U.6$, w_1, w_2, w_3 die Werte der Flächeneinheiten in den Flächen $1.2.3.8$ usf.

Zweckmäßig unter Benutzung eines Planes schätzt man zuerst das Teilungsverhältnis (v), mißt die Längen $\overline{1.2}$, $\overline{8.3}$, $\overline{7.4}$, $\overline{6.5}$ im Felde ab und berechnet:

$$\begin{aligned} \overline{1.(X)} &= (v) \cdot \overline{1.2} \\ \overline{8.(Y)} &= (v) \cdot \overline{8.3} \\ \overline{7.(Z)} &= (v) \cdot \overline{7.4} \\ \overline{6.(U)} &= (v) \cdot \overline{6.5} \end{aligned}$$

Nach Abstecken der Punkte (X), (Y), (Z), (U) mit diesen Längen wird die Figur $1.(X).(Y).(Z).(U).6.7.8.1$ aufgenommen, die Längen $\overline{(X)(Y)} = a_1$, $\overline{(Y)(Z)} = a_2$, $\overline{(Z)(U)} = a_3$ gemessen und dann die einzelnen Teile $(f_1) = 1(X)(Y)8$; (f_2) und (f_3) berechnet. Deren Werte geben

$$(W) = w_1(f_1) + w_2(f_2) + w_3(f_3).$$

Bezeichnet dy die Parallelverschiebung der neuen Grenzlinie, dann ist $W-(W)=dy(a_1w_1+a_2w_2+a_3w_3)$, folglich $dy=\frac{W-(W)}{a_1w_1+a_2w_2+a_3w_3}$. Mit dy werden die Punkte X, Y, Z, U abgesteckt.

§ 63. Geradelegung gebrochener Grenzlinien.

Der gebrochene Grenzzug $0'.1.2.3\ldots6$ (Fig. 118) soll ohne Änderung der Grundstücksflächen A und B gerade gelegt werden.

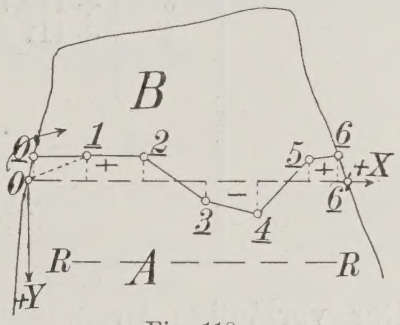


Fig. 118.

a) Die neue Grenze soll parallel zu einer gegebenen Richtung RR gehen.

Man steckt dann in der Nähe der zu erwartenden neuen Grenze parallel zu RR eine Aufnahmelinie ab und nimmt die bisherigen Eckpunkte $0'.1.2\ldots6$ und die Schnittpunkte 0 und 6′ auf diese mit rechtwinkligen Koordinaten auf. Berechnet man die Fläche Δ nach § 55. a) durch

$$2\Delta=2\cdot(0.0'.1.2.3.4.5.6.6'.0)=+\sum_1^n x_n(y_{n+1}-y_{n-1})=$$

$$=-\sum_1^n y_n(x_{n+1}-x_{n-1}),$$

wobei die Punkte im Uhrzeigerdrehsinn aufeinander folgen, und erhält z. B. einen positiven Wert, dann ist die Summe der mit + bezeichneten Flächen um den Betrag Δ größer als die der negativen Flächen. Die Linie $0\cdot6'$ müßte deshalb nach B parallel gerückt werden um den (sehr genäherten) Betrag $\Delta y=\frac{\Delta}{0.6'}$.

b) Soll die neue Grenze durch einen vorgeschriebenen Punkt, z. B. 0 gehen, dann nimmt man zunächst die neue Grenzlinie durch diesen Punkt näherungsweise an, mißt auf diese Linie als Aufnahmelinie den gebrochenen Grenzzug auf und berechnet in derselben Weise wie vorher die Fläche Δ. Die Drehung der Grenzlinie um den vorgeschriebenen Punkt 0 wird durch Verschieben des Punktes 6′ auf der Grenze 6′.6 ausgeführt. Die Höhe Δy des Dreiecks mit der Grundlinie 0.6′ (der die Rückung von 6′ entspricht) folgt zu $\Delta y=\frac{2.\Delta}{0.6'}$.

Beispiel: Der Punkt 0′ in Fig. 118 fällt mit 0 zusammen. Die Aufnahme auf die näherungsweise richtige neue Grenzlinie 0.6 lieferte die folgenden Koordinaten xy:

Nr. n	x	y	$x_{n+1} - x_{n-1}$	+	−
0	0	0	·	·	·
1	+ 25,1	− 6,1	+ 42,2	·	257,4
2	+ 42,2	− 5,8	+ 38,2	·	221,6
3	+ 63,3	+ 7,0	+ 36,5	255,5	·
4	+ 78,7	+ 7,3	+ 41,2	300,8	·
5	+ 104,5	− 3,2	+ 32,0	·	102,4
6	+ 110,7	− 4,1	+ 6,7	·	27,5
6′	+ 111,2	0	+ 110,7	·	·
				556,3	608,9
				$-2\Delta =$	− 52,6

$$\Delta y = \frac{+52{,}6}{111{,}2} = +0{,}473$$

Der vorläufige Grenzpunkt 6′ ist demnach in der Richtung nach 6 hinaufzurücken um 0,47 m, so daß die endgültige Grenzlinie durch diesen neuen Punkt und durch 0 gebildet wird.

VI. Abschnitt.

Elemente der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate.

§ 64. Fortpflanzung des mittleren Fehlers.

In § 4 wurde bereits der als Genauigkeitsmaß für die Beobachtungen dienende mittlere Fehler $\mathfrak{m}$ besprochen und gezeigt, in welcher Weise eine aus linearen Funktionen der beobachteten Größen berechnete Größe x durch die mittleren Fehler der Beobachtungen verändert wird. Es soll nun die zu bestimmende Größe x irgend eine Funktion f der unabhängigen Beobachtungen $l_1, l_2, \ldots, l_n$ sein, die mit den mittleren Fehlern $\pm m_1, \pm m_2, \ldots, \pm m_n$ behaftet sind, und der dadurch verursachte mittlere Fehler m_x der Größe x soll ermittelt werden.

$$x = f(l_1, l_2, \ldots, l_n). \tag{1}$$

Die bestimmten kleinen Änderungen $dl_1, dl_1', \ldots, dl_2, dl_2', \ldots$ usf. verursachen die bestimmten Veränderungen der Größe x

$$\text{Anzahl } s \begin{cases} dx = \frac{\partial f(l_1, l_2, \cdots, l_n)}{\partial l_1} \cdot dl_1 + \frac{\partial f(l_1, l_2, \cdots, l_n)}{\partial l_2} \cdot dl_2 + \cdots + \frac{\partial f(l_1, l_2, \cdots, l_n)}{\partial l_n} \cdot dl_n \\ dx' = \frac{\partial f}{\partial l_1} \cdot dl_1' + \frac{\partial f}{\partial l_2} \cdot dl_2' + \cdots + \frac{\partial f}{\partial l_n} \cdot dl_n' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ dx^{(s)} = \frac{\partial f}{\partial l_1} \cdot dl_1^{(s)} + \frac{\partial f}{\partial l_2} \cdot dl_2^{(s)} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial l_n} \cdot dl_n^{(s)} \end{cases} \tag{2}$$

Setzt man für die partiellen Differentialquotienten zur Abkürzung

$$\frac{\partial f}{\partial l_1} = \alpha_1, \quad \frac{\partial f}{\partial l_2} = \alpha_2, \quad \cdots, \quad \frac{\partial f}{\partial l_n} = \alpha_n, \tag{3}$$

und wendet die gleichen Schlüsse an wie in § 4, dann erhält man

$$m_x^2 = \alpha_1^2 m_1^2 + \alpha_2^2 m_2^2 + \cdots + \alpha_n^2 m_n^2 \tag{4}$$

als allgemeinste Form der Fehlerfortpflanzungsregel.

Zahlenbeispiel: Es wurde (Fig. 119) gemessen

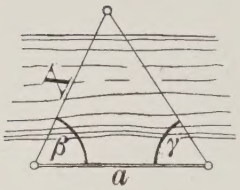


Fig. 119.

$$a = 391{,}320 \text{ m} \pm 0{,}020$$
$$\beta = 42^0\,12'\,30'' \pm 25''$$
$$\gamma = 73^0\,27'\,30'' \pm 20''$$

Wie groß ist x und sein mittlerer Fehler m_x?

$$x = \frac{a}{\sin(\beta+\gamma)} \sin\gamma \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\partial x}{\partial a} = \frac{\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)} = \frac{x}{a};\quad \alpha_2 = \frac{\partial x}{\partial \beta} = -\frac{a\sin\gamma}{\sin^2(\beta+\gamma)}\cos(\beta+\gamma) = -x\operatorname{ctg}(\beta+\gamma) \\ \alpha_3 &= \frac{\partial x}{\partial \gamma} = a\,\frac{\cos\gamma\sin(\beta+\gamma) - \cos(\beta+\gamma)\sin\gamma}{\sin^2(\beta+\gamma)} = \frac{a\sin\beta}{\sin^2(\beta+\gamma)}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Folglich nach Gleichung (4):

$$m_x^2 = \alpha_1^2 \cdot m_a^2 + \alpha_2^2 \cdot m_\beta^2 + \alpha_3^2 \cdot m_\gamma^2$$

und bei Zählung der mittleren Winkelfehler in Gradmaß, z. B. in Sekunden,

$$m_x^2 = \alpha_1^2 \cdot m_a^2 + \left(\frac{\alpha_2}{\varrho''}\right)^2 \cdot m_\beta''^2 + \left(\frac{\alpha_3}{\varrho''}\right)^2 \cdot m_\gamma''^2. \tag{7}$$

Die Zahlenrechnung liefert:

$$\beta + \gamma = 115^0\,40'\,00''$$

a	2.59253
$1 : \sin(\beta+\gamma)$	0.04512
$\sin\gamma$	9.98164
x	2.61929

$$x = 416{,}19.$$

Berechnet man den mittleren Fehler in cm-Einheiten, dann wird nach (6) und (7)

$$m_x^2 = \left(\frac{416}{391} \cdot 2{,}0\right)^2 + \left(\frac{41600 \cdot 0{,}481}{206265} \cdot 25\right)^2 + \left(\frac{39100 \cdot 0{,}672}{206265 \cdot 0{,}901^2} \cdot 20\right)^2$$
$$= 4{,}55 + 5{,}92 + 9{,}84$$
$$= 20{,}31 \text{ qcm}$$
$$m_x = \pm 4{,}50 \text{ cm},$$

Demnach $x = 416{,}19$ m $\pm 0{,}045$.

§ 65. Gewichte und deren Fortpflanzung.

Das Gewicht p einer Größe kann man definieren durch die Gleichung

$$p = \frac{k}{m^2}. \tag{1}$$

Die Konstante k heißt Gewichtskonstante, m ist der mittlere Fehler der Größe. Legt man einer Größe mit dem mittleren Fehler $\pm$ m das Gewicht $\mathfrak{p} = 1$ bei, dann folgt aus Gleichung (1)

$$k = \mathfrak{m}^2 \tag{2}$$

d. h. die Gewichtskonstante k ist das Quadrat des mittleren Fehlers der Gewichtseinheit; und folglich gilt auch

$$m^2 = \mathfrak{m}^2 \cdot \frac{1}{p}. \tag{3}$$

Sind $m_1, m_2, \ldots$ die mittleren Fehler von Größen, dann ergeben sich deren Gewichte zu $p_1 = \frac{k}{m_1^2}$, $p_2 = \frac{k}{m_2^2}$, $\cdots$. Durch Division dieser Gleichungen wird:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{m_2^2}{m_1^2} \tag{4}$$

d. h. die Gewichte verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate der mittleren Fehler.

Führt man z. B. in eine Rechnung das arithmetische Mittel aus n Beobachtungen $l_1, l_2, \cdots, l_n$ vom gleichen Gewichte $\mathfrak{p} = 1$ ein (also $\mathfrak{p} = \frac{k}{m^2} = 1$), dann ist das Gewicht p_x dieses Mittels $x = \frac{[l]}{n}$ zufolge der Definitionsgleichung (1) und Gleichung (8), § 4, zu nehmen

$$p_x = \frac{k}{m_x^2} = \frac{k}{m^2} \cdot n = n$$

d. h. die Wiederholungszahl gibt das Gewicht des arithmetischen Mittels aus gleich genauen Messungen.

Die Formeln für die Fortpflanzung des mittleren Fehlers liefern sogleich die Beziehungen für die Fortpflanzung der Gewichte, indem nach Gleichung (1) für das Quadrat des mittleren Fehlers jeweils $\frac{k}{p}$ gesetzt wird. Ist deshalb

$$m_x^2 = \alpha_1^2 m_1^2 + \alpha_2^2 m_2^2 + \cdots + \alpha_n^2 m_n^2,$$

so wird

$$\frac{k}{p_x} = \alpha_1^2 \cdot \frac{k}{p_1} + \alpha_2^2 \cdot \frac{k}{p_2} + \cdots + \alpha_n^2 \cdot \frac{k}{p_n}$$

oder

$$\frac{1}{p_x} = \alpha_1^2 \cdot \frac{1}{p_1} + \alpha_2^2 \cdot \frac{1}{p_2} + \cdots + \alpha_n^2 \cdot \frac{1}{p_n}.$$

§ 66. Berechnung des mittleren Fehlers der Gewichtseinheit aus wahren Fehlern ungleich genauer Beobachtungen.

Wenn die wahren Fehler $E_1, E_2, \ldots, E_n$ zu ungleich genauen Beobachtungen gehören, dann müssen sie vor der Anwendung der

Definitionsgleichung (1), § 4, für den mittleren Fehler erst auf das gleiche Gewicht $\mathfrak{p} = 1$ bezogen werden. Sind $p_1, p_2, \ldots, p_n$ die Gewichte der Beobachtungen und $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \ldots, \mathfrak{E}_n$ die auf gleiches Gewicht $\mathfrak{p} = 1$ bezogenen wahren Fehler, dann ist wegen Gleichung (4), § 65,

$$\frac{\mathfrak{E}^2}{E^2} = \frac{p}{\mathfrak{p}} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{E} = E\sqrt{p} \tag{1}$$

und folglich wird der mittlere Fehler $\mathfrak{m}$ der Gewichtseinheit:

$$\mathfrak{m}^2 = \frac{(E_1\sqrt{p_1})^2 + (E_2\sqrt{p_2})^2 + \cdots + (E_n\sqrt{p_n})^2}{n} = \frac{[pEE]}{n}. \tag{2}$$

§ 67. Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen.

Die n Beobachtungen $L_1, L_2, \ldots, L_n$ mit den Gewichten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ wurden zur Bestimmung der u Unbekannten $X, Y, Z, \ldots$ angestellt und vermitteln demnach deren Kenntnis. Damit eine Ausgleichung möglich ist, müssen mehr Beobachtungen vorliegen, als zur eindeutigen Berechnung der u Unbekannten notwendig sind, also $n > u$. Um die Beobachtungen verträglich zu machen, müssen sie um die Fehler oder Verbesserungen $v_1, v_2, \ldots, v_n$ geändert werden.

Fügt man die Verbesserungen v den Beobachtungen L hinzu, so erhält man die ausgeglichenen Beobachtungen $\underline{L}$ und zwischen diesen und den gesuchten Werten $\underline{X}, \underline{Y}, \underline{Z}$ bestehen dann widerspruchsfrei die folgenden mathematischen Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}
\underline{L}_1 &= L_1 + v_1 = f_1(\underline{X}, \underline{Y}, \underline{Z}), && \text{Gewicht } p_1 \\
\underline{L}_2 &= L_2 + v_2 = f_2(\underline{X}, \underline{Y}, \underline{Z}), && \text{„ } p_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots && \\
\underline{L}_n &= L_n + v_n = f_n(\underbrace{\underline{X}, \underline{Y}, \underline{Z}}_{u}), && \text{„ } p_n
\end{aligned}\right\} n \tag{1}$$

oder

$$\left.\begin{aligned}
v_1 &= f_1(\underline{X}, \underline{Y}, \underline{Z}) - L_1, && \text{Gewicht } p_1 \\
v_2 &= f_2(\underline{X}, \underline{Y}, \underline{Z}) - L_2, && \text{„ } p_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots && \\
v_n &= f_n(\underline{X}, \underline{Y}, \underline{Z}) - L_n, && \text{„ } p_n
\end{aligned}\right\} \tag{1a}$$

$f_1, f_2, \ldots, f_n$ stellen irgend welche Funktionen, linear oder höheren Grades, vor.

Wenn die Beobachtungsfehler v dem in § 4 genannten Fehlergesetze folgen, dann ist die Wahrscheinlichkeit für das Vorkommen des Fehlers z. B. von der Größe v_1 proportional dem Ausdrucke

$\frac{e^{-\frac{v_1^2}{2m_1^2}}}{m_1}$ (e = Basis der natürlichen Logarithmen, m_1 = mittlerer Fehler der Beobachtung L_1). Die Wahrscheinlichkeit für das Vorkommen des zufälligen Fehlersystems $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ist deshalb proportional der Größe

$$\frac{1}{m_1} e^{-\frac{v_1^2}{2m_1^2}} \cdot \frac{1}{m_2} e^{-\frac{v_2^2}{2m_2^2}} \cdots \frac{1}{m_n} e^{-\frac{v_n^2}{2m_n^2}} = \frac{1}{m_1 m_2 \cdots m_n} \cdot e^{-\left(\frac{v_1^2}{2m_1^2} + \frac{v_2^2}{2m_2^2} + \cdots + \frac{v_n^2}{2m_n^2}\right)}.$$

Soll dieses Fehlersystem zum wahrscheinlichsten werden (wodurch dann die wahrscheinlichsten Fehler, die wahrscheinlichsten Beobachtungen und demnach auch die wahrscheinlichsten Unbekannten $\underline{X}, \underline{Y}, \underline{Z}$ erhalten werden), so muß

$$\frac{1}{2m_1^2} \cdot v_1^2 + \frac{1}{2m_2^2} \cdot v_2^2 + \cdots + \frac{1}{2m_n^2} \cdot v_n^2 = \text{Minimum}$$

werden. Setzt man hierin die Gewichte nach § 65 ein, also

$$p_1 = \frac{k}{m_1^2}, \; p_2 = \frac{k}{m_2^2}, \cdots, \; p_n = \frac{k}{m_n^2},$$

so wird

$$p_1 v_1 v_1 + p_2 v_2 v_2 + \cdots + p_n v_n v_n = [pvv] = \text{Minimum}. \qquad (2)$$

Die unter Beachtung der Gleichung (2) errechneten Größen sind also die wahrscheinlichsten, wenn die obige Voraussetzung erfüllt ist.

Die Fehler- oder Verbesserungsgleichungen (1 a) müssen zunächst (z. B. durch Logarithmieren, Reihenentwicklungen) linear gemacht werden. Man führt deshalb für die Unbekannten etwa aus u der Gleichungen (1) berechnete gute Näherungswerte $(x), (y), (z)$ ein und setzt

$$\underline{X} = (x) + dx, \; \underline{Y} = (y) + dy, \; \underline{Z} = (z) + dz. \qquad (3)$$

Wendet man dann auf die rechte Seite der Gleichungen (1 a) den Taylorschen Satz an, so wird bei Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung

$$v = f(\underline{X}, \underline{Y}, \underline{Z}) - L = f((x),(y),(z)) - L + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz + \cdots \qquad (4)$$

Setzt man zur Abkürzung für die partiellen Differentialquotienten

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x} &= a_1, \; \frac{\partial v_1}{\partial y} = b_1, \; \frac{\partial v_1}{\partial z} = c_1 \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} &= a_2, \; \frac{\partial v_2}{\partial y} = b_2, \; \frac{\partial v_2}{\partial z} = c_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial v_n}{\partial x} &= a_n, \; \frac{\partial v_n}{\partial y} = b_n, \; \frac{\partial v_n}{\partial z} = c_n \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

und für

$$\left.\begin{aligned} f_1((x),(y),(z)) - L_1 &= l_1 \\ f_2((x),(y),(z)) - L_2 &= l_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ f_n((x),(y),(z)) - L_n &= l_n, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

dann nehmen die Gleichungen (1a) wegen (4) die Form an

$$\text{Anzahl: } n \left\{\begin{aligned} v_1 &= a_1 dx + b_1 dy + c_1 dz + l_1, && \text{Gewicht } p_1 \\ v_2 &= a_2 dx + b_2 dy + c_2 dz + l_2, && \text{„} \quad p_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & && \\ v_n &= \underbrace{a_n dx + b_n dy + c_n dz}_{\text{Anzahl: } u.} + l_n, && \text{„} \quad p_n \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Diese Fehler v_n können durch Multiplizieren mit $\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \ldots \sqrt{p_n}$ nach Gleichung (1), § 66, auf gleiches Gewicht $\mathfrak{p} = 1$ gebracht werden, also

$$\mathfrak{v}_n = v_n\sqrt{p_n} = a_n\sqrt{p_n}dx + b_n\sqrt{p_n}dy + c_n\sqrt{p_n}dz + l_n\sqrt{p_n}, \text{ Gewicht } \mathfrak{p} = 1. \tag{7a}$$

Aus den linearen Fehlergleichungen (7) bzw. (7a) sind nach dem oben Gesagten der Bedingung der Methode der kleinsten Quadrate zufolge die Unbekannten dx, dy, dz so zu bestimmen, daß $[pvv] = [\mathfrak{vv}] =$ Minimum. Da $[pvv]$ eine Funktion der unabhängigen Größen dx, dy, dz ist, so wird diese Bedingung erfüllt, wenn

$$\frac{\partial[pvv]}{\partial x} = 0, \frac{\partial[pvv]}{\partial y} = 0, \frac{\partial[pvv]}{\partial z} = 0. \tag{8}$$

Quadriert man deshalb die Gleichungen (7), multipliziert sie mit den entsprechenden Gewichten und addiert sie, dann wird zunächst:

$$\left.\begin{aligned} [pvv] = p_1v_1v_1 + p_2v_2v_2 + \cdots + p_nv_nv_n = \\ = [paa]dx^2 + 2[pab]dxdy + 2[pac]dxdz + 2[pal]dx \\ + [pbb]dy^2 + 2[pbc]dydz + 2[pbl]dy \\ + [pcc]dz^2 + 2[pcl]dz \\ + [pll] \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Wendet man hierauf die Minimumbedingung (8) an, dann kommt:

$$\left.\begin{aligned} [paa]dx + [pab]dy + [pac]dz + [pal] &= 0 \\ [pab]dx + [pbb]dy + [pbc]dz + [pbl] &= 0 \\ [pac]dx + [pbc]dy + [pcc]dz + [pcl] &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Die Gleichungen (10) heißen Normalgleichungen und dienen zur Berechnung der Unbekannten dx, dy, dz. Setzt man diese dann in den Gleichungen (7) ein, dann findet man die Verbesserungen v der einzelnen Beobachtungen L und damit die ausgeglichenen Beobachtungen $\underline{L}$

durch $\underline{L} = L + v$. Diese müssen sich zur durchgreifenden Rechenprobe weiterhin aus den Gleichungen (1) durch Einführen der ausgeglichenen Werte $\underline{X}$, $\underline{Y}$, $\underline{Z}$ nach (3) widerspruchsfrei ergeben.

Man sieht leicht, daß die erste Normalgleichung sich aus den Fehlergleichungen (7) ergibt durch Multiplizieren der ersten dieser Gleichungen mit $p_1 a_1$, der zweiten mit $p_2 a_2$ usf. und Addieren dieser n Gleichungen. Macht man dieselben Rechnungen der Reihe nach mit $p_1 b_1, p_2 b_2, \ldots, p_n b_n$; $p_1 c_1, p_2 c_2, \ldots, p_n c_n$; $p_1 l_1, p_2 l_2, \ldots, p_n l_n$, dann erhält man

$$\left.\begin{aligned}
[pav] &= \underline{[paa]}dx + [pab]dy + [pac]dz + [pal] = 0 \\
[pbv] &= [pab]dx + \underline{[pbb]}dy + [pbc]dz + [pbl] = 0 \\
[pcv] &= [pac]dx + [pbc]dy + \underline{[pcc]}dz + [pcl] = 0 \\
[plv] &= [pal]dx + [pbl]dy + [pcl]dz + \underline{\underline{[pll]}} = [pvv]
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Die Richtigkeit der letzten dieser Gleichungen wird im nächsten § 68 bewiesen.

Von den unterstrichenen quadratischen Gliedern aus gezählt stehen symmetrisch nach links und nach oben stets die gleichen Koeffizienten, man schreibt deshalb die Normalgleichungen auch abgekürzt in folgender symbolischer Form:

$$\left.\begin{aligned}
\underline{[paa]}dx + [pab]dy + [pac]dz + [pal] &= 0 \\
\underline{[pbb]}dy + [pbc]dz + [pbl] & \\
\underline{[pcc]}dz + [pcl] & \\
\underline{\underline{[pll]}} &
\end{aligned}\right\} \quad (11\,\text{a})$$

Anmerkung: Wurden zur Bestimmung einer Unbekannten $\underline{X}$ die Beobachtungen $L_1, L_2 \ldots L_n$ mit den Gewichten $p_1, p_2 \ldots p_n$ gemacht, so folgt aus den Gleichungen (1a)

$$\left.\begin{aligned}
v_1 &= \underline{X} - L_1; \text{ Gewicht } p_1 \\
v_2 &= \underline{X} - L_2 \quad \text{„} \quad p_2 \\
&\cdots\cdots\cdots \\
v_n &= \underline{X} - L_n \quad \text{„} \quad p_n
\end{aligned}\right\} \quad (1\,\text{a})$$

Da sämtliche Koeffizienten a der Größe $\underline{X}$ nach Gl. (5) und (7) gleich 1 sind, so wird aus Gleichung (10)

$$[p] \cdot \underline{X} + [pL] = 0 \quad \text{oder} \quad \underline{X} = \frac{[pL]}{[p]}. \quad (10)$$

Dieser Wert $\underline{X}$ führt die Bezeichnung allgemeines arithmetisches Mittel.

Durch Einsetzen von (10) in (1a) und Bilden der Summe $p_1 v_1 + p_2 v_2 + \cdots + p_n v_n$ findet man die Probegleichung $[pv] = 0$.

§ 68. Auflösung der Normalgleichungen (11) nach dem Gaußischen Algorithmus.

Die Normalgleichungen (11) löst man meist nach dem Gaußischen Eliminationsverfahren auf, weil man dadurch nebenher die Fehlerquadratsumme und die Gewichte einiger Unbekannten der Ausgleichung erhält.

Multipliziert man die erste Gleichung von (11) mit $\frac{[pab]}{[paa]} = (1)$ und subtrahiert sie gliedweise von der zweiten Gleichung, dann verschwindet die Unbekannte dx; multipliziert man sie mit $\frac{[pac]}{[paa]} = (2)$ und subtrahiert sie von der dritten Gleichung in (11), dann ist ebenfalls dx eliminiert usf. Man erhält deshalb tabellarisch folgende Rechnung:

$dx \cdot$	$dy \cdot$	$dz \cdot$		
$[paa]$	$[pab]$	$[pac]$	$[pal]$	$= 0$
$[pab]$	$[pbb]$	$[pbc]$	$[pbl]$	$= 0$
$-\left(\frac{[pab]}{[paa]}\right)[paa]$	$-(1)[pab]$ *	$-(1)[pac]$	$-(1)[pal]$	$= 0$
$[pac]$	$[pbc]$	$[pcc]$	$[pcl]$	$= 0$
$-\left(\frac{[pac]}{[paa]}\right)[paa]$	$-(2)[pab]$	$-(2)[pac]$ *	$-(2)[pal]$	$= 0$
$[pal]$	$[pbl]$	$[pcl]$	$[pll]$	$= [pvv]$
$-\left(\frac{[pal]}{[paa]}\right)[paa]$	$-(3)[pab]$	$-(3)[pac]$	$-(3)[pal]$*	$= 0$
	$[pbb \cdot 1]$	$[pbc \cdot 1]$	$[pbl \cdot 1]$	$= 0$
	$[pbc \cdot 1]$	$[pcc \cdot 1]$	$[pcl \cdot 1]$	$= 0$
	$-\left(\frac{[pbc \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}\right)[pbb \cdot 1]$	$-(2')[pbc \cdot 1]$*	$-(2')[pbl \cdot 1]$	$= 0$
	$[pbl \cdot 1]$	$[pcl \cdot 1]$	$[pll \cdot 1]$	$= [pvv]$
	$-\left(\frac{[pbl \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]}\right)[pbb \cdot 1]$	$-(3')[pbc \cdot 1]$	$-(3')[pbl \cdot 1]$*	$= 0$
		$[pcc \cdot 2]$	$[pcl \cdot 2]$	$= 0$
		$[pcl \cdot 2]$	$[pll \cdot 2]$	$= [pvv]$
		$-\left(\frac{[pcl \cdot 2]}{[pcc \cdot 2]}\right)[pcc \cdot 2]$	$-(3'')[pcl \cdot 2]$*	$= 0$
			$[pll \cdot 3]$	$= [pvv]$

Einmal reduzierte Normalgleichungen

Zweimal reduzierte Normalgleichungen

* Dieser Ausdruck ist also stets negativ; steht in dieser Spalte auf der ersten Zeile der entsprechenden reduzierten Gleichungen eine negative Zahl, dann kommen die Vorzeichen auf der mit * bezeichneten Zeile in derselben Reihenfolge wie auf dieser ersten Zeile und umgekehrt.

Setzt man zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned}
&[pbb] - \frac{[pab]}{[paa]} \cdot [pab] = [pbb] - (1) \cdot [pab] = [pbb \cdot 1],\\
&[pbc] - (1) \cdot [pac] \quad = [pbc \cdot 1],\\
&[pbl] - (1) \cdot [pal] \quad = [pbl \cdot 1],\\
&[pbc] - \frac{[pac]}{[paa]} \cdot [pab] = [pbc] - (2) \cdot [pab] = [pbc \cdot 1],\\
&[pcc] - (2) \cdot [pac] \quad = [pcc \cdot 1],\\
&[pcl] - (2) \cdot [pal] \quad = [pcl \cdot 1],\\
&[pbl] - \frac{[pal]}{[paa]} \cdot [pab] = [pbl] - (3) \cdot [pab] = [pbl \cdot 1],\\
&[pcl] - (3) \cdot [pac] \quad = [pcl \cdot 1],\\
&[pll] - (3) \cdot [pal] \quad = [pll \cdot 1],
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

dann nehmen die einmal reduzierten Normalgleichungen die durch stärkeren Druck hervorgehobene Form an. Reduziert man diese Gleichungen zur Eliminierung der Unbekannten dy in der gleichen Weise wie die ursprünglichen Gleichungen und setzt

$$\left.\begin{aligned}
&[pcc \cdot 1] - \frac{[pbc \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]} \cdot [pbc \cdot 1] = [pcc \cdot 1] - (2') \cdot [pbc \cdot 1] = [pcc \cdot 2],\\
&[pcl \cdot 1] - (2') \cdot [pbl \cdot 1] = [pcl \cdot 2],\\
&[pcl \cdot 1] - \frac{[pbl \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]} \cdot [pbc \cdot 1] = [pcl \cdot 1] - (3') \cdot [pbc \cdot 1] = [pcl \cdot 2],\\
&[pll \cdot 1] - (3') \cdot [pbl \cdot 1] = [pll \cdot 2],
\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

dann erhält man die zweimal reduzierten Normalgleichungen und aus diesen durch weitere Eliminierung in der gleichen schematischen Weise

$$[pll \cdot 3] = [pvv]. \quad (14)$$

Die Unbekannten werden

$$dz = -\frac{[pcl \cdot 2]}{[pcc \cdot 2]}$$

und deren Gewicht

$$p_z = [pcc \cdot 2]. \quad (15)$$

Setzt man den Wert von dz in die erste der einmal reduzierten Normalgleichungen, also in

$$[pbb \cdot 1]\,dy + [pbc \cdot 1]\,dz + [pbl \cdot 1] = 0$$

ein, dann ist

$$dy = \frac{-[pbl\cdot 1]-[pbc\cdot 1]\,dz}{[pbb\cdot 1]}$$

und das Gewicht

$$p_y = \frac{[pbb\cdot 1]}{[pcc\cdot 1]}\cdot p_z, \qquad (16)$$

und aus der ersten Normalgleichung folgt

$$dx = \frac{-[pal]-[pac]\,dz-[pab]\,dy}{[paa]}. \qquad (17)$$

Zum Beweise der in Gleichung (11) des § 67 gemachten Behauptung, daß $[plv] = [pvv]$ und also $= [pll\cdot 3]$ wird, dividiert man das Quadrat der ersten Normalgleichung mit $[paa]$, das Quadrat der ersten einmal reduzierten Normalgleichung mit $[pbb\cdot 1]$ und das Quadrat der ersten zweimal reduzierten Normalgleichung mit $[pcc\cdot 2]$ und subtrahiert dann diese drei Gleichungen der Reihe nach von Gleichung (9) des § 67. Dadurch erhält man bei Berücksichtigung der Bezeichnungen in (12) und (13) bezw. bei Betrachten der letzten Spalte in der tabellarischen Rechnung von Seite 150

$$[pvv]-0-0-0 = [pll]-\frac{[pal]^2}{[paa]}-\frac{[pbl\cdot 1]^2}{[pbb\cdot 1]}-\frac{[pcl\cdot 2]^2}{[pcc\cdot 2]} = [pll\cdot 3], \qquad (18)$$

wodurch die letzte Gleichung in (11) bewiesen ist. Wegen Gleichung (11) und (14) gilt also

$$[pvv] = [plv] = [pll\cdot 3]. \qquad (19)$$

Man kann deshalb auch die letzte Gleichung in (11) zur Berechnung der Fehlerquadratsumme benutzen, wenn man diese nicht durch die Eliminierung berechnen will.

Man findet leicht, daß die Koeffizienten links der in der Tabelle Seite 150 punktierten Linie, weil sie vom unterstrichenen (quadratischen) Gliede aus nach links und nach oben symmetrisch vorkommen, bei der Zahlenrechnung nicht angeschrieben werden müssen.

Vertauscht man die Reihenfolge der Unbekannten in den Normalgleichungen (11) z. B. durch Umsetzen in abgekürzter Form:

$$\begin{aligned} \underline{[pcc]}\,dz + [pbc]\,dy + [pac]\,dx + [pcl] &= 0 \\ \underline{[pbb]}\,dy + [pab]\,dx + [pbl] &= 0 \\ \underline{[paa]}\,dx + [pal] &= 0 \\ \underline{[pll]} &= 0 \end{aligned} \qquad (20)$$

und reduziert diese in der eben behandelten Weise, dann erhält man zur Probe $[pll\cdot 3] = [pvv]$, dx, dy, dz, außerdem aber das Gewicht der Größe dx zu

und zur Probe noch

$$\left.\begin{aligned} p_x &= [paa \cdot 2] \\ p_y &= \frac{[pbb \cdot 1]}{[paa \cdot 1]} \cdot p_x . \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Der mittlere Fehler $\mathfrak{m}$ der Gewichtseinheit, d. h. einer Beobachtung vom Gewichte $\mathfrak{p} = 1$, ergibt sich nach § 70 zu

$$\mathfrak{m} = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-u}}, \tag{22}$$

so daß die mittleren Fehler der ausgeglichenen Größen mit den Gewichten p_x, p_y, p_z wegen § 65, Gl. (3), werden

$$m_x = \frac{\mathfrak{m}}{\sqrt{p_x}}, \quad m_y = \frac{\mathfrak{m}}{\sqrt{p_y}}, \quad m_z = \frac{\mathfrak{m}}{\sqrt{p_z}}. \tag{23}$$

(Wegen Bestimmung der Gewichte p_x, p_y, p_z siehe § 71.)

Zur Berechnung der Unbekannten aus den Normalgleichungen usw. reicht in den meisten Fällen der 25 cm lange Rechenschieber aus, wenn die Absolutglieder l kleine Zahlen werden. Dieses erreicht man durch passende Wahl der Rechnungseinheit für die Verbesserungen.

§ 69. Zahlenbeispiel.

Mit einem Schraubenmikrometer wurden die folgenden Werte für die Dicke L an den einzelnen Teilstrichen t eines Meßkeils (vgl. § 15) gleich genau gemessen (Fig. 120). Die Keilgleichung ist aufzustellen (die Dicke ist als Funktion der Teilstrichbezifferung auszudrücken).

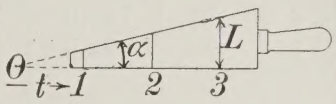


Fig. 120.

Bezeichnet $\underline{y_0}$ die Dicke des Meßkeils am Teilstriche Null, $\underline{x}$ die Tangente des Keilwinkels α, t die Bezifferung des $t$ten Teilstriches, $\underline{L}$ die daselbst vorhandene Meßkeildicke und v die Verbesserung der hiefür gemessenen Dicke L, so ist

$$\underline{L} = \underline{y_0} + t \cdot \underline{x} = L + v. \tag{1}$$

Die allgemeinen Fehlergleichungen haben demnach die Form:

$$v = \underline{y_0} + t \cdot \underline{x} - L, \quad \text{Gewicht } p. \tag{1a}$$

Obwohl diese Gleichungen bereits linear sind, führt man zur leichteren Zahlenrechnung in (1a) Näherungswerte für $\underline{y_0}$ und $\underline{x}$ ein, und setzt

$$\left.\begin{aligned} \underline{y_0} &= (y) + dy, \\ \underline{x} &= (x) + dx. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Bezeichnet man die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 1 = a, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = t = b \quad \text{und} \quad (y) + b(x) - L = l, \qquad (3)$$

so erhält man aus (1a), wenn allen Beobachtungen das Gewicht $\mathfrak{p} = 1$ beigelegt wird:

$$v = a\,dy + b\,dx + l, \quad \text{Gewicht } \mathfrak{p} = 1.$$

Aus den zu diesen linearen Fehlergleichungen gehörigen Normalgleichungen ergeben sich nach §§ 67 und 68 die Unbekannten.

Zur Erzielung bequemer Zahlenrechnung zählt man bei der Ausgleichung die Dicken und folglich auch die Widersprüche l in Einheiten von $\frac{1}{100}$ mm.

Nr.	Teilstrich t	Gemessene Dicke L in $\frac{1}{100}$ mm	Gewicht p	$(y)+b(x)$	l	a	b	bb	bl	ll
1	1	93,8	1	101,0	+ 7,2	+1	+ 1	1	+ 7,2	51,8
2	2	193,5	1	202,0	+ 8,5	+1	+ 2	4	+ 17,0	72,2
3	3	293,3	1	303,0	+ 9,7	+1	+ 3	9	+ 29,1	94,1
4	4	392,0	1	404,0	+12,0	+1	+ 4	16	+ 48,0	144,0
5	5	495,1	1	505,0	+ 9,9	+1	+ 5	25	+ 49,5	98,0
6	6	594,4	1	606,0	+11,6	+1	+ 6	36	+ 69,6	134,6
7	7	696,1	1	707,0	+10,9	+1	+ 7	49	+ 76,3	118,8
8	8	799,0	1	808,0	+ 9,0	+1	+ 8	64	+ 72,0	81,0
9	9	902,0	1	909,0	+ 7,0	+1	+ 9	81	+ 63,0	49,0
					+85,8	+9	+45	285	+431,7	843,5

Aus den Dicken an den Teilstrichen 9 und 1 folgt näherungsweise $(x) = \frac{902{,}0 - 93{,}8}{9-1} = \frac{808{,}2}{8} = 101{,}0$ und außerdem ist leicht ersichtlich, daß bei dem Teilstriche Null die Dicke nahezu zu Null werden würde, also $(y) = 0$. Mit diesen Werten sind die Dicken $(y) + b(x) = (y) + t(x)$ berechnet und damit die Absolutglieder $l = (y) + b(x) - L$. Die Normalgleichungskoeffizienten werden

$$[aa] = +9, \quad [ab] = +45, \quad [al] = +85{,}8,$$
$$[bb] = +285, \quad [bl] = +431{,}7,$$
$$[ll] = +843{,}5,$$

und damit ergibt sich nach dem Gaußischen Eliminationsverfahren (§ 68) mit dem 25 cm-Rechenschieber die folgende schematische Rechnung:

dy	dx		
+ 9	+ 45	+ 85,8	$dy = \frac{-85{,}8 + 0{,}045 \cdot 45}{9} = -9{,}31$
	+ 285	+ 431,7	$p_y = \frac{9}{285} \cdot 60 = 1{,}89$
	− 225*	− 429,0	
		+ 843,5	
		− 818,0	
	+ 60	+ 2,7	$dx = \frac{-2{,}7}{60} = -0{,}045$
		+ 25,5	$p_x = 60$
		− 0,1*	
		+ 25,4 = $[pvv]$	

Folglich wird

$$\underline{x} = 101{,}0 - 0{,}045 = 100{,}955 \pm 0{,}25,$$

$$\underline{y_0} = \quad 0 \quad - 9{,}31 \quad = -9{,}31 \quad \pm 1{,}39.$$

Der mittlere Fehler einer Beobachtung vom Gewichte 1 (der Gewichtseinheit) ist, da zur Bestimmung von zwei Unbekannten auch zwei Beobachtungen notwendig sind, also 9—2 die Zahl der überschüssigen Beobachtungen vorstellt:

$$\mathfrak{m} = \sqrt{\frac{25{,}4}{9-2}} = \pm 1{,}905$$

und deshalb

$$m_x = \pm 1{,}905 \sqrt{\frac{1}{60}} = \pm 0{,}246,$$

$$m_y = \pm 1{,}905 \sqrt{\frac{1}{1{,}89}} = \pm 1{,}39 \ .$$

Die Keilgleichung wird

$$\underline{L} = \mathbf{100{,}95_5}\, t - \mathbf{9{,}3}.$$

Proberechnungen:

Nr.	ady	bdx	l	v	vv	$100{,}95 \cdot t$	$\underline{L}$	$L + v$
1	− 9,3	0	+ 7,2	− 2,1	4,4	101,0	91,7	91,7
2	− 9,3	− 0,1	+ 8,5	− 0,9	0,8	201,9	192,6	192,6
3	− 9,3	− 0,1	+ 9,7	+ 0,3	0,1	302,9	293,6	293,6
4	− 9,3	− 0,2	+ 12,0	+ 2,5	6,3	403,8	394,5	394,5
5	− 9,3	− 0,2	+ 9,9	+ 0,4	0,2	504,8	495,5	495,5
6	− 9,3	− 0,3	+ 11,6	+ 2,0	4,0	605,7	596,4	596,4
7	− 9,3	− 0,3	+ 10,9	+ 1,3	1,7	706,7	697,4	697,4
8	− 9,3	− 0,4	+ 9,0	− 0,7	0,5	807,6	798,3	798,3
9	− 9,3	− 0,4	+ 7,0	− 2,7	7,3	908,6	899,3	899,3
					25,3			

* Über die Vorzeichen siehe die Anmerkung auf Seite 150.

Die kleine Differenz zwischen der hier berechneten Fehlerquadratsumme 25,3 gegen den bei der Eliminierung gefundenen Wert 25,4 rührt von kleinen Abrundungsfehlern her. Die Hauptprobe wird gebildet durch die Übereinstimmung der beiden letzten Spalten.

§ 70. Mittlerer Fehler m der Gewichtseinheit.

Sind $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ die wahren Beobachtungsfehler der n Messungen $L_1, L_2, \ldots, L_n$ und $p_1, p_2, \ldots, p_n$ deren Gewichte, dann ergibt sich durch die Definitionsgleichung (6), § 66, der mittlere Fehler der Gewichtseinheit durch

$$\mathfrak{m}^2 = \frac{[p\varepsilon\varepsilon]}{n}. \tag{1}$$

Durch die Ausgleichung werden den Beobachtungen $L_1, \ldots, L_n$ die Verbesserungen $v_1, \ldots, v_n$ zugeteilt, die derart beschaffen sind, daß

$$[pvv] = \text{Minimum}. \tag{2}$$

Es muß also die Summe $[p\varepsilon\varepsilon]$ größer sein als die Summe $[pvv]$ und es werde deshalb gesetzt

$$[pvv] = [p\varepsilon\varepsilon] - k, \tag{3}$$

worin k eine noch zu bestimmende Größe vorstellt.

Bezeichnen $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ diejenigen Unbekannten, denen das Verbesserungssystem (Fehlersystem) $v_1, \ldots, v_n$, und x, y, z die Werte, denen die wahren Verbesserungen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ der Beobachtungen entsprechen, dann nehmen die linearen Fehlergleichungen (7), § 67, die folgende Form an, wobei den Größen $v, \varepsilon, a, b, c, l, p$ jeweils die Zeiger 1 bis n anzufügen sind (die Näherungswerte $(x), (y), (z)$ sind der Einfachheit halber abgespalten):

$$\left.\begin{aligned} v &= a\underline{x} + b\underline{y} + c\underline{z} + l, \quad \text{Gewicht } p, \\ \varepsilon &= ax + by + cz + l, \quad \text{„} \quad p. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Durch Subtraktion: $\varepsilon = a(x - \underline{x}) + b(y - \underline{y}) + c(z - \underline{z}) + v =$

$$= a\Delta x + b\Delta y + c\Delta z + v. \tag{5}$$

Multipliziert man die einzelnen Gleichungen (5) der Reihe nach mit

$$p_1\varepsilon_1, p_2\varepsilon_2, \ldots, p_n\varepsilon_n; \; p_1v_1, p_2v_2, \ldots, p_nv_n$$

und bildet die Summen

$$p_1\varepsilon_1\varepsilon_1 + p_2\varepsilon_2\varepsilon_2 + \cdots + p_n\varepsilon_n\varepsilon_n = [p\varepsilon\varepsilon],$$

sowie

$$p_1\varepsilon_1v_1 + p_2\varepsilon_2v_2 + \cdots + p_n\varepsilon_nv_n = [p\varepsilon v],$$

so wird

$$[p\varepsilon\varepsilon] = [pa\varepsilon]\Delta x + [pb\varepsilon]\Delta y + [pc\varepsilon]\Delta z + [pv\varepsilon],$$
$$[p\varepsilon v] = [pav]\Delta x + [pbv]\Delta y + [pcv]\Delta z + [pvv].$$

Wegen der Normalgleichungen (11), § 67, wird

$$[pav] = [pbv] = [pcv] = 0$$

und deshalb nach Addieren dieser zwei Gleichungen

$$[p\varepsilon\varepsilon] = [pvv] + [pa\varepsilon]\Delta x + [pb\varepsilon]\Delta y + [pc\varepsilon]\Delta z = [pvv] + k. \quad (6)$$

Multipliziert man die Gleichungen (5) mit pa, pb, pc und bildet die Summen $p_1 a_1 \varepsilon_1 + p_2 a_2 \varepsilon_2 + \cdots + p_n a_n \varepsilon_n = [pa\varepsilon]$ usw., so wird

$$[pa\varepsilon] = \underline{[paa]}\Delta x + [pab]\Delta y + [pac]\Delta z,$$
$$[pb\varepsilon] = [pab]\Delta x + \underline{[pbb]}\Delta y + [pbc]\Delta z,$$
$$[pc\varepsilon] = [pac]\Delta x + [pbc]\Delta y + \underline{[pcc]}\Delta z.$$

Löst man diese Normalgleichungen nach dem Gaußschen Eliminationsverfahren des § 68 auf, dann erhält man

$$\left.\begin{aligned} \Delta z &= \frac{[pc\varepsilon \cdot 2]}{[pcc \cdot 2]}, \\ \Delta y &= \frac{[pb\varepsilon \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]} - \frac{[pbc \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]} \cdot \frac{[pc\varepsilon \cdot 2]}{[pcc \cdot 2]}, \\ \Delta x &= \frac{[pa\varepsilon]}{[paa]} - \frac{[pab]}{[paa]} \cdot \Delta y - \frac{[pac]}{[paa]} \Delta z. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Setzt man (7) in (6) ein, dann wird

$$k = \frac{[pa\varepsilon]^2}{[paa]} + \frac{[pb\varepsilon \cdot 1]^2}{[pbb \cdot 1]} + \frac{[pc\varepsilon \cdot 2]^2}{[pcc \cdot 2]}. \quad (8)$$

Die Quadrate $[pa\varepsilon]^2$, $[pb\varepsilon \cdot 1]^2$ und $[pc\varepsilon \cdot 2]^2$ lassen sich schätzen und deshalb kann k wenigstens näherungsweise bestimmt werden. Es ist

$$\begin{aligned} [pa\varepsilon]^2 &= (p_1 a_1 \varepsilon_1 + p_2 a_2 \varepsilon_2 + \cdots + p_n a_n \varepsilon_n)^2 = \\ &= p_1^2 a_1^2 \varepsilon_1^2 + p_2^2 a_2^2 \varepsilon_2^2 + \cdots + p_n^2 a_n^2 \varepsilon_n^2 \\ &\quad + 2 p_1 p_2 a_1 a_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \quad + \cdots + 2 p_1 p_n a_1 a_n \varepsilon_1 \varepsilon_n \\ &\quad + 2 p_2 p_3 a_2 a_3 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \quad + \cdots + 2 p_2 p_n a_2 a_n \varepsilon_2 \varepsilon_n \\ &\qquad\qquad \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ &\qquad\qquad \cdots + 2 p_{n-1} p_n a_{n-1} a_n \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n. \end{aligned}$$

Die Summe der Summanden mit dem Faktor 2 wird zu Null, da die wahren Fehler ε gleich wahrscheinlich positiv wie negativ sind; führt

man weiterhin nach Gleichung (1) für die einzelnen Fehler $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ ihren Mittelwert $\mathfrak{m}$ ein, so folgt

$$[pa\varepsilon]^2 = [paa] \cdot \mathfrak{m}^2. \tag{9}$$

Der Zähler des zweiten Gliedes in (8) wird

$$[pb\varepsilon \cdot 1]^2 = \left([pb\varepsilon] - \frac{[pab]\,[pa\varepsilon]}{[paa]}\right)^2 =$$

$$= [pb\varepsilon]^2 - 2\frac{[pb\varepsilon]\,[pa\varepsilon]\,[pab]}{[paa]} + \frac{[pab]^2\,[pa\varepsilon]^2}{[paa]^2}.$$

Durch dieselben Schlüsse wie vorher wird

$$[pb\varepsilon]^2 = [pbb] \cdot \mathfrak{m}^2$$

und

$$[pa\varepsilon]\,[pb\varepsilon] = p_1^2 a_1 b_1 \varepsilon_1^2 + p_2^2 a_2 b_2 \varepsilon_2^2 + \cdots + p_n^2 a_n b_n \varepsilon_n^2$$
$$+ 2p_1 p_2 a_1 b_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \cdots + 2p_{n-1} p_n a_{n-1} b_n \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n =$$
$$= [pab] \cdot \mathfrak{m}^2,$$

so daß also

$$[pb\varepsilon \cdot 1]^2 = [pbb]\,\mathfrak{m}^2 - 2\frac{[pab]^2}{[paa]} \cdot \mathfrak{m}^2 + \frac{[pab]^2}{[paa]} \cdot \mathfrak{m}^2 = [pbb \cdot 1] \cdot \mathfrak{m}^2. \tag{10}$$

In gleicher Weise findet man

$$[pc\varepsilon \cdot 2]^2 = [pcc \cdot 2] \cdot \mathfrak{m}^2, \tag{11}$$

so daß nach Einsetzen von (9), (10) und (11) in (8) sich für $u = 3$ Unbekannte ergibt:

$$k = \mathfrak{m}^2 + \mathfrak{m}^2 + \mathfrak{m}^2 = 3\,\mathfrak{m}^2. \tag{12a}$$

Wären statt dreier Unbekannten u solche vorhanden, dann würde sich aus Gleichung (8) in derselben Weise wie vorher ergeben

$$k = u \cdot \mathfrak{m}^2. \tag{12}$$

Durch Einsetzen von (12) und (1) in (3) wird

$$[pvv] = n \cdot \mathfrak{m}^2 - u \cdot \mathfrak{m}^2 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{m}^2 = \frac{[pvv]}{n-u}. \tag{13}$$

Der Nenner stellt demnach die Anzahl der zur Bestimmung von u Unbekannten überschüssig gemachten Beobachtungen vor.

§ 71. Mittlere Fehler der ausgeglichenen Größen.

Zur Berechnung der mittleren Fehler der aus den Normalgleichungen (10), § 67, bestimmten Unbekannten dx, dy, dz, bzw. von $\underline{X}$, $\underline{Y}$, $\underline{Z}$ müssen diese als lineare Funktionen der unabhängigen

Beobachtungen $l_1, l_2, \ldots$, bzw. $L_1, L_2, \ldots$ ausgedrückt werden, z. B. durch

$$\left.\begin{aligned} -dx &= \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \cdots + \alpha_n l_n, \\ -dy &= \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \cdots + \beta_n l_n, \\ -dz &= \gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 + \cdots + \gamma_n l_n, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

dann bekommt man durch die Fehlerfortpflanzungsregel (§ 64), wenn $\mathfrak{m}$ der mittlere Fehler der Gewichtseinheit ist und wenn weiterhin der Einfachheit halber in den Normalgleichungen (10) § 67 $a, b, c, \ldots, l$ die Koeffizienten und Absolutglieder der auf das Gewicht $\mathfrak{p} = 1$ bezogenen linearen Fehlergleichungen nach § 67, Gleichung (7a) bedeuten, die mittleren Fehler der Unbekannten zu

$$\left.\begin{aligned} m_x^2 &= [\alpha\alpha] \cdot \mathfrak{m}^2 \\ m_y^2 &= [\beta\beta] \cdot \mathfrak{m}^2 \\ m_z^2 &= [\gamma\gamma] \cdot \mathfrak{m}^2 \end{aligned}\right\} \quad \text{oder} \quad \left.\begin{aligned} \frac{1}{p_x} &= [\alpha\alpha], \\ \frac{1}{p_y} &= [\beta\beta], \\ \frac{1}{p_z} &= [\gamma\gamma]. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Die Gewichtskoeffizienten $[\alpha\alpha]$, $[\beta\beta]$, $[\gamma\gamma]$ müssen aus den Normalgleichungen für die Unbekannten (10), § 67, berechnet werden.

Diese Normalgleichungen lauten nach dem vorhin über deren Koeffizienten Gesagten:

$$\left.\begin{aligned} \underline{[aa]}\,dx + [ab]\,dy + [ac]\,dz + [al] &= 0 \\ [ab]\,dx + \underline{[bb]}\,dy + [bc]\,dz + [bl] &= 0 \\ [ac]\,dx + [bc]\,dy + \underline{[cc]}\,dz + [cl] &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Zur Bestimmung von z. B. $[\gamma\gamma]$ eliminiert man aus (3) dx und dy, indem man die erste Gleichung mit dem unbekannten Koeffizienten $[\alpha\gamma]$, die zweite mit $[\beta\gamma]$, die dritte mit $[\gamma\gamma]$ multipliziert und diese drei Gleichungen addiert. Dann muß werden

$$\left.\begin{aligned} \underline{[aa]}\,[\alpha\gamma] + [ab]\,[\beta\gamma] + [ac]\,[\gamma\gamma] &= 0, \\ [ab]\,[\alpha\gamma] + \underline{[bb]}\,[\beta\gamma] + [bc]\,[\gamma\gamma] &= 0, \\ [ac]\,[\alpha\gamma] + [bc]\,[\beta\gamma] + \underline{[cc]}\,[\gamma\gamma] &= 1, \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

so daß bleibt:

$$dz + [\alpha\gamma]\,[al] + [\beta\gamma]\,[bl] + [\gamma\gamma]\,[cl] = 0. \quad (5)$$

Aus dieser Gleichung findet man durch Ordnen nach den Beobachtungen

$$dz + l_1\,([\alpha\gamma]\,a_1 + [\beta\gamma]\,b_1 + [\gamma\gamma]\,c_1) + l_2\,([\alpha\gamma]\,a_2 + [\beta\gamma]\,b_2 + [\gamma\gamma]\,c_2) + \\ + l_3\,([\alpha\gamma]\,a_3 + [\beta\gamma]\,b_3 + [\gamma\gamma]\,c_3) + \cdots = 0,$$

so daß der Vergleich mit der letzten Gleichung von (1) liefert

$$\gamma_1 = a_1[\alpha\gamma] + b_1[\beta\gamma] + c_1[\gamma\gamma],$$
$$\gamma_2 = a_2[\alpha\gamma] + b_2[\beta\gamma] + c_2[\gamma\gamma],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Quadriert man behufs Berechnung von $[\gamma\gamma]$ diese n Gleichungen, addiert sie und beachtet die Bedingungsgleichungen (4), so sieht man, daß

$$[\gamma\gamma] = 0 \cdot [\alpha\gamma] + 0 \cdot [\beta\gamma] + 1 \cdot [\gamma\gamma]$$

wird; der oben gewählte Koeffizient $[\gamma\gamma]$ entspricht also tatsächlich zufolge (2) dem reziproken Gewicht von dz. Berechnet man in der in § 68 behandelten Weise aus den Gleichungen (4) die Koeffizienten $[\gamma\gamma]$, $[\beta\gamma]$ und $[\alpha\gamma]$, so findet man durch Vergleichen der Gleichungen (4) mit den Gleichungen (11) des § 67 bzw. mit § 68, daß der frühere Ausdruck $[pcc \cdot 2]$ gleich dem hier entstehenden $[cc \cdot 2] = \frac{1}{[\gamma\gamma]}$ wird und daß also nach der letzten Gleichung (2)

$$p_z = \frac{1}{[\gamma\gamma]} = [cc \cdot 2] \overset{\text{bzw.}}{=} [pcc \cdot 2]. \tag{6}$$

Zur Bestimmung von $[\beta\beta]$ aus (3) werden diese Gleichungen (in zyklischer Vertauschung) der Reihe nach mit den unbekannten Koeffizienten $[\alpha\beta]$, $[\beta\beta]$ und $[\beta\gamma]$ multipliziert und dann addiert. dx und dz verschwinden aus der Summengleichung, wenn die Koeffizienten die folgenden Gleichungen erfüllen:

$$\left.\begin{aligned} \underline{[aa]}[\alpha\beta] + [ab][\beta\beta] + [ac][\beta\gamma] &= 0, \\ [ab][\alpha\beta] + \underline{[bb]}[\beta\beta] + [bc][\beta\gamma] &= 1, \\ [ac][\alpha\beta] + [bc][\beta\beta] + \underline{[cc]}[\beta\gamma] &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4'}$$

Die Summengleichung wird dann

$$dy + [\alpha\beta][al] + [\beta\beta][bl] + [\beta\gamma][cl] = 0, \tag{5'}$$

demnach in derselben Weise wie vorher

$$p_y = \frac{1}{[\beta\beta]} = [bb \cdot 2] \overset{\text{bzw.}}{=} [pbb \cdot 2], \tag{6'}$$

wenn vor Anwendung des Gaußischen Eliminationsverfahrens die Normalgleichungen (4') in folgender (symbolischer) Form geschrieben werden:

$$\begin{array}{llll} \underline{[cc]}[\beta\gamma] + [ac][\alpha\beta] + [bc][\beta\beta] & -0 & = 0, \\ \underline{[aa]} & [ab] & -0 \\ & \underline{[bb]} & -1. \end{array}$$

Zur Bestimmung von $[\alpha\alpha]$ aus (3) werden diese drei Gleichungen jeweils mit $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$ und $[\alpha\gamma]$ multipliziert und dann addiert. dy und dz verschwinden, wenn gesetzt wird

$$\left.\begin{aligned} \underline{[aa]}\,[\alpha\alpha] + [ab][\alpha\beta] + [ac][\alpha\gamma] &= 1, \\ [ab][\alpha\alpha] + \underline{[bb]}\,[\alpha\beta] + [bc][\alpha\gamma] &= 0, \\ [ac][\alpha\alpha] + [bc][\alpha\beta] + \underline{[cc]}\,[\alpha\gamma] &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (4'')$$

so daß bleibt

$$dx + [\alpha\alpha][al] + [\alpha\beta][bl] + [\alpha\gamma][cl] = 0, \qquad (5'')$$

und demnach in derselben Weise wie oben

$$p_x = \frac{1}{[\alpha\alpha]} = [aa \cdot 2] \overset{\text{bzw.}}{=} [paa \cdot 2], \qquad (6'')$$

wenn vor Anwendung des Gaußischen Eliminationsverfahrens die Normalgleichungen (4″) in folgender (symbolischer) Reihenfolge ange schrieben werden:

$$\begin{aligned} \underline{[cc]}\,[\alpha\gamma] + [bc][\alpha\beta] + [ac][\alpha\alpha] - 0 &= 0, \\ \underline{[bb]} \qquad\quad [bc] \qquad - 0 &, \\ \underline{[aa]} \qquad - 1 &. \end{aligned}$$

Bei Anwendung des Gaußischen Rechnungsverfahrens ist demnach nach Eliminierung aller vorhergehenden Unbekannten der Koeffizient der letzten Unbekannten stets deren Gewicht. Die Gewichte sämtlicher Unbekannten können deshalb immer durch Umstellen der Normalgleichungen gefunden werden.

Das Gewicht der jeweils vorletzten Unbekannten findet sich (wie bei Verfolgung der Rechnung für zwei Unbekannte leicht ersichtlich ist) z. B. nach (6) und (6′) zu

$$p_y = p_z \cdot \frac{[pbb \cdot 1]}{[pcc \cdot 1]}. \qquad (7)$$

§ 72. Ausgleichung bedingter Beobachtungen ungleicher Genauigkeit; Zahlenbeispiel.

Sind $l_1, l_2, \ldots, l_n$ die Beobachtungen, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ deren Gewichte und $v_1, v_2, \ldots, v_n$ die durch die Ausgleichung zu bestimmenden Verbesserungen der Beobachtungen, dann stellen die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} \underline{l_1} &= l_1 + v_2, \\ \underline{l_2} &= l_2 + v_2, \\ \vdots \quad &\quad \vdots \quad \vdots \\ \underline{l_n} &= l_n + v_n \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

die ausgeglichenen Beobachtungen vor.

Müssen diese derart beschaffen sein, daß sie vorgeschriebene Bedingungen erfüllen, dann bestehen zwischen ihnen mathematische Beziehungen, die allgemein durch die Funktionszeichen $f_1, f_2, \ldots, f_r$ angedeutet seien, also

$$\left.\begin{aligned} f_1(l_1 + v_1,\ l_2 + v_2 \ldots l_n + v_n) &= 0, \\ f_2(l_1 + v_1,\ l_2 + v_2 \ldots l_n + v_n) &= 0, \\ f_3(l_1 + v_1,\ l_2 + v_2 \ldots l_n + v_n) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{Anzahl } r. \qquad (2)$$

Anzahl n.

Diese Gleichungen (2) heißen Bedingungsgleichungen. Sind z. B. l_1, l_2, l_3 die 3 gemessenen Winkel eines ebenen Dreiecks, so besteht zwischen den ausgeglichenen Winkeln die lineare Bedingungsgleichung

$$l_1 + v_1 + l_2 + v_2 + l_3 + v_3 - 180^0 = 0.$$

Setzt man die unveränderten Beobachtungen l in die Bedingungsgleichungen (2) ein, so werden diese in der Regel nicht erfüllt; es zeigen sich demnach die Widersprüche:

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= f_1(l_1,\ l_2 \ldots l_n), \\ w_2 &= f_2(l_1,\ l_2 \ldots l_n), \\ w_3 &= f_3(l_1,\ l_2 \ldots l_n). \end{aligned}\right\} \text{Anzahl } r. \qquad (3)$$

Sind die Gleichungen (2) nicht linear, dann werden sie durch Anwendung des Taylorschen Satzes (ev. nach vorherigem Logarithmieren der Gleichungen) linear gemacht, so daß bei Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung z. B. wird

$$f_1(l_1+v_1, l_2+v_2 \ldots l_n+v_n) = f_1(l_1, l_2 \ldots l_n) + \frac{\partial f_1}{\partial l_1} \cdot v_1 + \frac{\partial f_1}{\partial l_2} \cdot v_2 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial l_n} \cdot v_n. \qquad (4)$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial l_1} &= a_1, & \frac{\partial f_1}{\partial l_2} &= a_2 \cdots \frac{\partial f_1}{\partial l_n} = a_n, \\ \frac{\partial f_2}{\partial l_1} &= b_1, & \frac{\partial f_2}{\partial l_2} &= b_2 \cdots \frac{\partial f_2}{\partial l_n} = b_n, \\ \frac{\partial f_3}{\partial l_1} &= c_1, & \frac{\partial f_3}{\partial l_2} &= c_2 \cdots \frac{\partial f_3}{\partial l_n} = c_n, \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

so erhält man durch Einsetzen von (3), (4) und (5) in (2) die r umgeformten linearen Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n + w_1 &= 0, \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + \cdots + b_n v_n + w_2 &= 0, \\ c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n + w_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{Anzahl } r, \qquad (6)$$

Anzahl n.

Zu diesen r Gleichungen kommt noch die Forderung der Methode der kleinsten Quadrate

$$p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \cdots + p_n v_n^2 = [pvv] = \text{Minimum.} \qquad (7)$$

Zu den Gleichungen (6) und (7) ist zu bemerken, daß stets $n > r$ sein muß, denn wenn $n = r$ ist, sind die einzelnen v schon aus den r Gleichungen (6) eindeutig bestimmt.

Die Berechnung der einzelnen Verbesserungen aus den Gleichungen (6), (7) kann in verschiedener Weise erfolgen. Z. B. können mit den r Gleichungen (6) r beliebige der n Unbekannten v etwa $v_1, v_2, \ldots, v_r$ durch die $(n-r)$ übrigen unabhängigen v, also durch v_{r+1}, $v_{r+2}, \ldots, v_n$ ausgedrückt werden. Dadurch erhält man die folgenden n Fehlergleichungen:

$$\left.\begin{array}{lll}
v_1 = A_1 v_{r+1} + B_1 v_{r+2} + \cdots + H_1 \cdot v_n + L_1, & \text{Gewicht} & p_1, \\
v_2 = A_2 v_{r+1} + B_2 v_{r+2} + \cdots + H_2 \cdot v_2 + L_2, & \text{„} & p_2, \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots & & \vdots \\
v_r = A_r v_{r+1} + B_r v_{r+2} + \cdots + H_r \cdot v_n + L_r, & \text{„} & p_r, \\
\hline
v_{r+1} = 1 \cdot v_{r+1} & \text{„} & p_{r+1}, \\
v_{r+2} = \quad + 1 \cdot v_{r+2} & \text{„} & p_{r+2}, \\
\vdots & & \\
v_n = \underbrace{\qquad\qquad 1 \cdot v_n}_{\text{Anzahl } n-r.} & \text{„} & p_n,
\end{array}\right\} \qquad (8)$$

Diese Fehlergleichungen werden nach den in § 67 gegebenen Regeln behandelt; es entsprechen ihnen also die symbolisch geschriebenen Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}
\underline{[pAA]} v_{r+1} + [pAB] v_{r+2} + \cdots + [pAH] v_n + [pAL] = 0, \\
\qquad\qquad \underline{[pBB]} + \cdots + [pBH] \quad + [pBL] \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{[pHH]} \quad + [pHL] \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{[pLL]}.
\end{array}\right\} \qquad (9)$$

Aus diesen ergeben sich nach § 68 (bzw. 71) $[pvv]$, $v_n, v_{n-1}, \ldots, v_{r+1}$ und die Gewichte p_n der Unbekannten, nach § 70, Gleichung (13) folgt der mittlere Fehler der Gewichtseinheit (einer Beobachtung vom Gewichte 1) zu

$$\mathfrak{m} = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-(n-r)}} = \sqrt{\frac{[pvv]}{r}}, \tag{10}$$

so daß die mittleren Fehler der ausgeglichenen Beobachtungen $\underline{l_n} = l_n + v_n$ werden

$$m_{\underline{n}} = \frac{\mathfrak{m}}{\sqrt{p_n}}. \tag{11}$$

Beispiel. Die drei Winkel eines ebenen Dreiecks seien zu l_1, l_2, l_3 mit den gleichen Gewichten $p_1 = p_2 = p_3 = 1$ gemessen. Gesucht die ausgeglichenen Winkel und deren mittlere Fehler.

Die Bedingungsgleichungen (2) werden

$$f_1(l_1 + v_1, l_2 + v_2, l_3 + v_3) = 0 = l_1 + v_1 + l_2 + v_2 + l_3 + v_3 - 180^0. \tag{2'}$$

Da alle partiellen Differentialquotienten nach (5) zu $+1$ werden, so wird nach (6)

$$v_1 + v_2 + v_3 + (l_1 + l_2 + l_3 - 180^0) = 0$$

oder:

$$v_1 + v_2 + v_3 + w = 0. \tag{6'}$$

Die Gleichungen (8) ergeben demnach:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= -v_2 - v_3 - w, && \text{Gewicht } p_1 = 1, \\ v_2 &= +v_2 && \text{„} \quad p_2 = 1, \\ v_3 &= \quad +v_3 && \text{„} \quad p_3 = 1. \end{aligned}\right\} \tag{8'}$$

Die Normalgleichungen (9) werden

$$\left.\begin{aligned} \underline{2} \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 + w &= 0, \\ +\underline{2} \quad + w & \\ \underline{ww}. & \end{aligned}\right\} \tag{9'}$$

Daraus folgt:

$$v_3 = -\frac{w}{3}; \quad v_2 = -\frac{w}{3}$$

und aus der ersten Gleichung von (8'): $v_1 = -\frac{w}{3}$.

Die Normalgleichungen liefern weiterhin

$$[pvv] = \frac{w^2}{3}; \quad p_{v_3} = \frac{3}{2} = p_{v_2}$$

und bei anderem Ansetzen der Gleichungen (8') auch $p_{v_1} = \frac{3}{2}$.

Der Widerspruch w ist demnach auf die drei gleich genau gemessenen Winkel gleichmäßig zu verteilen.

Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit (eines gemessenen Winkels vom Gewichte 1) ist nach (10):

$$\mathfrak{m} = \sqrt{\frac{w^2}{3 \cdot 1}} = \pm \frac{w}{\sqrt{3}}, \qquad (10')$$

der mittlere Fehler jedes der drei ausgeglichenen Winkel aber nach (11)

$$m = \frac{w}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}} = \pm \frac{w}{3} \sqrt{2}. \qquad (11')$$

Der mittlere Fehler wird durch die Ausgleichung demnach $\sqrt{\frac{2}{3}}$ kleiner.

Weiteres über Ausgleichungsrechnungen möge in ausführlichen Lehrbüchern, z. B. Jordan, Handbuch der Vermessungskunde, 1. Band, 5. Aufl.; Helmert, Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, 2. Aufl., nachgesehen werden.

VII. Abschnitt.

Lagevermessung großer Flächen auf trigonometrischer und polygonometrischer Grundlage.

§ 73. Übersicht über die Vermessung eines Landes. Hauptdreiecke und Grundlinienmessung.

Bei jeder größeren Vermessung muß vom Großen ins Kleine gearbeitet werden, weil sonst durch Aneinanderreihen vieler kleinerer Aufnahmen infolge der Messungsfehler größere Verschiebungen unvermeidlich sind. Die Vermessung wird deshalb in einzelne Ordnungen oder Stufen zerlegt, so daß die Ergebnisse der vorhergehenden genaueren Ordnung zur Probe und zum Abgleichen der folgenden Stufen verwendbar sind.

Das zu vermessende Land wird aus diesem Grunde zuerst mit wenigen großen, möglichst gleichseitigen Dreiecken von etwa 20 ÷ 80 km Seitenlänge (Durchschnitt 50 km), dem Dreiecksnetz I. Ordnung oder dem Hauptdreiecksnetz, überzogen. Ist das Land so groß, daß das zusammenhängende Netz I. Ordnung viele Punkte erhielte, dann würde die Durchführung der Messungen geraume Zeit in Anspruch nehmen und auch die Ausgleichungsarbeit der wegen der unvermeidlichen Messungsfehler in diesem Netze auftretenden Widersprüche würde erheblich werden. In solchen Fällen ordnet man Dreiecksketten an, die den Landesgrenzen folgen und solche die das Land mehrmals durchschneiden, und gleicht die einzelnen Dreiecksketten für sich aus. Die von den Ketten freigebliebenen Flächen werden dann mit Dreiecksnetzen I. Ordnung ausgefüllt.

Die Winkel auf den Hauptdreieckspunkten werden mit den feinsten Schraubenmikroskoptheodoliten von etwa 23 ÷ 27 cm Kreisdurchmesser von gewandten Beobachtern nach den bewährtesten Verfahren und mit der größten Sorgfalt sehr oft gemessen und hierdurch wegen verschiedener unvermeidlicher Fehler bis auf etwa $\pm 0{,}3''$ gefunden. Es werden etwa 12 vollständige Richtungssätze oder andere gleichwertige Messungen, die über den Horizontalkreis zwecks möglichster Unschädlichmachung der Teilungsfehler gleichmäßig verteilt werden, ausgeführt und alle

Mikroskopablesungen werden wegen eines etwaigen Gangfehlers der Meßschraube verbessert. Da die gewöhnlichen Signalisierungsmittel, wie Türme, Säulen, kleine Pyramiden u. dgl., auf die hierbei vorkommenden großen Entfernungen meist nicht mehr genügen, so signalisiert man oft mit Sonnenlicht, das dem Theodoliten durch drehbare Spiegel (Heliotrope) zugesandt wird, oder auch mit künstlichem Lichte. Häufig muß zur Ermöglichung der Zielungen auch der Theodolitstandort durch besondere Beobachtungspfeiler oder -Gerüste aus Stein, Holz oder Eisen mit dazu passenden Standgerüsten für den Beobachter erhöht werden. Solche Pyramidenbauten sind teuer und zeitraubend, z. B. eine Holzpyramide mit 26 m Beobachtungs- und 31,6 m Leuchthöhe auf dem Dreieckspunkte „Bleß“ (in Thüringen) kostete etwa 3000 Mk. und erforderte einen Monat Bauzeit.

Damit die Längen aller Dreiecksseiten berechnet werden können, muß die Länge wenigstens einer Netzseite sehr genau gemessen werden. Da diese Messungen langer Strecken mit kurzen Metallstangen von etwa $4 \div 5$ m Länge sehr kostspielig sind, so ist man von der unmittelbaren, mehrmaligen Messung günstig gelegener langer Dreiecksseiten wieder abgekommen und hält gegenwärtig, wo man beginnt, auch $24 \div 50$ m lange Drähte und dünne Bänder hauptsächlich aus Invar (siehe § 36) zur Messung zu verwenden, Grundlinien oder Basen von $5 \div 10$ km Länge (oder auch mehr) für ausreichend, um damit die Dreiecksseitenlängen in einem Umkreise von einigen 100 km genügend scharf berechnen zu können. In weit ausgedehnten Netzen mißt man deshalb einige solche Grundlinien in passenden Abständen. Die zu diesen Messungen dienenden sog. Basismeßapparate mit kurzen Stangen lassen durch eine Messung den unregelmäßigen mittleren Messungsfehler von etwa ± 1 mm, die langen Drähte, mit denen die Messung sehr rasch von statten geht, von etwa $\pm 2 \div 3$ mm auf 1 km erreichen. Aus der auf den Messungshorizont und meist auch auf die Meeresfläche reduzierten kurzen Grundlinie wird dann mittels einiger Dreiecke, deren maßgebende Winkel scharf gemessen werden, durch trigonometrische Rechnungen die Länge der benachbarten Hauptdreiecksseite bestimmt (siehe § 88).

Mit den beobachteten, also fehlerhaften Winkeln der Hauptdreiecke, die ev. auf eine bekannte Rechnungsfläche umgerechnet sind, könnten die einzelnen Dreiecksseiten nicht widerspruchsfrei berechnet werden. Damit diese Widersprüche verschwinden, müssen die Beobachtungen um kleine Beträge verbessert oder ausgeglichen werden. Nach den Regeln der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate findet man diejenigen Verbesserungen, deren Quadratsumme ein Mini-

mum wird, und die damit erhaltenen verbesserten Beobachtungen sind die wahrscheinlichsten Werte der gemessenen Winkel, wenn die bei der Messung gemachten Fehler dem sog. Gaußischen Fehlergesetze folgen.

Durch Messen der geographischen Länge und Breite eines Dreiecks-punktes und des Azimutes einer Dreiecksseite wird dem Dreiecksnetze auf der Erdoberfläche sein Platz zugewiesen.

§ 74. Fortsetzung. Koordinaten.

Das Schlußergebnis der Messung und der etwa mit achtstelligen Logarithmen geführten Berechnung des Netzes I. O. sind die Koordinaten der Eckpunkte. Von diesen kommen hauptsächlich in Betracht 1. die geographischen (Länge und Breite), 2. die rechtwinklig sphärischen bzw. sphäroidischen (Abszisse und Ordinate) und 3. die rechtwinklig ebenen Koordinaten.

1. Die geographische Breite eines Punktes A ist der in der Meridianebene des Punktes von der Äquatorebene aus nach Norden bzw. Süden gezählte Winkel zwischen der Äquatorebene und der Ellipsoidnormalen in A. Die geographische Länge ist der Winkel zwischen der Ebene eines angenommenen Nullmeridians und der Meridianebene durch A. Sie wird meist vom Nullmeridian nach Osten und Westen gezählt. Die geographischen Koordinaten sind für die Zwecke der niederen Geodäsie nicht unmittelbar geeignet, denn da 1 Sekunde Breitendifferenz einem Bogen von etwa 31 m Länge entspricht, so müßte auf $\frac{1}{10000}$ Sekunde gerechnet werden, um noch das Zentimeter richtig erhalten zu können.

2. Eine Ebene durch die Normale irgend eines als Ursprung angenommenen Punktes schneidet die Rechnungsfläche (z. B. Kugel- oder Ellipsoidfläche) in der Vermessungs- oder Abszissenachse. Die durch die Normale eines seitwärts liegenden Punktes senkrecht zur Ebene der Abszissenachse gelegte Schnittebene schneidet die Rechnungsfläche in der zur Abszissenachse senkrecht stehenden Ordinatenlinie. Die vom Ursprung aus (+ bzw. −) gezählten Abschnitte auf der Abszissenachse sind die Abszissen; die Länge der Ordinatenlinien vom Schnittpunkt mit der Abszissenachse bis zu den (+ bzw. −) seitwärts liegenden Punkten sind die (+ bzw. −) Ordinaten; der Richtungswinkel eines Bogens (Seite) ist der um 90° geänderte Winkel zwischen der Ordinatenschnittebene und der Ebene des Bogens; er wird von $0 \div 360°$ so gezählt, daß er der positiven Drehung der Parallelen zur $+ x$-Achsenrichtung, bis sie mit dem Bogen zusammenfällt, entspricht.

3. Die rechtwinklig ebenen Koordinaten werden durch Abbilden oder Projizieren der beiden erstgenannten Koordinaten auf die Ebene

erhalten. Je nachdem durch das Auftragen der rechtwinklig ebenen Koordinaten eine Karte (bzw. Plan) erhalten wird, auf der in nächster Nähe eines Punktes die Winkel des Abbildes einer Figur gleich denen des Urbildes (z. B. auf dem Ellipsoid) werden, oder auf der alle Flächeninhalte gleich den entsprechenden des Urbildes werden, oder auf der zwischen diesen beiden Grenzfällen vermittelt wird, bezeichnet man sie als rechtwinklig ebene „winkeltreue (konforme oder Gaußische)“ oder als „flächentreue“ oder als „vermittelnde“ Koordinaten.

Trägt man z. B. nach Fig. 121 die rechtwinklig sphärischen Koordinaten x, y (Soldnersche Koordinaten) der Eckpunkte einer Figur (etwa des Mittelpunktes und einiger Punkte eines Kreises vom Halbmesser s) in einer Karte wie rechtwinklig ebene Koordinaten auf, also $\xi = x$ und $\eta = y$, dann erhält man ein Abbild, das zwischen der winkeltreuen Abbildung (die in den kleinsten Teilen ähnliche Figuren liefert) und der flächentreuen Abbildung vermittelt. Der Kreis wird zu einer Ellipse verzerrt, sowohl s als auch die Richtungswinkel α im Urbilde werden im allgemeinen in der ebenen Abbildung anders; in Richtung der Ordinaten wird s unverändert und in Richtung der Abszissen vergrößert abgebildet. Bei $y_1 = 64$ km wird in Deutschland die Strecke $s = 1$ km im Maximum um rund 5 cm größer dargestellt, während der Richtungswinkel α im Maximum um $\pm 5''$ geändert wird. (Eine von einem Punkte (1) ausgehende Dreiecksseite wird im allgemeinen nicht als Gerade abgebildet.)

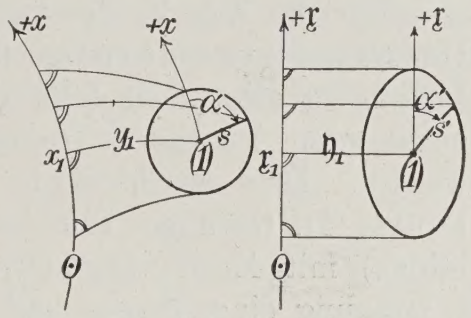


Fig. 121.

Um mit den verschiedenen rechtwinklig ebenen Koordinaten durch ebene Rechnung die richtigen Längen und Winkel, wie sie im Urbilde vorhanden sind, zu erhalten, müssen an der ebenen Rechnung stets noch kleine Verbesserungen, die sog. sphärischen bzw. sphäroidischen Korrektionen, angebracht werden. Die Größe dieser Korrektionen ist in dem vorhin gewählten Beispiele von der Ordinatengröße abhängig; läßt man also eine festgesetzte kleine Verzerrung zu, dann können die Korrektionen bis zu einer gewissen Ordinatengröße vernachlässigt werden. Die Längenfehler betragen unter $\frac{1}{25\,000}$ der Länge s, wenn mit den Soldnerschen sphärischen Koordinaten bis zu $\pm$ 60 km langen Ordinaten wie mit rechtwinklig ebenen Koordinaten gerechnet wird, und deshalb werden die sphärischen Korrektionen in Triangulierungen mit kurzen Seiten bis zu $\pm$ 60 km Ordinatenlänge häufig vernachlässigt, obwohl dadurch schon bei etwa 1 km langen Dreiecksseiten nach dem vorhin Gesagten Winkelfehler bis zu 10″ entstehen können.

Aus den genannten Gründen hat man für besondere Vermessungen in großen Ländern mehrere Koordinatennullpunkte in passenden Abständen eingeführt (z. B. in Preußen 40), um kleine Ordinaten und damit kleine Korrektionen zu erhalten. (Zum Zwecke einheitlicher Koordinierung sind in dem genannten Lande geographische Koordinaten berechnet; diese werden zunächst konform auf eine Kugel und von da konform in die Ebene abgebildet, wodurch die sog. ebenen Koordinaten erhalten werden.)

§ 75. Fortsetzung. Dreiecke niederer Ordnung. Polygonnetz.

Für die Zwecke der Vermessung der einzelnen Grundstücke sind Dreieckspunkte notwendig, die etwa 1 km voneinander entfernt sind; es müssen also noch sehr viele Punkte zwischen die wenigen genau bestimmten Punkte I. Ordnung durch Winkelmessung eingeschaltet werden. Dies geschieht in einzelnen Stufen derart, daß zuerst die Punkte II. Ordnung (die das Netz II. Ordnung oder Sekundärnetz bilden) mit Entfernungen von etwa 10 ÷ 20 km gegen diejenigen I. Ordnung eingemessen und auf diese abgeglichen werden, worauf in derselben Weise das Netz III. Ordnung mit Seitenlängen von 3 ÷ 10 km und dann das Netz IV. Ordnung mit 300 m ÷ 3 km langen Seiten auf die vorher bestimmten Punkte eingemessen und ausgeglichen wird. Die Bestimmung dieser Punkte geschieht entweder durch Netzeinschaltung (Einketten) (Fig. 122) oder durch fortgesetzte Punkteinschaltung (Einschneiden) (Fig. 123) und die Ausgleichung auf die vorhandenen Anschlußpunkte in der Regel unter Vermittlung der Koordinaten der Neupunkte (Koordinatenausgleichung), wobei entweder Punkt für Punkt oder gleichzeitig zwei oder mehrere, ev. alle Neupunkte ausgeglichen werden. Da die Seiten mit absteigender Punktordnung kürzer werden, so können immer kleinere Theodolite und weniger Messungswiederholungen angewendet werden, um gleiche Punktgenauigkeit (in jeder Ordnung) zu erzielen. Zur Signalisierung dienen im Netz II. und III. Ordnung im allgemeinen schon kleinere Pyramiden; in der sog. Kleintriangulierung (III. und IV. Ordnung) reichen häufig kräftige Stangensignale aus. Im Netz II. Ordnung werden die Winkel meist mit Schraubenmikroskoptheodoliten mit ungefähr 21 cm Kreisdurchmesser durch etwa sechs vollständige Richtungssätze (in zwei Fernrohrlagen, Einstellen des linken und rechten Teilstriches mit dem gut abgestimmten Mikroskop und Mittelbildung), im Netz

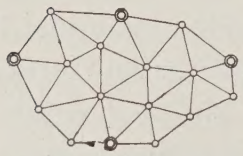


Fig. 122.

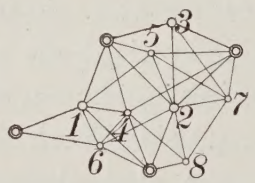


Fig. 123.

III. Ordnung mit solchen von ungefähr 13 cm Durchmesser durch drei vollständige Richtungssätze (Einstellen nur des linken Teilstriches im Mikroskop) und im Netz IV. Ordnung mit den gleichen Instrumenten oder mit Nonientheodoliten von 10 ÷ 20″ Angabe durch zwei bis vier Sätze gemessen. Die Rechnung im Netz II. Ordnung wird siebenstellig, die im Netz III. und IV. Ordnung sechsstellig, bei kleinen Entfernungen auch fünfstellig logarithmisch geführt.

In seltenen Fällen liegen die Dreieckspunkte niederer Ordnung so nahe und derart, daß die Dreiecksseiten unmittelbar oder auch in diese eingebundene Messungslinien als Aufnahmelinien für die Einzel-, Stück-, Parzellar- oder Detailmessung verwendbar sind. In allen anderen Fällen verbindet man die Dreieckspunkte durch Polygonzüge, deren Seiten, wie auch die Verbindungslinien von Punkten dieser Seiten, als Aufnahmelinien dienen. Die Polygonzüge bilden das Polygonnetz und die Aufnahmelinien das Messungsliniennetz. Man unterscheidet zwischen Haupt- und Nebenpolygonzügen, erstere verlaufen möglichst gestreckt zwischen Dreieckspunkten, letztere verbinden Polygonpunkte. In Fig. 124 ist z. B. das Polygonnetz der Stadt Kufstein dargestellt. Mit Rücksicht auf leichte Verteilung der Anschlußfehler sollen im allgemeinen die einzelnen Hauptzüge möglichst gestreckt und nicht wesentlich über 1 km lang sein. Würde ein Hauptzug, z. B. der Zug von 6 über 7 nach 8 eine große seitliche Ausbiegung (bei 7) erhalten, dann versucht man 7 trigonometrisch zu bestimmen; ein in der Nähe eines gegebenen trigonometrischen Punktes, z. B. bei *P* oder *Z* vorbeiführender Zug wird an diese Punkte angeschlossen, und wenn mehrere Züge in einem Punkte, wie z. B. in 28, zusammentreffen, dann rechnet man häufig den Punkt 28 als sog. Knotenpunkt und gleicht die einzelnen Zugteile zwischen 28 und den Ausgangspunkten 3, 4, 1 und 22 aus. Die Züge werden meist fünfstellig, seltener vierstellig logarithmisch berechnet.

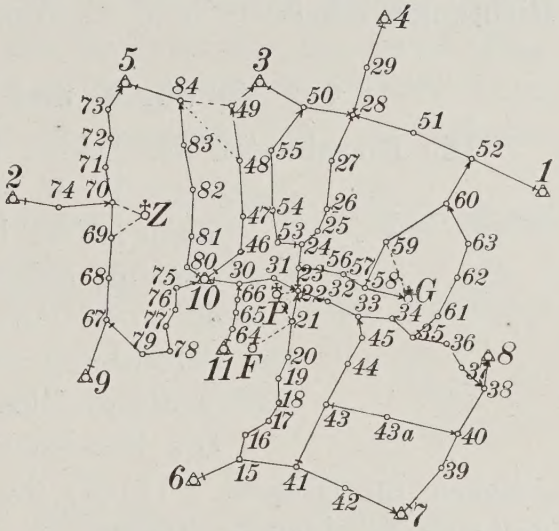


Fig. 124.

Auf die Polygonseiten und Messungslinien werden die einzelnen Grenzpunkte, Gebäudeecken u. dgl. durch rechtwinklige Koordinaten, Schnitte, Verlängerungen usw. in bekannter Weise aufgenommen (siehe IV. Abschnitt).

11. Kapitel.

Kleintriangulierungsaufgaben im rechtwinkelig ebenen Koordinatensystem.

Das Bestimmen der Punkte erfolgt meistens

1. durch Vorwärts- oder Seitwärtseinschneiden,
2. durch Rückwärtseinschneiden (Snelliussche Aufgabe),
3. durch Doppelpunkteinschaltung (Hansensche Aufgabe),
4. durch Einketten.

Die Bezeichnung der drei ersten Arten rührt von der Meßtischmessung her. Im folgenden wird stets die Zählweise der Koordinaten und Richtungswinkel wie in § 51 vorausgesetzt.

§ 76. Vorwärts- und Seitwärtseinschneiden.

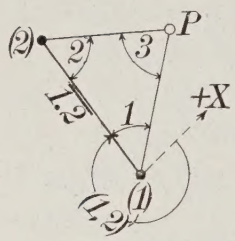


Fig. 125.

Die Koordinaten der beiden Punkte (1) und (2) (Fig. 125) sind gegeben. Wenn die beiden Winkel 1 und 2 gemessen sind, dann ist der Punkt P durch Vorwärtseinschneiden, sind aber die beiden Winkel 1 und 3 oder 2 und 3 gemessen, so ist P durch Seitwärtseinschneiden bestimmt, Die Berechnung der Koordinaten von P ist in beiden Fällen die gleiche.

Die Bezeichnung sei so gewählt, daß von P aus gesehen im Dreieck $P(1)(2)$ die Punkte (1) und (2) im Uhrzeigerdrehsinn aufeinander folgen.

Lösung. a) Berechnung der notwendigen Strecken und Winkel:

$$\operatorname{tg}(1.2) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}; \quad \overline{1.2} = \frac{y_2 - y_1}{\sin(1 \cdot 2)} \overset{\text{oder}}{=} \frac{x_2 - x_1}{\cos(1 \cdot 2)}. \tag{1}$$

b) Auflösung des Dreiecks $(1)(2)P$ und Berechnung der Richtungswinkel nach dem Punkte P:

$$3 = 180^0 - (1+2) \text{ bzw. } 2 = 180^0 - (1+3);\ 1 = 180^0 - (2+3), \tag{2}$$

$$\overline{1.P} = \frac{\overline{1.2}}{\sin 3} \cdot \sin 2; \quad \overline{2.P} = \frac{\overline{1.2}}{\sin 3} \cdot \sin 1 \tag{3}$$

$$(1.P) = (1.2) + 1;\ (2.P) = (2.1) - 2 \text{ wobei } (2.1) = (1.2) \pm 180^0 \tag{4}$$

c) Koordinatenberechnung.

$$\left.\begin{aligned} x_P &= x_1 + \overline{1.P} \cos(1.P) \overset{\text{und}}{=} x_2 + \overline{2.P} \cos(2.P) \\ y_P &= y_1 + \overline{1.P} \sin(1.P) \overset{\text{und}}{=} y_2 + \overline{2.P} \sin(2.P) \end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

Anmerkung: Wurden die drei Winkel 1, 2 und 3 gleich genau gemessen, dann weicht im allgemeinen deren Summe von 180° ab. Dieser Widerspruch kann zunächst durch gleichmäßige Verteilung auf die drei Winkel ausgeglichen werden (§ 72).

Am übersichtlichsten führt man die Rechnung in einem Schema wie z. B. in dem auf Seite 174 angegebenen aus. Die starken Vertikalstriche bedeuten, daß rechts davon die Logarithmen der links vom Striche stehenden Ausdrücke einzutragen sind. Für Ausdrücke von der Form z. B. $(1 : \sin x)$ ist meist $E \sin x$ (Ergänzung) geschrieben. Die Hypotenuse z. B. $\overline{1.2}$ nach Gleichung (1) wird hier und im folgenden stets nur aus der größeren Kathete berechnet. Deshalb wird bei $E \overset{\sin}{\cos} (1.2)$ stets die Ergänzung (des Logarithmus) derjenigen Zahl eingesetzt, die für das Argument (1.2) in der letzten rechten Spalte der Logarithmentafel (die oben mit cos überschrieben ist) steht. Fügt man diese Ergänzung zum Logarithmus der größeren Kathete hinzu, dann erhält man den Logarithmus der Hypotenuse (also $\overline{1.2}$) (Lalandesche Regel § 51).

Die gegebenen Größen sind im folgenden Zahlenbeispiel durch etwas kräftigeren Druck hervorgehoben.

Durch Richtungsbeobachtungen (§ 26) oder durch Repetition (§ 27) wurden gefunden

$$\sphericalangle 1 = 56^0\,35'\,46''; \quad \sphericalangle 2 = 41^0\,51'\,31''.$$

Die Koordinaten sind (s. Fig. 124)

Punkt (1) = Kufstein 2: $y_1 = +\,4091{,}24$; $x_1 = -\,61356{,}69$,

„ (2) = Kufstein 4: $y_2 = +\,5266{,}01$; $x_2 = -\,60783{,}43$,

„ P = Kufstein Festungsturm F.

Berechnung siehe Seite 174.

Die bei den Koordinaten von P auftretende Differenz würde bei Verwendung 6 stelliger Logarithmen verschwinden.

Die Zielung in der Grundlinie $\overline{1.2}$ ist häufig nicht möglich. P ist aber bestimmbar, wenn von (1) oder (2) aus je ein gegebener Punkt z. B. (3) und (4) sichtbar ist (Fig. 126). (Vorwärtseinschneiden ohne Zielung in der Grundlinie.)

Gegeben: $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$, $x_4 y_4$.

Gemessen: $\sphericalangle \delta_1$, δ_2.

Gesucht: $x_P y_P$ mit Probe.

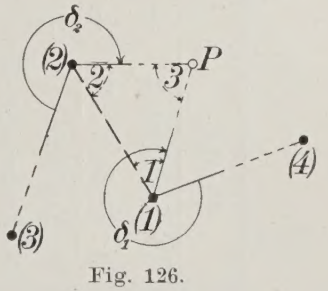


Fig. 126.

Vorwärts- oder Seitwärts-Einschneiden von P = Kufstein Festungsturm F.

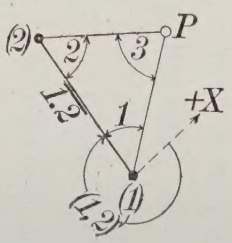
Punkt	y	Punkt	x
(1) Kufstein 2	+ **4 091,24**	(1)	− **61356,69**
$\overline{1\,.\,P}\sin(1\,.\,P)$	+ 759,15	$\overline{1\,.\,P}\cos(1\,.\,P)$	− 448,69
P Kufstein	+ 4 850,39	P	− 61 805,38
P Festungst. F	+ 4 850,42	P	− 61 805,38
(2) Kufstein 4	+ **5 266,01**	(2)	− **60 783,43**
$\overline{2\,.\,P}\sin(2\,.\,P)$	− 415,59	$\overline{2\,.\,P}\cos(2\,.\,P)$	− 1 021,95
$y_2 - y_1$	+ 1 174,77	$x_2 - x_1$	+ 573,26

		Bem.
1 =	**56° 35′ 46″**	gem.
2 =	**41 51 31**	gem.
3 =	81 32 43	erg.
Σ =	180 00 00	

(1 . 2) =	63°	59′	19″
+ 1 = +	56	35	46
(1 . P) =	120	35	05
(2 . 1) =	243	59	19
− 2 = −	41	51	31
(2 . P) =	202	07	48

$y_2 - y_1$	3.06 995
$E\frac{\sin}{\cos}(1\,.\,2)$	0.04 638
$x_2 - x_1$	2.75 835
tg (1 . 2)	0.31 160
$\overline{1\,.\,2}$	3.11 633
$E \sin 3$	0.00 474
$\overline{1\,.\,P}$	2.94 539
sin 2	9.82 432
$\overline{1\,.\,2}/\sin 3$	3.12 107
sin 1	9.92 159
$\overline{2\,.\,P}$	3.04 266

$\overline{1\,.\,P}\cos(1\,.\,P)$	2.65 195$_n$
cos (1 . P)	9.70 656$_n$
$\overline{1\,.\,P}$	2.94 539
sin (1 . P)	9.93 494
$\overline{1\,.\,P}\sin(1\,.\,P)$	2.88 033
$\overline{2\,.\,P}\cos(2\,.\,P)$	3.00 943$_n$
cos (2 . P)	9.96 677$_n$
$\overline{2\,.\,P}$	3.04 266
sin (2 . P)	9.57 601$_n$
$\overline{2\,.\,P}\sin(2\,.\,P)$	2.61 867$_n$



Bezeichnungen:

$$\overline{1\,.\,P} = \frac{\overline{1\,.\,2}}{\sin 3}\sin 2$$

$$\overline{2\,.\,P} = \frac{\overline{1\,.\,2}}{\sin 3}\sin 1$$

Lösung: a) $\operatorname{tg}(1\,.\,2) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$; $\overline{1\,.\,2} = \frac{y_2 - y_1}{\sin(1\,.\,2)} \overset{\text{oder}}{=} \frac{x_2 - x_1}{\cos(1\,.\,2)}$ (1)

$$\operatorname{tg}(1\,.\,4) = \frac{y_4 - y_1}{x_4 - x_1};\ \operatorname{tg}(2\,.\,3) = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \tag{2}$$

$$(1\,.\,P) = (1\,.\,4) + \delta_1;\ (2\,.\,P) = (2\,.\,3) + \delta_2 \tag{3}$$

$$\sphericalangle\, 1 = (1\,.\,P) - (1\,.\,2);\ \sphericalangle\, 2 = (2\,.\,1) - (2\,.\,P) \tag{4}$$

$$\sphericalangle\, 3 = 180^0 - (1 + 2) \tag{5}$$

Die weitere Rechnung erfolgt wie oben unter b) und c).

§ 77. **Rückwärtseinschneiden.** (Snelliussche Aufgabe.)

Gegeben die Koordinaten x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 (Fig. 127).

Auf dem zu bestimmenden Punkt P hat man z. B. die Richtungen nach diesen gegebenen 3 Punkten gemessen, so daß die Winkel α und β bekannt sind. Gesucht die Koordinaten $(x_P y_P)$ des Punkts P mit Probe.

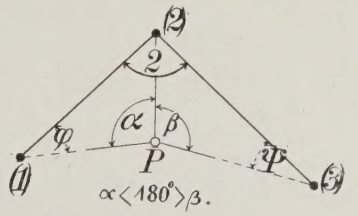


Fig. 127.

Bezeichnungsweise: Von dem zu bestimmenden Punkte P aus gesehen folgen die Punkte (1), (2), (3) im Uhrzeigersinn so aufeinander, daß α und β kleiner als 180^0 werden ($\alpha < 180^0 > \beta$).

Lösung: a) $\operatorname{tg}(1\,.\,2) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$; $\overline{1\,.\,2} = \frac{y_2 - y_1}{\sin(1\,.\,2)} \overset{\text{oder}}{=} \frac{x_2 - x_1}{\cos(1\,.\,2)}$ (1)

$$\operatorname{tg}(3\,.\,2) = \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3};\ \overline{2\,.\,3} = \frac{y_2 - y_3}{\sin(3\,.\,2)} \overset{\text{oder}}{=} \frac{x_2 - x_3}{\cos(3\,.\,2)} \tag{2}$$

$$2 = (2\,.\,1) - (2\,.\,3) = (1\,.\,2) - (3\,.\,2) \tag{3}$$

b) Berechnung der Unbekannten. Nach Einführung der Unbekannten φ, ψ und der Seite $\overline{2\,.\,P}$ erhält man zu deren Bestimmung aus der Figur folgende 3 Gleichungen:

$$\frac{\varphi + \psi}{2} = \frac{360 - (\alpha + \beta + 2)}{2} \tag{4}$$

$$\sin\varphi = \frac{\sin\alpha\,.\,\overline{2\,.\,P}}{\overline{1\,.\,2}};\quad \sin\psi = \frac{\sin\beta\cdot\overline{2\,.\,P}}{\overline{2\,.\,3}}. \tag{5}$$

Durch Division der Gleichungen (5) folgt:

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{\sin\alpha\cdot\overline{2\,.\,3}}{\overline{1\,.\,2}\cdot\sin\beta}. \tag{6}$$

Zur Auflösung der beiden Gleichungen (4) und (6) führt man am einfachsten einen Hilfswinkel λ ein und setzt:

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{1}{\operatorname{tg}\lambda}, \quad \text{wobei } \operatorname{tg}\lambda = \frac{\overline{1\,.\,2}/\sin\alpha}{\overline{2\,.\,3}/\sin\beta}. \tag{7}$$

Durch korrespondierendes Subtrahieren und Addieren der ersten Gleichung (7) erhält man:

$$\frac{\sin\varphi - \sin\psi}{\sin\varphi + \sin\psi} = \frac{1 - \operatorname{tg}\lambda}{1 + \operatorname{tg}\lambda}$$

und daraus durch einfache goniometrische Umformungen:

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi - \psi}{2} = \operatorname{tg}\frac{\varphi + \psi}{2}\operatorname{ctg}(45^0 \pm \lambda) \tag{8}$$

also

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varphi + \psi}{2} + \frac{\varphi - \psi}{2} &= \varphi \\ \frac{\varphi + \psi}{2} - \frac{\varphi - \psi}{2} &= \psi \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Als Zwischenprobe ergibt sich nach der Figur 127:

$$\overline{2\,.\,P} = \frac{\overline{1\,.\,2}}{\sin\alpha}\sin\varphi \overset{\text{und}}{=} \frac{\overline{2\,.\,3}}{\sin\beta}\sin\psi, \tag{10}$$

und weiterhin

$$\overline{1\,.\,P} = \frac{\overline{1\,.\,2}}{\sin\alpha}\sin(\alpha + \varphi) \quad \text{und} \quad \overline{3\,.\,P} = \frac{\overline{2\,.\,3}}{\sin\beta}\sin(\beta + \psi). \tag{11}$$

Die Richtungswinkel $(1\,.\,P)$ und $(3\,.\,P)$ werden:

$$(1\,.\,P) = (1\,.\,2) + \varphi; \quad (3\,.\,P) = (3\,.\,2) - \psi. \tag{12}$$

c) Damit wird mit Probe:

$$\left.\begin{aligned} x_P &= x_1 + \overline{1\,.\,P}\cos(1\,.\,P) \overset{\text{und}}{=} x_3 + \overline{3\,.\,P}\cos(3\,.\,P) \\ y_P &= y_1 + \overline{1\,.\,P}\sin(1\,.\,P) \overset{\text{und}}{=} y_3 + \overline{3\,.\,P}\sin(3\,.\,P) \end{aligned}\right\}. \tag{13}$$

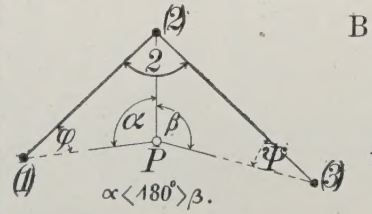
Diskussion: Unter der getroffenen Voraussetzung $\alpha < 180^0 > \beta$ ergibt sich der Hilfswinkel λ aus Gleichung (7) stets als positiver spitzer Winkel. Da φ und ψ stets Dreieckswinkel sind, so kann $\frac{\varphi - \psi}{2}$ aus Gleichung (8) stets nur ein spitzer Winkel sein und zwar je nach dem Vorzeichen des rechten Teils positiv oder negativ. Die Lösung versagt, wenn $\alpha + \beta + 2 = 180^0$ wird; dann folgt aus (4) $\frac{\varphi + \psi}{2} = 90^0$. In diesem Fall geht das Viereck $1\,.\,2\,.\,3\,.\,P$ in ein Sehnenviereck über;

Rückwärtseinschneiden von P = Techn. Hochschule, Hauptpfeiler.

Punkt	y	Punkt	x
(1) Zentralfr.	+ **19 346,75**	(1)	+ **51 320,22**
$\overline{1\,.\,P}\sin(1\,.\,P)$	− 1 911,22	$\overline{1\,.\,P}\cos(1\,.\,P)$	+ 1 867,88
P Techn.	+ 17 435,53	P	+ 53 188,10
P Hochsch.	+ 17 435,50	P	+ 53 188,15
(3) Ölper	+ **15 436,60**	(3)	+ **54 758,54**
$\overline{3\,.\,P}\sin(3\,.\,P)$	+ 1 998,90	$\overline{3\,.\,P}\cos(3\,.\,P)$	− 1 570,39
(2) Andreask.	+ **16 831,43**	(2)	+ **52 632,66**
$y_2 - y_1 =$	− 2 515,32	$x_2 - x_1 =$	+ 1 312,44
$y_2 - y_3 =$	+ 1 394,83	$x_2 - x_3 =$	− 2 125,88
$(1\,.\,2) =$	297° 33′ 17″	$\lambda =$	47° 48′ 05″
$-(3\,.\,2) =$	− 146 43 49	$45^0 + \lambda =$	92 48 05
$2 =$	150 49 28	$(1\,.\,2) =$	297 33 17
$\alpha =$	**93 03 45**	$+\varphi =$	+ 16 47 19
$\beta =$	**80 44 54**	$(1\,.\,P) =$	314 20 36
$\Sigma =$	324 38 07	$(3\,.\,2) =$	146 43 49
$\varphi + \psi =$	35 21 53	$-\psi =$	− 18 34 33
$\frac{\varphi+\psi}{2} =$	17 40 56	$(3\,.\,P) =$	128 09 16
$\frac{\varphi-\psi}{2} =$	− 0 53 37		
$\varphi =$	16 47 19		
$\psi =$	18 34 33		
$\alpha + \varphi =$	109 51 04		
$\beta + \psi =$	99 19 27		

$y_2 - y_1$	$3.40\,059_n$
$E\,\frac{\sin}{\cos}\,(1\,.\,2)$	0.05 229
$x_2 - x_1$	3.11 808
$\operatorname{tg}(1\,.\,2)$	$0.28\,251_n$
$\overline{1\,.\,2}$	3.45 288
$E\sin\alpha$	0.00 062
$\overline{1\,.\,2}/\sin\alpha$	3.45 350
$y_2 - y_3$	3.14 452
$E\,\frac{\sin}{\cos}\,(3\,.\,2)$	0.07 774
$x_2 - x_3$	$3.32\,754_n$
$\operatorname{tg}(3\,.\,2)$	$9.81\,698_n$
$\overline{3\,.\,2}$	3.40 528
$E\sin\beta$	0.00 568
$\overline{3\,.\,2}/\sin\beta$	3.41 096
$\operatorname{tg}\lambda$	0.04 254
$\operatorname{tg}\frac{\varphi+\psi}{2}$	9.50 352
$\operatorname{ctg}(45^0+\lambda)$	$8.68\,959_n$
$\operatorname{tg}\frac{\varphi-\psi}{2}$	$8.19\,311_n$

$\overline{1\,.\,P}$	3.42 690
$\sin(\alpha+\varphi)$	9.97 340
$\overline{1\,.\,2}/\sin\alpha$	3.45 350
$\sin\varphi$	9.46 066
$\overline{2\,.\,P}$	2.91 416
$\overline{2\,.\,P}$	2.91 415
$\sin\psi$	9.50 319
$\overline{2\,.\,3}/\sin\beta$	3 41 096
$\sin(\beta+\psi)$	9.99 422
$\overline{3\,.\,P}$	3.40 518
$\overline{1\,.\,P}\cos(1\,.\,P)$	3.27 135
$\cos(1\,.\,P)$	9.84 445
$\overline{1\,.\,P}$	3.42 690
$\sin(1\,.\,P)$	$9.85\,441_n$
$\overline{1\,.\,P}\sin(1\,.\,P)$	$3.28\,131_n$
$\overline{3\,.\,P}\cos(3\,.\,P)$	$3.19\,601_n$
$\cos(3\,.\,P)$	$9.79\,083_n$
$\overline{3\,.\,P}$	3.40 518
$\sin(3\,.\,P)$	9.89 561
$\overline{3\,.\,P}\sin(3\,.\,P)$	3.30 079



Bezeichnungen und Formeln:

$$\frac{\varphi+\psi}{2} = \frac{360^0 - (2+\alpha+\beta)}{2};$$

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{\overline{1\,.\,2}/\sin\alpha}{\overline{2\,.\,3}/\sin\beta};\ \lambda \text{ stets + spitzer Winkel}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi-\psi}{2} = \operatorname{tg}\frac{\varphi+\psi}{2}\operatorname{ctg}(45^0+\lambda);$$

$\frac{\varphi-\psi}{2}$ stets je nach dem Vorzeichen $\{\pm\}$ spitzer Winkel

man findet deshalb $\lambda = 45^0$ und die Gleichung (8) gibt einen unbestimmten Ausdruck für $\operatorname{tg}\frac{\varphi - \psi}{2}$. Der Kreis durch die 3 Punkte 1, 2, 3 führt deshalb die Bezeichnung gefährlicher Kreis. Man vermeidet ihn, indem man die gegebenen Punkte möglichst derart auswählt, daß entweder P innerhalb des Dreiecks 1, 2, 3 liegt oder daß der Dreieckswinkel 2 größer als 180^0 wird.

Zur Berechnung der Aufgabe benutzt man in der Regel ein Schema, wie z. B. das auf Seite 177, in dem die gegebenen Stücke durch kräftigen Druck hervorgehoben sind.

Zahlenbeispiel. Durch zwei vollständige Richtungssätze nach § 26 wurden mit einem Mikroskoptheodoliten mit 2″ Ablesung (17 cm Kreisdurchmesser) auf dem Hauptpfeiler der Techn. Hochschule in Braunschweig = P mit dem mittleren Fehler $\mu = \pm 3{,}0''$ (Standfehler vgl. § 26) nach den angegebenen Zielpunkten die folgenden Richtungen gemessen.

Zielpunkt	Richtung	Soldnersche Koordinaten	
M	$0^0\ 0'\ 0{,}0''$	y	x
Ölper ☥	9 27 36,6	+15 436,599 m	+54 758,544 m
Zentralfriedhof ☥	195 38 58,0	+19 346,754	+51 320,224
Magnikirche ☥	237 11 00,6	+17 518,984	+52 030,250
Andreaskirche ☥	288 42 42,8	+16 831,430	+52 632,659

Es sollen die (Näherungs-)Koordinaten von P mit 5stelligen Logarithmen berechnet werden.

Nach dem oben Gesagten wurden drei Punkte ausgewählt und zwar (1) = Zentralfriedhof, (2) = Andreaskirche und (3) = Ölper, so daß:

$$\alpha = 288^0\,42'\,42{,}8'' - 195^0\,38'\,58{,}0'' = 93^0\,03'\,44{,}8''$$

und

$$\beta = 9^0\,27'\,35{,}6'' - 288^0\,42'\,42{,}8'' = 80^0\,44'\,53{,}8''.$$

Diese beiden Winkel wurden in der auf Seite 177 ausgeführten Rechnung auf ganze Sekunden und die Koordinaten auf Zentimeter abgerundet.

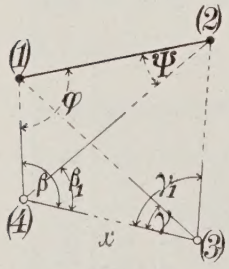


Fig. 128.

§ 78. **Doppelpunkteinschaltung** (Hansensche Aufgabe) **oder Aufgabe der unzugänglichen Entfernung.**

Gegeben sind die zwei Punkte (1) und (2); gemessen die Winkel β, β_1; γ und γ_1 (Fig. 128). Gesucht sind die Koordinaten der Punkte (3) und (4) mit Probe. Die Bezeichnungsweise ist aus der Figur ersichtlich, z. B. auf (3) wird die Seite $\overline{4.1}$ unter dem Winkel γ gesehen usf.

Lösung:

a) $\operatorname{tg}(1\,.\,2) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ und $\overline{1\,.\,2} = \frac{y_2 - y_1}{\sin(1\,.\,2)} \overset{\text{oder}}{=} \frac{x_2 - x_1}{\cos(1\,.\,2)}$. (1)

b) Nach Einführen der drei Unbekannten φ, ψ und $x = \overline{3\,.\,4}$ liest man aus der Figur folgende Gleichungen ab:

$$\frac{\varphi + \psi}{2} = \frac{180^0 - (\beta - \beta_1)}{2}. \tag{2}$$

Durch wiederholte Anwendung des Sinussatzes erhält man aus den Dreiecken 1, 2, 4 und 2, 3, 4 (Gleichsetzen der Diagonale $\overline{2 \cdot 4}$):

$$\sin\varphi = \frac{\sin(\beta - \beta_1) \cdot x \cdot \sin\gamma_1}{\overline{1\,.\,2}\,\sin(\beta_1 + \gamma_1)}. \tag{3}$$

In derselben Weise folgt aus den Dreiecken 1, 2, 4 und 1, 3, 4 (Gleichsetzen von $\overline{1\,.\,4}$):

$$\sin\psi = \frac{\sin(\beta - \beta_1)\, x \sin\gamma}{\overline{1 \cdot 2}\,\sin(\beta + \gamma)}. \tag{4}$$

Durch Division von Gl. (3) und (4) erhält man:

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{\sin\gamma_1 \sin(\beta + \gamma)}{\sin\gamma \sin(\beta_1 + \gamma_1)} = \frac{1}{\operatorname{tg}\lambda}. \tag{5}$$

Nach Einführen des Hilfswinkels λ findet man durch korrespondierendes Subtrahieren und Addieren auf dieselbe Weise wie in § 76:

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi - \psi}{2} = \operatorname{tg}\frac{\varphi + \psi}{2}\operatorname{ctg}(45^0 + \lambda). \tag{6}$$

Aus Gl. (2) und (6) sind die Winkel φ und ψ bekannt. Die weitere Rechnung kann dann entweder wie beim Vorwärtseinschneiden ausgeführt werden oder man rechnet zunächst die Seiten $\overline{1\,.\,4}, \overline{4\,.\,3}, \overline{3\,.\,2}$ und deren Richtungswinkel und dann den Polygonzug 1 . 4 . 3 . 2, wodurch die Koordinaten von (4) und (3) mit Probe gefunden werden.

Ausführung dieser Rechnung:

$$\overline{1\,.\,4} = \frac{\overline{1\,.\,2}\sin\psi}{\sin(\beta - \beta_1)};\quad \overline{4\,.\,3} = \frac{\overline{1\,.\,4}\,\sin(\beta + \gamma)}{\sin\gamma};\quad \overline{3\,.\,2} = \frac{\overline{3\,.\,4}\,\sin\beta_1}{\sin(\beta_1 + \gamma_1)} \tag{7}$$

$$(1\,.\,4) = (1\,.\,2) + \varphi;\ (4\,.\,3) = (1\,.\,4) \pm 180^0 + \beta;\ (3\,.\,2) = (3\,.\,4) + \gamma_1 \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} x_4 &= x_1 + \overline{1.4}\cos(1.4);\ x_3 = x_4 + \overline{4.3}\cos(4.3);\ x_2 = x_3 + \overline{2.3}\cos(3.2) \\ y_4 &= y_1 + \overline{1.4}\sin(1.4);\ y_3 = y_4 + \overline{4.3}\sin(4.3);\ y_2 = y_3 + \overline{2.3}\sin(3.2) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Determination: Der Hilfswinkel λ aus Gl. (5) ist stets positiv spitz, da in Gl. (5) nur Dreieckswinkel vorkommen. Aus Gl. (6) ergibt sich $\frac{\varphi - \psi}{2}$ je nach dem Vorzeichen des rechten Teiles stets als positiver oder negativer spitzer Winkel, da φ und ψ zwei Winkel desselben Dreiecks sind. Liegen die Punkte wie in Fig. 129 angedeutet, dann tritt in Gleichung (2) an die Stelle von $(\beta - \beta_1)$ der Ausdruck $(\beta + \beta_1)$; Gleichung (5) und (6) bleiben unverändert usf.

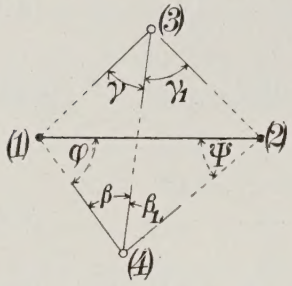


Fig. 129.

§ 79. Einketten.

Es ist z. B. gegeben (s. Fig. 130):

$$x_1, y_1;\ x_2, y_2.$$

Gemessen: $(\alpha_1), (\beta_1), (\gamma_1)$ bis $(\alpha_4)\ (\beta_4)\ (\gamma_4)$.

Gesucht: $x_3, y_3;\ x_4, y_4;\ x_5, y_5;\ x_6, y_6$ mit Probe.

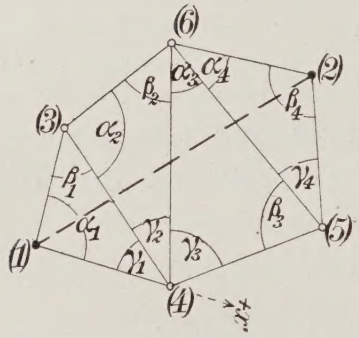


Fig. 130.

Sind die einzelnen Winkel $(\alpha), (\beta), (\gamma)$ gleich genau gemessen, dann werden die Winkel im gewählten Beispiele, bei dem von einer Ausgangsseite aus alle andern Seiten nur in einer Reihenfolge berechnet werden können, zunächst dadurch ausgeglichen, daß der Widerspruch w der drei Dreieckswinkel gegen 180^0 auf die drei Winkel gleichmäßig verteilt wird (siehe das Beispiel in § 72), z. B.

$$(\alpha_1) + (\beta_1) + (\gamma_1) = 180^0 + w_1$$

$$\alpha_1 = (\alpha_1) - \frac{w_1}{3};\ \beta_1 = (\beta_1) - \frac{w_1}{3};\ \gamma_1 = (\gamma_1) - \frac{w_1}{3}.$$

Die ausgeglichenen Winkel sollen dann die in der Figur bezeichneten sein.

Die Lösung möge auf indirektem Wege erfolgen. Man denkt sich eine ähnliche Figur $1', 3', 4', 6', 5', 2'$, in der man irgend eine Seite z. B. $\overline{1'.3'}$ entweder näherungsweise so lang als $\overline{1.3}$ oder als bekannt annimmt z. B. $\overline{1'.3'} = 1000$ m und berechnet dann alle weiteren Dreieckseiten nach dem Sinussatz durch:

$$\overline{1'.4'} = \frac{\overline{1'.3'}\sin\beta_1}{\sin\gamma_1};\quad \overline{3'.4'} = \frac{\overline{1'.3'}\sin\alpha_1}{\sin\gamma_1};\quad \overline{4'.6'} = \frac{\overline{3'.4'}\sin\alpha_2}{\sin\beta_2};$$

$$\overline{3'.6'} = \frac{\overline{3'.4'}\sin\gamma_2}{\sin\beta_2};\quad \overline{5'.6'} = \frac{\overline{4'.6'}\sin\gamma_3}{\sin\beta_3};\quad \overline{4'.5'} = \frac{\overline{4'.6'}\sin\alpha_3}{\sin\beta_3};$$

$$\overline{5'.2'} = \frac{\overline{5'.6'}\sin\alpha_4}{\sin\beta_4};\quad \overline{6'.2'} = \frac{\overline{5'.6'}\sin\gamma_4}{\sin\beta_4}.$$

Hierauf nimmt man ein Hilfskoordinatensystem an, z. B. mit dem Nullpunkt in (1′) und der $+x'$-Achse in der Richtung $\overline{1'.4'}$. In diesem Koordinatensystem berechnet man nach § 52 (ohne Widersprüche) den geschlossenen Polygonzug 1′, 4′, 5′, 2′, 6′, 3′, 1′ und findet dann aus den Koordinaten von (1′) und (2′)

$$\operatorname{tg}(1'.2') = \frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'} \quad \text{und} \quad \overline{1'.2'} = \frac{y_2' - y_1'}{\sin(1'.2')} \overset{\text{oder}}{=} \frac{x_2' - x_1'}{\cos(1'.2')}.$$

Im ursprünglichen Kordinatensystem ist aber:

$$\operatorname{tg}(1.2) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{und} \quad \overline{1.2} = \frac{y_2 - y_1}{\sin(1.2)} \overset{\text{oder}}{=} \frac{x_2 - x_1}{\cos(1.2)}.$$

In den ähnlichen Dreiecken 1 . 3 . 2 und 1′ . 3′ . 2′ besteht die Beziehung:

$$\frac{\overline{1'\cdot 2'}}{\overline{1\cdot 2}} = \frac{\overline{1'\cdot 3'}}{\overline{1\cdot 3}} \quad \text{oder} \quad \overline{1\cdot 3} = \overline{1'\cdot 3'}\cdot\frac{\overline{1\cdot 2}}{\overline{1'\cdot 2'}} = \overline{1'\cdot 3'}\cdot k.$$

In derselben Weise folgt

$$\overline{1.4} = k\cdot\overline{1'.4'};\quad \overline{4.5} = k\cdot\overline{4'.5'};\quad \overline{5.2} = k\cdot\overline{5'.2'},$$

$$\overline{3.6} = k\cdot\overline{3'.6'};\quad \overline{6.2} = k\cdot\overline{6'.2'}$$

d. h. zu den Logarithmen der Seiten $\overline{1'.4'}, \overline{4'.5'}$ usw. ist lediglich der $\log k$ hinzuzufügen, um die Logarithmen der Seiten $\overline{1.4}, \overline{4.5}$ usw. zu bekommen. Den Richtungswinkel (1 . 4) der Seite $\overline{1.4}$ im Hauptkoordinatensystem erhält man durch:

$(1.4) = (1.2) + \sphericalangle 2.1.4$ und es ist

$\sphericalangle 2.1.4 = \sphericalangle 2'.1'.4' = (1'.4') - (1'.2')$ (wobei $(1'.4') = 0^0$ bzw. 360^0).

Man rechnet dann im ursprünglichen Koordinatensystem den Polygonzug **1**, 4, 5, **2**, 6; 3, **1** und erhält dadurch die Koordinaten der Punkte 4, 5, 6 und 3 mit Probe. Ähnliches Zahlenbeispiel siehe 14. Kapitel, § 89.

§ 80. Signalisierung (Bezeichnung der Punkte zum Anzielen); Winkelmessung; Rechnungsschärfe.

Die Bezeichnung und Festlegung der trigonometrischen Punkte im Gelände erfolgt durch dauerhafte Steine, Ton- und Eisenrohre und Gebäudeteile (Helmstangen, Blitzableiter, Turmknöpfe usw.), seltener durch kräftige Holzpflöcke. Das Punktzentrum wird außerdem häufig durch Einmessen auf benachbarte feste Punkte, Marksteine, Tonrohre, Mauerbolzen usw. versichert. Zur Signalisierung benutzt man bis zu Entfernungen von einigen Kilometern fest eingegrabene lotrechte Stangensignale aus geraden Stangen von 3 bis 5 m Länge und 5 bis 10 cm Dicke, die bei günstigem Hintergrunde bis auf etwa 5 km Entfernung ausreichen (vgl. § 2). Genügen diese Stangensignale nicht mehr, so signalisiert man mit drei- oder besser vierseitigen Pyramiden von etwa 4 ÷ 7 m Höhe. Die drei oder vier Stangen der Pyramide müssen im Boden gut ev. durch Verankerung befestigt werden, die Basis (Standfläche) wird zu 0,8 bis 2,5 m im Quadrat angenommen. Den oberen Teil der Pyramide versieht man der besseren Sichtbarkeit halber häufig mit einem Verschlage aus schmalen Brettern, zwischen denen kleine Zwischenräume (Verkleinern des Winddrucks) gelassen werden. Auf je 1 km Entfernung rechnet man etwa je 5 cm Breite des Verschlages. Durch ein in etwa 2 m Höhe angenageltes diagonales Kreuz kann die Standfestigkeit der Pyramide bedeutend erhöht werden.

Die Winkelmessung führt man möglichst zentrisch aus und hebt deshalb Stangensignale vorübergehend heraus. Da meist viele Richtungen zu messen sind, so bildet die satzweise Winkelmessung (Richtungsbeobachtung) die Regel, weil sie dann den geringsten Zeitaufwand erfordert. Die Anzahl der bei verschiedenen Kreisstellungen zu messenden Sätze richtet sich stets nach der anzustrebenden Genauigkeit der Punktbestimmung und der Güte des verwendeten Theodolits. Mit kleineren Schraubenmikroskoptheodoliten erhält man erfahrungsgemäß durch eine vollständige Satzmessung (in zwei Fernrohrlagen) die einzelne Richtung mit einem mittleren Fehler von etwa $m = \pm 4''$, mit einem guten Nonientheodoliten von 10″ Angabe zu $\pm 4''$ bis $\pm 5''$ und von 20″ Angabe zu $\pm 5''$ bis $\pm 7''$ (s. § 26). Soll z. B. ein vorwärts eingeschnittener Punkt durch zwei sich unter 90° schneidende Strahlen von etwa 2 km Länge auf ± 1 cm bestimmt werden, dann müssen die Richtungswinkel dieser zwei Strahlen sicher sein auf $\pm \frac{1 \cdot 206000''}{200000} \approx \pm 1''$, so daß die notwendige Messungszahl leicht gefunden werden kann. Wird beispielsweise zur Bestimmung

eines dieser beiden Richtungswinkel der Winkel zwischen einer gegebenen Richtung und der Richtung nach dem Neupunkte durch n Sätze gemessen, dann muß dadurch die einzelne Richtung auf $\mu'' = \pm \frac{1''}{\sqrt{2}}$ sicher werden; es müßten also etwa $n = \left(\frac{m}{\mu}\right)^2 = 32$ Sätze gemessen werden (vgl. § 4). Meist werden aber mehr Bestimmungsstücke gemessen als zur eindeutigen Bestimmung eines Punktes notwendig sind (überschüssige Beobachtungen), so daß dann die Punktgenauigkeit durch Ausgleichung der bei der Berechnung auftretenden Widersprüche leichter als durch Messungswiederholungen erhöht werden kann. Man begnügt sich dann in der Kleintriangulierung meist mit $2 \div 4$ vollständigen Richtungssätzen und mittelt die (auf ganze Sekunden berechneten) einzelnen Satzmittel bei den Punkten III. Ordnung auf Zehntel-, bei denen IV. Ordnung auf ganze Sekunden. Der mittlere Fehler μ einer solchen gemittelten Richtung (sog. Standfehler, vgl. § 26) darf z. B. in Bayern bei Punkten III. Ordnung $\pm 4''$, bei solchen IV. Ordnung $\pm 6''$ nicht überschreiten. — Die Winkelmessung durch Repetition führt schneller zum Ziel, wenn nur wenige Winkel zu messen sind oder wenn die Ablesegenauigkeit klein ist (z. B. 30″-Nonien). Man mißt hiebei meistens die einzelnen Winkel zwischen einem gut sichtbaren Punkte (der kein Dreieckspunkt zu sein braucht) und den Punkten III. oder IV. Ordnung durch 6- oder 4-malige Repetition (3- oder 2-mal in jeder Fernrohrlage) und in derselben Weise alle einzelnen Ergänzungswinkel auf 360^0 (vgl. § 27) und stellt die Ergebnisse in Form eines Richtungssatzes zusammen.

Die Rechnungsschärfe soll nicht nur bei längeren Rechnungen stets etwas größer als die Messungsschärfe genommen werden. Wenn z. B. die Strecke $x = 5000$ m durch logarithmische Rechnung auf $dx = \pm 5$ mm richtig werden soll, dann darf der Fehler im Logarithmus betragen $d \log x = \frac{1}{x} dx \cdot \log e$ (e = Basis der natürlichen Logarithmen); also

$$d \log x = \frac{1 \cdot \pm 5}{5\,000\,000} \cdot 0{,}434 = \pm 0{,}000\,000\,4 .$$

Es wären demnach $6 \div 7$-stellige Logarithmen erforderlich. Die zugehörige Winkelschärfe beträgt überschläglich $\pm \frac{5 \cdot 206\,265''}{5\,000\,000} = \pm 0{,}2''$. Häufig rechnet man, wenn die Seiten kleiner als 5 km sind, 6-stellig (auf 0,1″), und wenn sie kleiner als 1 km sind, 5-stellig (auf 1″).

§ 81. Zentrierungsrechnungen.

Bei den bisherigen Rechnungen war vorausgesetzt, daß

1. die Winkel genau im Zentrum gemessen wurden und
2. die Zielzeichen genau zentrisch über den entsprechenden Punkten standen.

Beides ist oft nicht möglich und es müssen dann Zentrierungsmessungen und -rechnungen ausgeführt werden, um die auf das Zentrum bezogenen Beobachtungen zu finden. Wir können zwei Arten unterscheiden:

1. Zentrierung exzentrisch gemessener Richtungen wegen exzentrischer Aufstellung des Theodolits. — Im Standpunkte S des Instrumentes (Fig. 131) wurden die Richtungen $1'$, $2'$, $3'$, ..., n', c' gemessen. Gesucht sind die entsprechenden Richtungen $1, 2, \ldots, n$, die in C gemessen würden.

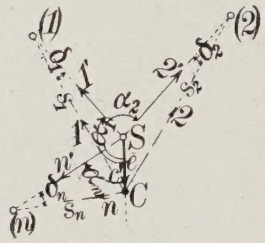


Fig. 131.

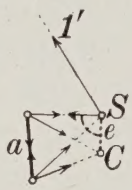


Fig. 132

Um diese berechnen zu können, muß noch die Größe der Exzentrizität $\overline{SC} = e$ bekannt sein. Wenn e und c' nicht direkt gemessen werden können, bestimmt man diese beiden Zentrierungselemente ev. durch eine kleine Triangulierung, wie in Fig. 132 angedeutet ist. Zur Zentrierungsrechnung muß außerdem die Entfernung der Punkte 1, 2, 3 ... von C angenähert bekannt sein. Diese Seiten $s_1, s_2, \ldots$ erhält man entweder durch eine vorläufige Rechnung oder auch durch Abstechen aus einer Karte. Nach der Fig. 131 ist zunächst

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= 1' - c', \\ \alpha_2 &= 2' - c', \\ &\cdots\cdots, \\ \alpha_n &= n' - c', \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

und wenn die Nullrichtung des in C aufgestellt gedachten Theodolits parallel zur Nullrichtung in S angenommen wird:

$$\left.\begin{aligned} 1 &= 1' + \delta_1, \\ 2 &= 2' - \delta_2, \\ &\cdots\cdots, \\ n &= n' + \delta_n, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

wobei nach dem Sinussatze

$$\left.\begin{aligned} \sin\delta_1 &= \sin\alpha_1 \cdot \frac{e}{s_1}, \\ \sin\delta_2 &= \sin(-\alpha_2) \cdot \frac{e}{s_2}, \\ &\cdots\cdots\cdots, \\ \sin\delta_n &= \sin\alpha_n \cdot \frac{e}{s_n}. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Berücksichtigt man die Vorzeichen der Winkel α und δ in den Gleichungen (3) und (2), dann erhält man ganz allgemein für die n-te Richtung

$$n = n' + \delta_n, \tag{4}$$

wobei

$$\sin \delta_n = \sin \alpha_n \cdot \frac{e}{s_n}. \tag{5}$$

e ist im Vergleiche zur Seitenlänge s_n meist sehr klein, infolgedessen wird auch δ_n ein kleiner Winkel. Wenn $\frac{e}{s} < \frac{1}{100}$, darf bis auf etwa $\frac{1}{30}''$ genau gesetzt werden:

$$\delta_n'' = e \cdot \varrho'' \cdot \frac{\sin \alpha_n}{s_n}. \tag{5'}$$

Durch Differenzieren dieser Gleichung nach e und s erhält man

$$d\delta'' = \frac{de}{e}\,\delta'' - \frac{ds}{s}\,\delta''. \tag{6}$$

Damit kann die in e und s zur Erzielung der angestrebten Schärfe $d\delta''$ jeweils notwendige Genauigkeit leicht ermittelt werden.

Beispiel: Es wurde gemessen $e = 9{,}050$ m und die angegebenen exzentrischen Richtungen n'. In der Spalte s_n sind die teilweise aus einer Karte 1 : 10 000 abgemessenen Entfernungen eingetragen.

Zielpunkt	Exzentrische Richtungen n'	δ_n	Zentrierte Richtungen $n = n' + \delta_n$	s_n
(1)	0° 00′ 00″	+ 19′ 37″	0° 19′ 37″	1585 m
(2)	82 22 26	+ 1 31	82 23 57	2170 m
(3)	84 33 44	+ 0 50	84 34 34	2520 m
(4)	98 25 30	− 2 57	98 22 33	1830 m
(C)	268 27	0 00	·	·

Man berechnet

Richtung:	(1)	(2)	(3)	(4)
$\alpha_n = n' - c' =$	91° 33′	173° 55′	176° 07′	189° 59′
e	0.95 665	·	·	·
ϱ''	5.31 443	·	·	·
$e \cdot \varrho$	6.27 108	6.27 108	6.27 108	6.27 108
$\sin \alpha_n$	9.99 984	9.02 520	8.83 075	9.23 895$_n$
Erg. s_n	6.79 997	6.66 354	6.59 860	6.73 755
δ_n''	3.07 089	1.95 982	1.70 043	2.24 758$_n$
δ_n''	= + 1177,3	+ 91,2	+ 50,2	− 176,8
	= + 19′ 37″	+ 1′ 31″	+ 0′ 50″	− 2′ 57″

Eine Ungenauigkeit z. B. in der Entfernung s_1 von $ds = \pm 1$ m würde nach Gleichung (6) den Wert δ_1 um $\pm 0{,}7''$ ändern. Nach Hinzufügen der Zentrierung δ_n zu den exzentrischen Richtungen n' erhält man die im Zentrum beobachteten Richtungen, die weiterhin auf irgend eine Anfangsrichtung bezogen werden können.

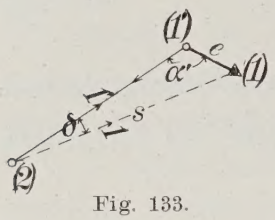


Fig. 133.

2. Zentrierung gemessener Richtungen wegen exzentrischer Signalisierung. — Gemessen wurde die Richtung 1′ nach dem in (1′) stehenden Signale (Fig. 133). Gesucht wird die auf den Punkt (1) umgerechnete Richtung 1. Direkt gemessen seien z. B. die Zentrierungselemente e und α'. Näherungsweise bekannt sei s. Aus der Fig. 133 liest man sofort ab

$$1 = 1' + \delta,$$

wobei

$$\sin \delta = \sin \alpha' \cdot \frac{e}{s},$$

oder wenn

$$\frac{e}{s} < \frac{1}{100}, \qquad \delta'' = e \cdot \varrho'' \cdot \frac{\sin \alpha'}{s}.$$

Das Vorzeichen von δ ergibt sich aus der Figur.

3. Punktübertragung. — Wenn auf dem nahe bei dem gegebenen Punkte (1) liegenden Punkte (1′) gemessen und umsomehr noch wenn außerdem (1′) von den äußeren Punkten aus angezielt wurde, ist es vorteilhaft, weiterhin den Punkt (1′) an Stelle von (1) zu benutzen. Um die Koordinaten von (1′) berechnen zu können, seien z. B. gegeben die Koordinaten von (1) und (2), die Strecke e und der Winkel α' (Fig. 133). Dann wird

$$\operatorname{tg}(1\,.\,2) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}; \qquad \overline{1\,.\,2} = \frac{y_2 - y_1}{\sin(1\,.\,2)} \overset{\text{oder}}{=} \frac{x_2 - x_1}{\cos(1\,.\,2)}. \tag{7}$$

$$(1\,.\,1') = (1\,.\,2) + \sphericalangle\, 2\,.\,1\,.\,1'. \tag{8}$$

$$\sin \delta = \frac{e}{\overline{1\,.\,2}} \cdot \sin \alpha', \quad \text{folglich} \quad \sphericalangle\, 2\,.\,1\,.\,1' = 180^0 - (\alpha' + \delta). \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} x_{1'} &= x_1 + e \cos(1\,.\,1'), \\ y_{1'} &= y_1 + e \sin(1\,.\,1'). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

12. Kapitel.

Einschneiden mit überschüssigen Beobachtungen. Ausgleichung der Beobachtungen unter Vermittlung von Koordinaten nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Zur Sicherung der Punktbestimmung und zur Erhöhung der Genauigkeit begnügt man sich im allgemeinen nicht mit derjenigen Anzahl von Beobachtungen, die die Lage des Punktes eindeutig bestimmt, sondern man stellt überschüssige Beobachtungen an. Infolge der Messungsfehler (und der Fehler der Ausgangspunkte) zeigen sich dann weiterhin Widersprüche. Z. B. wenn man von den Punkten 1, 2, 3, 4 nach dem zu bestimmenden Punkte P (Fig. 134) die Richtungswinkel der angedeuteten Vorwärtsstrahlen beobachtet, dann werden für diesen Punkt P aus den Strahlen von 1 und 2, 2 und 3, 3 und 4 usf. jedesmal andere Koordinaten erhalten werden. Die beobachteten Strahlen gehen also nicht mehr durch einen einzigen Punkt und es müssen deshalb die Beobachtungen verträglich gemacht, d. h. ausgeglichen werden, indem jeder Beobachtung eine kleine Verbesserung v zugeteilt wird. Die Ausgleichung kann nach verschiedenen Arten gemacht werden. Die besten Ergebnisse liefert die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate, bei der nach § 67 die Verbesserungen derart bestimmt werden, daß $[pvv] =$ Minimum.

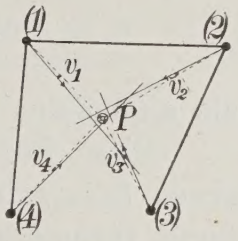


Fig. 134.

§ 82. Ausgleichen eines rückwärts eingeschnittenen Punktes.

Auf dem zu bestimmenden Punkte P wurden nach den gegebenen Punkten (1), (2), . . ., (n) die Richtungen $\gamma_1, \gamma_2, \cdot\ \cdot, \gamma_n$ mit den Gewichten $p_1, p_2, \ldots p_n$ gemessen (Fig. 135). Aus drei günstigen Richtungen werden nach § 77 für P die guten Näherungskoordinaten (x), (y) berechnet.

Bezeichnen: $\underline{\varphi_0}$ den ausgeglichenen Richtungswinkel der Nullrichtung des Satzes, $\underline{\varphi_n}$ diejenigen der Richtungen vom ausgeglichenen Punkt P nach den Punkten (n), $\underline{\gamma_n}$ die ausgeglichenen beobachteten Richtungen, $\underline{x}$, $\underline{y}$ die ausgeglichenen Koordinaten von P, so bestehen nach Andeutung der Fig. 135 die Beziehungen

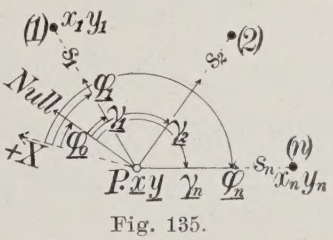


Fig. 135.

$$\left.\begin{aligned} \underline{\varphi_n} &= \underline{\varphi_0} + \underline{\gamma_n} = \operatorname{arctg} \frac{y_n - \underline{y}}{x_n - \underline{x}} \\ \text{oder} \qquad & \\ \underline{\gamma_n} &= \operatorname{arctg} \frac{y_n - \underline{y}}{x_n - \underline{x}} - \underline{\varphi_0}; \quad \text{Gewicht } p_n. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Bezeichnen v_n die den Beobachtungen γ_n zuzufügenden Verbesserungen, also

$$\underline{\gamma_n} = \gamma_n + v_n \tag{2}$$

und setzt man fernerhin

$$\underline{x} = (x) + dx; \quad \underline{y} = (y) + dy; \quad \underline{\varphi_0} = (\varphi_0) + dz, \tag{3}$$

so erhält man aus Gleichung (1):

$$v_n = \operatorname{arctg} \frac{y_n - ((y) + dy)}{x_n - ((x) + dx)} - ((\varphi_0) + dz) - \gamma_n, \quad \text{Gewicht } p_n \tag{4}$$

als allgemeine Fehlergleichung.

Diese Fehlergleichungen werden durch Anwendung des Taylorschen Satzes linear gemacht. Werden hiebei die Glieder höherer Ordnung vernachlässigt, dann folgt

$$v_n = \operatorname{arctg} \frac{y_n - (y)}{x_n - (x)} - ((\varphi_0) + \gamma_n) + \frac{\partial v_n}{\partial (x)} \cdot dx + \frac{\partial v_n}{\partial (y)} \cdot dy + \frac{\partial v_n}{\partial (\varphi_0)} \cdot dz + \cdots, \tag{5}$$

worin

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v_n}{\partial (x)} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y_n - (y)}{x_n - (x)}\right)^2} \cdot \frac{-(y_n - (y))}{(x_n - (x))^2} \cdot -1, \\ \frac{\partial v_n}{\partial (y)} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y_n - (y)}{x_n - (x)}\right)^2} \cdot \frac{-1}{x_n - (x)}, \\ \frac{\partial v_n}{\partial (\varphi_0)} &= -1. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Setzt man

$$s_n^2 = (x_n - (x))^2 + (y_n - (y))^2 = \left(\frac{x_n - (x)}{\cos (\varphi_n)}\right)^2 = \left(\frac{y_n - (y)}{\sin (\varphi_n)}\right)^2,$$

zählt die Verbesserungen v_n in Bogensekunden (fügt also auch in (6) rechts den Faktor $\varrho'' = 206\,265''$ hinzu), und setzt

$$\operatorname{arctg} \frac{y_n - (y)}{x_n - (x)} = (\varphi_n), \tag{7}$$

dann erhält man aus den Gleichungen (6)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v_n}{\partial (x)} &= a_n = + \frac{\sin (\varphi_n)}{s_n} \cdot \varrho'', \\ \frac{\partial v_n}{\partial (y)} &= b_n = - \frac{\cos (\varphi_n)}{s_n} \cdot \varrho'', \\ \frac{\partial v_n}{\partial (\varphi_0)} &= c_n = -1. \end{aligned}\right\} \qquad (6')$$

Führt man zur Abkürzung in Gleichung (5) ein

$$l_n'' = \operatorname{arctg} \frac{y_n - (y)}{x_n - (x)} - ((\varphi_0) + \gamma_n) = (\varphi_n) - ((\varphi_0) + \gamma_n), \qquad (8)$$

dann werden die linearen Fehlergleichungen:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a_1 dx + b_1 dy + c_1 dz + l_1, \quad \text{Gewicht } p_1, \\ v_2 &= a_2 dx + b_2 dy + c_2 dz + l_2, \quad \text{„} \quad p_2, \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ v_n &= a_n dx + b_n dy + c_n dz + l_n, \quad \text{„} \quad p_n. \end{aligned}\right\} \text{Anzahl } n. \qquad (9)$$

Durch Hinzutreten der Bedingung

$$p_1 v_1 v_1 + p_2 v_2 v_2 + \cdots + p_n v_n v_n = [pvv] = \text{Minimum} \qquad (10)$$

erhält man nach § 67 die zugehörigen Normalgleichungen zur Berechnung der Unbekannten u. s. f.

Da in den Gleichungen (9) alle Koeffizienten $c = -1$ werden, so ist es für die Rechnung vorteilhaft, die Unbekannte dz in Gleichung (9) an den Anfang zu stellen. Die Normalgleichungen werden dann nach § 67, Gleichung (11):

$$\left.\begin{aligned} \underline{[pcc]}\,dz + [pac]\,dx + [pbc]\,dy + [pcl] &= 0, \\ [pac]\,dz + \underline{[paa]}\,dx + [pab]\,dy + [pal] &= 0, \\ [pbc]\,dz + [pab]\,dx + \underline{[pbb]}\,dy + [pbl] &= 0, \\ [pcl]\,dz + [pal]\,dx + [pbl]\,dy + \underline{[pll]} &= [pvv]. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Aus diesen Gleichungen (11) findet man nach § 68 der Reihe nach $[pvv]$, dy, dx, dz, p_y und p_x. Das Gewicht p_z hat meist keine Bedeutung. Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit, d. i. einer beobachteten Richtung γ vom Gewichte 1, wird, weil $u = 3$ Unbekannte zu bestimmen sind:

$$\mathfrak{m} = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-3}}; \quad \text{folglich} \quad m_y = \frac{\mathfrak{m}}{\sqrt{p_y}}; \quad m_x = \frac{\mathfrak{m}}{\sqrt{p_x}}. \qquad (12)$$

Anmerkungen: 1. Da meist alle Gewichte $p_1, p_2, \ldots, p_n$ gleich sind und $= 1$ genommen werden, so werden in diesem Falle die Normalgleichungen (11) in symbolischer Schreibweise:

$$\begin{aligned} \underline{n}\,dz - [a]\,dx - [b]\,dy - [l] &= 0, \\ \underline{[aa]} + [ab] + [al] & \\ \underline{[bb]} + [bl] & \\ \underline{[ll]}. & \end{aligned}$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt

$$dz = \frac{[a]}{n}\,dx + \frac{[b]}{n}\,dy + \frac{[l]}{n}.$$

Setzt man diese Gleichung in (9) ein, dann bleiben die Fehlergleichungen:

$$v_n = \left(a_n - \frac{[a]}{n}\right) dx + \left(b_n - \frac{[b]}{n}\right) dy + \left(l_n - \frac{[l]}{n}\right).$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$A_n = a_n - \frac{[a]}{n}, \quad B_n = b_n - \frac{[b]}{n}, \quad L_n = l_n - \frac{[l]}{n}, \tag{13}$$

dann heißen die (reduzierten) Fehlergleichungen

$$v_n = A_n dx + B_n dy + L_n \tag{14}$$

und aus den zugehörigen Normalgleichungen, die, wie leicht zu finden, mit den einmal reduzierten Normalgleichungen von (11) übereinstimmen, folgen die Unbekannten und deren Gewichte.

2. Zur Zwischenprobe der Rechnung bestimmt man mit den Größen dz, dx, dy aus den Gleichungen (9) bzw. (14) die einzelnen Verbesserungen v_n, und damit $[pvv]$. Dieser Wert muß mit dem bei der Elimination gefundenen (innerhalb kleiner von Abrundungen herrührenden Differenzen) übereinstimmen. Die durchgreifendste Probe besteht in der Übereinstimmung der Werte $\underline{\varphi_n} = (\varphi_0) + \gamma_n + dz + v_n$ und $\underline{\varphi_n} = \operatorname{arctg} \frac{y_n - y}{x_n - x}$ (nach Gleichung (1)).

3. Die Koeffizienten a_n und b_n nach Gleichung (6′) werden in der Kleintriangulierung kleinere Zahlen, wenn in diesen Gleichungen die Strecken s_n in Dezimetereinheiten gezählt werden; die Verbesserungen dx und dy werden dann auch in solchen Einheiten erhalten. Zur raschen Bestimmung der Größen a_n und b_n gibt es viele Hilfsmittel (4 ÷ 5-stellige logarithmische Rechnung, Zahlentafeln, Diagramme, Rechenschieber u. dgl.).

Zahlenbeispiel. Mit den in § 77 angegebenen Richtungen nach vier Punkten sollen die ausgeglichenen Koordinaten des Punktes P berechnet werden.

1. Die vorläufige (5-stellige) Rechnung in § 77 (Seite 177) lieferte (auf etwa 1 dm sicher):

$$\left.\begin{aligned}(y) &= +\,17\,435{,}6\,,\\ (x) &= +\,53\,188{,}1\,.\end{aligned}\right\}$$

2. Mit diesen und den gegebenen Koordinaten folgen nach Gleichung (7) die Näherungsrichtungswinkel (φ_n); aus $(\varphi_1)-\gamma_1 \approx (\varphi_0)$ ergibt sich der genäherte Richtungswinkel der Satznullrichtung und demnach werden nach Gleichung (8) die Absolutglieder l_n in der folgenden tabellarischen Weise:

Punkt	(1) Ölper	(2) Zentralfriedhof	(3) Magnikirche	(4) Andreaskirche	
$y_n =$	$+\,15\;436{,}599$	$+\,19\;346{,}754$	$+\,17\;518{,}984$	$+\,16\;831{,}430$	
$x_n =$	$+\,54\;758{,}544$	$+\,51\;320{,}224$	$+\,52\;030{,}250$	$+\,52\;632{,}659$	
$y_n-(y) =$	$-\;1\;999{,}001$	$+\;1\;911{,}154$	$+\;\;\;83{,}384$	$-\;\;604{,}170$	
$x_n-(x) =$	$+\;1\;570{,}444$	$-\;1\;867{,}876$	$-\;1\;157{,}850$	$-\;\;555{,}441$	
$y_n-(y)$	$3.30\;08\;13_n$	$3.28\;12\;95$	$1.92\;10\;83$	$2.78\;11\;59_n$	
$E\,{\sin \atop \cos}(\varphi_n)$	$0.10\;43\;8$	$0.14\;56\;1$	$0.00\;11\;2$	$0.13\;30\;2$	
$x_n-(x)$	$3.19\;60\;22$	$3.27\;13\;48_n$	$3.06\;36\;52_n$	$2.74\;46\;38_n$	
$\operatorname{tg}(\varphi_n)$	$0.10\;47\;91_n$	$0.00\;99\;47_n$	$8.85\;74\;31_n$	$0.03\;65\;21$	
s_n	$3.40\;51\;9$	$3.42\;69\;0$	$3.06\;47\;7$	$2.91\;41\;8$	
$s_n =$	2542	2672	1161	821	
$(\varphi_n) =$	$308^0\,09'\,13{,}2''$	$134^0\,20'\,38{,}1''$	$175^0\,52'\,51{,}2''$	$227^0\,24'\,22{,}4''$	
$\gamma_n =$	$9\;27\;36{,}6$	$195\;38\;58{,}0$	$237\;11\;00{,}6$	$288\;42\;42{,}8$	$(\varphi_0)\approx(\varphi_1)-\gamma_1 =$
$p_n =$	1	1	1	1	$=298^0\,41'\,36{,}0''$
$(\varphi_0)+\gamma_n =$	$308\;09\;12{,}6$	$134\;20\;34{,}0$	$175\;52\;36{,}6$	$227\;24\;18{,}8$	
$l_n=(\varphi_n)-\{(\varphi_0)+\gamma_n\} =$	$+\,0{,}6''$	$+\,4{,}1$	$+\,14{,}6$	$+\;3{,}6$	
$a_n =$	$-\,6{,}4$	$+\,5{,}5$	$+\;1{,}3$	$-\,18{,}5$	
$b_n =$	$-\,5{,}0$	$+\,5{,}4$	$+\,17{,}7$	$+\,17{,}0$	

Berechnet man die Größen

$$a_n = +\frac{\sin(\varphi_n)}{s_n}\cdot\varrho'' \quad \text{und} \quad b_n = -\frac{\cos(\varphi_n)}{s_n}\cdot\varrho''$$

nach Gleichung (6′), in denen s_n in Dezimetereinheiten eingesetzt wird, etwa mit 4-stelligen Logarithmen, dann findet man die in der Tabelle unten beigefügten Zahlen.

3. Die Fehlergleichungen (9) sind demnach:

Nr.	c	a	b	l	Gewicht p	A	B	L	AA	AB	AL	BB	BL	LL
1	−1	− 6,4	− 5,0	+ 0,6	1	− 1,9	− 13,8	−5,1	3,6	+ 26,2	+ 9,7	190,4	+ 70,4	26,0
2	−1	+ 5,5	+ 5,4	+ 4,1	1	+ 10,0	− 3,4	−1,6	100,0	− 34,0	− 16,0	11,6	+ 5,4	2,6
3	−1	+ 1,3	+ 17,7	+ 14,6	1	+ 5,8	+ 8,9	+8,9	33,6	+ 51,6	+ 51,6	79,2	+ 79,2	79,2
4	−1	− 18,5	+ 17,0	+ 3,6	1	− 14,0	+ 8,2	−2,1	196,0	−114,8	+ 29,4	67,2	− 17,2	4,4
$\Sigma =$	−4	− 18,1	+ 35,1	+ 22,9		− 0,1	− 0,1	+0,1	333,2	− 71,0	+ 74,7	348,4	+137,8	112,2
$-\frac{\Sigma}{n} =$	+1	+ 4,5	− 8,8	− 5,7										

Berücksichtigt man das in Anmerkung 1 Gesagte und rechnet nach den Gleichungen (13), dann erhält man die in leicht verständlicher Weise nebenan geschriebenen Fehlergleichungen mit den Koeffizienten A, B und L. Die Ausdrücke $[AA]$, $[AB]$ usw. sind mit einem 25 cm langen Rechenschieber bzw. mit einer Quadrattafel berechnet.

Die Auflösung der Normalgleichungen (mit dem Rechenschieber) nach dem Gaußischen Eliminationsverfahren (§ 68) liefert:

$dx \cdot$	$dy \cdot$	
333,2	− 71,0	+ 74,7
	348,4	+ 137,8
	− 15,2	+ 15,9
		112,2
		− 16,8
	333,2	+ 153,7
		95,4
		− 71,0
		24,4 = $[pvv]$

$$dx = -\frac{-74{,}7 - 32{,}8}{333{,}2} = -0{,}323 \text{ dm}$$

$$p_x = 333{,}2 \cdot \frac{333{,}2}{348{,}6} = 318{,}5$$

$$dy = -0{,}462 \text{ dm}$$

$$p_y = 333{,}2$$

Die erste Normalgleichung (11) heißt nach Anmerkung 1:

$$n \cdot dz - [a] \cdot dx - [b] \cdot dy - [l] = 0,$$

stimmt also mit der obigen Summengleichung

$$\Sigma = -4\,dz - 18{,}1\,dx + 35{,}1\,dy + 22{,}9$$

überein; folglich ist

$$dz = \frac{-18{,}1 \cdot dx + 35{,}1\, dy + 22{,}9}{4} = \frac{+5{,}8 - 16{,}2 + 22{,}9}{4} = +3{,}1''.$$

Die ausgeglichenen Größen werden:

$$\underline{x} = +53\,188{,}1 - 0{,}032 = +53\,188{,}068 \pm 0{,}028,$$

$$\underline{y} = +17\,435{,}6 - 0{,}046 = +17\,435{,}554 \pm 0{,}027,$$

$$\underline{\varphi_0} = 298^0\,41'\,36{,}0'' + 3{,}1'' = 298^0\,41'\,39{,}1''.$$

4. Die Verbesserungen der einzelnen Beobachtungen berechnet man am einfachsten mit den reduzierten Fehlergleichungen (14) und erhält dann einige Rechenproben (nach Anmerkung 2).

Nr.	Adx	Bdy	L	v	pvv
1	+0,6	+6,4	−5,1	+1,9	3,6
2	−3,2	+1,6	−1,6	−3,2	10,2
3	−1,8	−4,1	+8,9	+3,0	9,0
4	+4,5	−3,7	−2,1	−1,3	1,7
Σ	+0,1	+0,2	+0,1	+0,4	24,5
		+0,4			

$$\mathfrak{m} = \sqrt{\frac{24{,}4}{4-3}} = \pm 4{,}94''$$

$$m_x = \frac{\mathfrak{m}}{\sqrt{p_x}} = \pm 0{,}277 \text{ dm}$$

$$m_y = \frac{\mathfrak{m}}{\sqrt{p_y}} = \pm 0{,}271 \text{ dm}.$$

Die geringe Abweichung in $[pvv]$ zwischen 24,5 und 24,4 (Elimination) rührt von kleinen Abrundungsfehlern her; die mittleren Fehler sind den ausgeglichenen Werten beigesetzt.

Die Schlußprobe nach Anm. 2 ist in der folgenden Tabelle gerechnet:

Nr.	(1)	(2)	(3)	(4)
$(\varphi_0) + \gamma_n =$	308° 09′ 12,6″	134° 20′ 34,0″	175° 52′ 36,6″	227° 24′ 18,8″
$+ dz =$	+ 3,1	+ 3,1	+ 3,1	+ 3,1
$+ v_n =$	+ 1,9	− 3,2	+ 3,0	− 1,3
$\underline{\varphi_n} =$	380 09 17,6	134 20 33,9	175 52 42,7	227 24 20,6
$y_n =$	+15 436,599	+19 346,754	+17 518,984	+16 831,430
$x_n =$	+54 758,544	+51 320,224	+52 030,250	+52 632,659
$y_n - y =$	− 1 998,955	+ 1 911,200	+ 83,430	− 604,124
$x_n - x =$	+ 1 570,476	− 1 867,844	− 1 157,818	− 555,409
$y_n - \underline{y}$	3.30 08 03_n	3.28 13 06	1.92 13 22	2.78 11 26_n
$x_n - \underline{x}$	3.19 60 31	3.27 13 41_n	3.06 36 41_n	2.74 46 13_n
$\operatorname{tg} \underline{\varphi_n}$	0.10 47 72_n	0.00 99 65_n	8.85 76 81_n	0.03 65 13
$\underline{\varphi_n} =$	308° 09′ 17,5″	134° 20′ 33,8″	175° 52′ 42,7″	227° 24′ 20,5″

§ 83. Ausgleichen eines vorwärts eingeschnittenen Punktes.

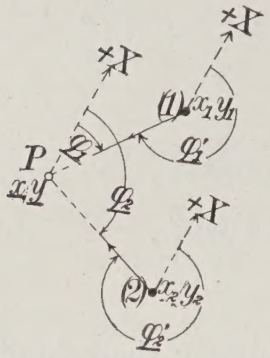


Fig. 136.

Durch Richtungsbeobachtungen oder Winkelmessungen auf den gegebenen äußeren Punkten (1), (2), ..., (n) wurden die Richtungswinkel φ_1', φ_2', ..., φ_n' der von diesen Punkten nach dem zu bestimmenden Punkte P (siehe Fig. 136) gehenden Strahlen mit den Gewichten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ermittelt.

Zur Gewichtsbestimmung ist zu bemerken:

a) Wurden auf den äußeren Punkten nach bekannten und nach gesuchten Punkten die Richtungen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_m \gamma_P$ gleich genau mit dem mittleren Fehler μ (gleich viele Sätze) gemessen wie z. B. in Fig. 137 auf (1) nach den m bekannten Punkten (1'), (2'), ... (m') und nach P, so ist zunächst nach Fig. 137:

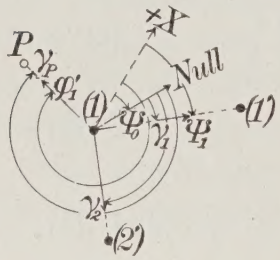


Fig. 137.

$$\left.\begin{aligned} \psi_1 &= \operatorname{arctg}\frac{y_1' - y_1}{x_1' - x_1} \\ \psi_2 &= \operatorname{arctg}\frac{y_2' - y_1}{x_2' - x_1} \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \psi_m &= \operatorname{arctg}\frac{y_m' - y_1}{x_m' - x_1} \end{aligned}\right\} \text{Anzahl } m. \tag{1}$$

Der Richtungswinkel ψ_0 der Satznullrichtung folgt aus diesen m Richtungswinkeln jeweils zu:

$$\left.\begin{aligned} \psi_0' &= \psi_1 - \gamma_1 \\ \psi_0'' &= \psi_2 - \gamma_2 \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \psi_0^{(m)} &= \psi_m - \gamma_m \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Diese m direkten gleich genauen Beobachtungen derselben Unbekannten (alle γ sind gleich genau) liefern den Richtungswinkel der Nullrichtung des Satzes zu

$$\underline{\psi_0} = \frac{\psi_0' + \psi_0'' + \cdots + \psi_0^{(m)}}{m} = \frac{[\psi_0]}{m} \tag{3}$$

mit dem mittleren Fehler

$$\frac{\mu}{\sqrt{m}}.$$

Der beobachtete Richtungswinkel φ_1' von (1) nach P wird

$$\varphi_1' = \underline{\psi_0} + \gamma_P, \tag{4}$$

sein mittlerer Fehler

$$m_{\varphi_1'}^2 = \frac{\mu^2}{m} + \mu^2 = \mu^2 \cdot \frac{m+1}{m}$$

oder sein Gewicht, da $\mathfrak{p} = 1 = \frac{k}{\mu^2}$,

$$p_1 = \frac{m}{m+1}. \tag{5}$$

b) Wurden auf den äußeren Punkten zwischen den m gegebenen Punkten $(1')$, $(2')$, ... (m') und dem gesuchten Punkte P die einzelnen Winkel $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$ mit den mittleren Richtungsfehlern μ gemessen, dann wird (siehe Fig. 138):

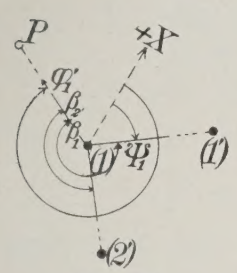


Fig. 138.

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1^{(')} &= \psi_1 + \beta_1 \\ \varphi_1^{('')} &= \psi_2 + \beta_2 \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \varphi_1^{(m)} &= \psi_m + \beta_m \end{aligned}\right\} \quad \text{Die Werte } \psi_1, \psi_2 \cdots \psi_m \text{ folgen wie unter a) aus den Gleichungen (1).} \tag{6}$$

$$\text{folglich} \quad \varphi_1' = \frac{\varphi_1^{(')} + \varphi_1^{('')} + \cdots + \varphi_1^{(m)}}{m}. \tag{7}$$

Aus dem mittleren Richtungsfehler μ folgt der mittlere Fehler eines Winkels β zu $\mu\sqrt{2}$, der von φ_1' zu $\frac{\mu\sqrt{2}}{\sqrt{m}}$ und folglich dessen Gewicht, wenn wieder $\mathfrak{p} = 1 = \frac{k}{\mu^2}$:

$$p_1 = \frac{m}{2}. \tag{8}$$

Aus zwei sich unter günstigen Winkeln schneidenden Strahlen berechnet man gute Näherungswerte $(x)(y)$ für die Koordinaten von P z. B. nach § 76. Bezeichnen $\underline{x}\,\underline{y}$ die ausgeglichenen Koordinaten von P, $\underline{\varphi_n'}$ den ausgeglichenen Richtungswinkel vom Punkte (n) nach P, dann liest man aus Fig. 136 die Beziehung zwischen den Richtungswinkeln und den Koordinaten ab zu

$$\underline{\varphi_n'} = \operatorname{arctg} \frac{y_n - \underline{y}}{x_n - \underline{x}} \pm 180^0. \tag{9}$$

Sind v_n die den Beobachtungen φ_n' hinzuzufügenden Verbesserungen, also $\underline{\varphi_n'} = \varphi_n' + v_n$, und setzt man:

$$\left.\begin{aligned} \underline{x} &= (x) + dx, \\ \underline{y} &= (y) + dy, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

so liefert (9) die allgemeine Fehlergleichung zu

$$v_n = \operatorname{arctg} \frac{y_n - ((y) + dy)}{x_n - ((x) + dx)} \pm 180^0 - \varphi_n', \quad \text{Gewicht } p_n. \tag{11}$$

Wendet man auf diese Fehlergleichung wie in § 82 den Taylorschen Satz an und setzt wieder:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{\partial v_n}{\partial (x)} = + \frac{\sin (\varphi_n)}{s_n} \cdot \varrho'', \\ b_n &= \frac{\partial v_n}{\partial (y)} = - \frac{\cos (\varphi_n)}{s_n} \cdot \varrho'', \\ l_n &= \operatorname{arctg} \frac{y_n - (y)}{x_n - (x)} - (\varphi_n' \mp 180^0) = (\varphi_n) - (\varphi_n' \mp 180^0), \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

wobei:

$$s_n^2 = (x_n - (x))^2 + (y_n - (y))^2 = \left(\frac{x_n - (x)}{\cos (\varphi_n)}\right)^2 = \left(\frac{y_n - (y)}{\sin (\varphi_n)}\right)^2,$$

so werden die linearen Fehlergleichungen:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a_1\, dx + b_1\, dy + l_1, \quad \text{Gewicht } p_1, \\ v_2 &= a_2\, dx + b_2\, dy + l_2, \quad \text{„ } p_2, \\ &\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ v_n &= a_n\, dx + b_n\, dy + l_n, \quad \text{„ } p_n. \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Aus den nach § 67 hiezu gehörigen Normalgleichungen findet man nach § 68 die Unbekannten dy, dx, $[pvv]$, p_y und p_x.

Der mittlere Fehler eines beobachteten Richtungswinkels vom Gewichte 1 (der mittlere Fehler der Gewichtseinheit) wird, da zwei Ausgleichungsunbekannte bestimmt werden:

$$\mathfrak{m} = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-2}}; \quad \text{außerdem} \quad m_x = \frac{\mathfrak{m}}{\sqrt{p_x}}; \quad m_y = \frac{\mathfrak{m}}{\sqrt{p_y}}. \quad (14)$$

Anmerkungen. 1. Wenn die Gewichte $p_1, p_2, \ldots p_n$ nach Gl. (5) bzw. (8) unrunde Zahlen sind, reduziert man zweckmäßig sämtliche Fehlergleichungen (13) durch Multiplizieren ihrer Koeffizienten a, b und l mit $\sqrt{p}$ nach Gleichung 7a, § 67, auf das Gewicht 1. Die den einzelnen Beobachtungen hinzuzufügenden Verbesserungen v werden dann durch $v = \frac{\mathfrak{v}}{\sqrt{p}}$ gefunden (vgl. § 67).

2. Mit den einzelnen Verbesserungen nach (13) berechnet man $[pvv]$, das hinreichend genau mit dem aus der Elimination gefundenen Wert übereinstimmen muß. Die beste Probe liefert die Übereinstimmung der Ausdrücke

$$\underline{\varphi_n} = \varphi_n' \pm 180^0 + v_n$$

und

$$\varphi_n = \operatorname{arctg} \frac{y_n - \underline{y}}{x_n - \underline{x}}.$$

3. Wegen der Koeffizienten a und b vgl. Anmerkung 3 von § 81.

Zahlenbeispiel. Auf den vier Punkten (1) = *K.* 2; (2) = *K.* 4; (3) = *K.* 1 und (4) = *K.* 7 der Fig. 124, S. 171, wurden mit einem Theodolit (mit 10″ Nonienangabe) nach § 26 je drei vollständige Richtungssätze gemessen, in denen der Neupunkt $P = F$ (Festung) angezielt wurde.

Die Messungen z. B. auf (4) = K. 7 sind teilweise im § 26 enthalten und lieferten dort die Richtungen:

(Thierberg *T.*):	$\gamma_1 = 23^0\,55'\,14''$	$\psi_1 = 342^0\,46'\,09''$
(*K.* 6):	$\gamma_2 = 318\;\;30\;\;08$	$\psi_2 = 277\;\;21\;\;14$
(*K.* 9):	$\gamma_3 = 337\;\;00\;\;21$	$\psi_3 = 295\;\;51\;\;18$
(P = Festung):	$\gamma_P = 360\;\;\;0\;\;\;0$	

Aus den bekannten Koordinaten von (4) = *K.* 7 und denjenigen der ersten drei Punkte des Richtungssatzes wurden nach Gleichung (1) die beigesetzten Richtungswinkel ψ_1, ψ_2, ψ_3 berechnet (die auch in der Tabelle des § 26, Seite 59, als Richtungswinkel unterhalb „Mittel der Richtungen“ eingetragen sind).

Nach Gleichung (3) folgt damit der Richtungswinkel der Nullrichtung des Satzes zu

$$\underline{\psi_0} = 318^0\,50'\,50'' + \frac{5'' + 16'' + 7''}{3} = 318^0\,50'\,59{,}_3''$$

und derjenige des von (4) nach P gehenden Strahles nach Gleichung (4) bzw. (5) zu

$$\varphi_4' = \underline{\psi_0} + 0^0\,0'\,0'' = 318^0\,50'\,59'' \text{ mit } p_4 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}.$$

In derselben Weise wurde erhalten:

Auf	(1) = *K.* 2:	$\varphi_1' = 120^0\,35'\,06''$;	$p_1 = {}^6/_7$,
„	(2) = *K.* 4:	$\varphi_2' = 202\;\;07\;\;49$;	$p_2 = {}^8/_9$,
„	(3) = *K.* 1:	$\varphi_3' = 239\;\;23\;\;21$;	$p_3 = {}^7/_8$,
„	(4) = *K.* 7:	$\varphi_4' = 318\;\;50\;\;59$;	$p_4 = {}^3/_4$.

Die Näherungskoordinaten für P sind aus den zwei Strahlen von (1) und (2) nach P im § 76 S. 174 berechnet zu

$$(y) = +\;\;4850{,}4,$$
$$(x) = -\;61805{,}4.$$

Die gegebenen Koordinaten der Punkte (1) bis (4) sind aus der folgenden Tabelle ersichtlich; die Richtungswinkel (φ) nach Gleichung (12) sind auf ganze Sekunden berechnet und bei Berechnung der Differential-

quotienten a_n und b_n wurden zur Erzielung kleinerer Zahlen die Strecken s_n in Dezimetereinheiten eingesetzt.

Nr.	(1) = $K.2$	(2) = $K.4$	(3) = $K.1$	(4) = $K.7$
$y_n =$	+ 4 091,24	+ 5 266,01	+ 5 814,66	+ 5 339,76
$x_n =$	− 61 356,69	− 60 783,43	− 61 234,91	− 62 365,34
$y_n - (y) =$	− 759,16	+ 415,61	+ 964,26	+ 489,36
$x_n - (x) =$	+ 448,71	+ 1 021,97	+ 570,49	− 559,94
$y_n - (y)$	2.88 03 33_n	2.61 86 86	2.98 41 94	2.68 96 28
$E \overset{\sin}{\cos}(\varphi_n)$	0.06 50 6	0.03 32 3	0.06 51 7	0.12 32 2
$x_n - (x)$	2.65 19 66	3.00 94 38	2.75 62 48	2.74 81 41_n
$\operatorname{tg}(\varphi_n)$	0.22 83 67_n	9.60 92 48	0.22 79 46	9.94 14 87_n
s_n	2.94 539	3.04 267	3.04 936	2.87 136
$s_n =$	881,8	1103,2	1120,4	743,6
$(\varphi_n) =$	300° 35′ 09″	22° 07′ 49″	59° 23′ 24″	138° 50′ 53″
$\varphi_n' =$	120° 35′ 06″	202° 07′ 49″	239° 23′ 21″	318° 50′ 59″
$p_n =$	$\frac{6}{7} = 0{,}9$	$\frac{8}{9} = 0{,}9$	$\frac{7}{8} = 0{,}9$	$\frac{3}{4} = 0{,}75$
$l_n = (\varphi_n) - \{\varphi_n' \pm 180°\} =$	+ 3″	0	+ 3″	− 6″
$a_n =$	− 20,1	+ 7,0	+ 15,8	+ 18,3
$b_n =$	− 11,9	− 17,3	− 9,4	+ 20,9

Die auf die Gewichte p und die auf die Gewichtseinheit $\mathfrak{p} = 1$ bezogenen Fehlergleichungen folgen demnach zu:

Nr.	a	b	l	Gewicht p	$\mathfrak{a} = a\sqrt{p}$	$\mathfrak{b} = b\sqrt{p}$	$\mathfrak{l} = l\sqrt{p}$	Gew. $\mathfrak{p}$
1	− 20,1	− 11,9	+ 3	0,9	− 19,1	− 11,3	+ 2,8	1
2	+ 7,0	− 17,3	0	0,9	+ 6,6	− 16,4	0	1
3	+ 15,8	− 9,4	+ 3	0,9	+ 15,0	− 8,9	+ 2,8	1
4	+ 18,3	+ 20,9	− 6	0,75	+ 15,8	+ 18,1	− 5,2	1

Damit findet man die Normalgleichungskoeffizienten:

Nr.	$\mathfrak{aa} = paa$	$\mathfrak{ab} = pab$	$\mathfrak{al} = pal$	$\mathfrak{bb} = pbb$	$\mathfrak{bl} = pbl$	$\mathfrak{ll} = pll$
1	364,8	+ 215,8	− 53,5	127,7	− 31,6	7,8
2	43,6	− 108,2	0,0	269,0	0,0	0,0
3	225,0	− 133,5	+ 42,0	79,2	− 24,9	7,8
4	249,6	+ 286,0	− 82,2	327,6	− 94,1	27,0
$\Sigma =$	883,0	+ 260,1	− 93,7	803,5	− 150,6	42,6

und aus diesen nach dem Gaußischen Eliminationsverfahren die Unbekannten und deren Gewichte:

$dx \cdot$	$dy \cdot$	
+ 883,0	+ 260,1	− 93,7
	+ 803,5	− 150,6
	− 76,6	+ 27,6
		+ 42,6
		− 9,9
	+ 726,9	− 123,0
		+ 32,7
		− 20,8
		11,9 = [pvv]

$$dx = \frac{93{,}7 - 0{,}169 \cdot 260{,}1}{883{,}0} = +0{,}0563 \text{ dm}$$

$$p_x = 726{,}9 \cdot \frac{883{,}0}{803{,}5} = 798{,}8$$

$$dy = \frac{123{,}0}{726{,}9} = +0{,}1692 \text{ dm}$$

$$p_y = 726{,}9$$

$$\mathfrak{m} = \sqrt{\frac{11{,}9}{4-2}} = \pm 2{,}44'',$$

$$m_x = \frac{2{,}44}{\sqrt{799}} = \pm 0{,}086 \text{ dm},$$

$$m_y = \frac{2{,}44}{\sqrt{727}} = \pm 0{,}090 \text{ dm}.$$

Die ausgeglichenen Koordinaten werden:

$$\underline{y} = +\ 4850{,}4 + 0{,}017 = +\ 4850{,}417 \pm 0{,}009,$$

$$\underline{x} = -\ 61805{,}4 + 0{,}006 = -\ 61805{,}394 \pm 0{,}009.$$

Zur Probe findet man zunächst aus den linearen Fehlergleichungen (13) $v = a\,dx + b\,dy + l$ die einzelnen Verbesserungen und damit $[pvv]$

Nr.	$a\,dx$	$b\,dy$	l	v	p	pvv
1	− 1,1	− 2,0	+ 3	− 0,1	0,9	0
2	+ 0,4	− 2,9	0	− 2,5	0,9	5,6
3	+ 0,9	− 1,6	+ 3	+ 2,3	0,9	4,8
4	+ 1,0	+ 3,5	− 6	− 1,5	0,75	1,7
$\Sigma =$	+ 1,2	− 3,0	0	− 1,8		12,1
		− 1,8				

und außerdem:

Nr.	(1)	(2)	(3)	(4)
$\varphi_n' =$	120° 35′ 06″	202° 07′ 49″	239° 23′ 21″	318° 50′ 59″
$\pm 180^0$				
$v_n =$	− 0,1	− 2,5	+ 2,3	− 1,5
$\underline{\varphi_n} =$	300° 35′ 05,9″	22 07 46,5	59 23 23,3	138 50 57,5
$y_n =$	+ 4 091,24	+ 5 266,01	+ 5 814,66	+ 5 339,76
$x_n =$	− 61 356,69	− 60 783,43	− 61 234,91	− 62 365,34
$y_n - \underline{y} =$	− 759,177	+ 415,593	+ 964,243	+ 489,343
$x_n - \underline{x} =$	+ 448,704	+ 1 021,964	+ 570,484	− 559,946
$y_n - \underline{y}$	2.88 03 43$_n$	2.61 86 68	2.98 41 87	2.68 96 14
$x_n - \underline{x}$	2.65 19 60	3.00 94 36	2.75 62 43	2.74 81 46$_n$
tg $\underline{\varphi_n}$	0.22 83 83$_n$	9.60 92 32	0.22 79 44	9.94 14 68$_n$
$\underline{\varphi_n} =$	300° 35′ 05,2″	22° 07′ 46,7″	59° 23′ 23,3″	138° 50′ 57,9″

Die Abweichungen zwischen $\underline{\varphi_n} = \varphi_n' + v_n \pm 180^0$ und zwischen $\underline{\varphi_n} = \text{arctg}\,\frac{y_n - \underline{y}}{x_n - \underline{x}}$ steigen hier bis zu 0,7″ an, weil bei der Berechnung der Näherungsrichtungswinkel $(\varphi_n) = \text{arctg}\,\frac{y_n - (y)}{x_n - (x)}$ diese auf ganze Sekunden abgerundet wurden.

§ 84. Gemeinsame Ausgleichung von n Punkten.

Es sollen gegeben sein (s. Fig. 139) die Koordinaten der Punkte (4), (5), (6) und (7) zu $x_4 y_4$, $x_5 y_5$, $x_6 y_6$ und $x_7 y_7$. Gemessen wurden die Richtungen 1, 2, . . ., 15, 16 mit gleichen Gewichten; z. B. durch gleich viele Sätze mit demselben Instrumente.

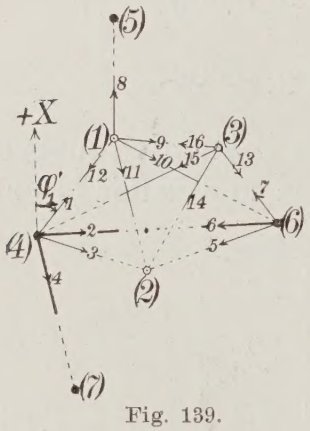


Fig. 139.

Die Koordinaten der Punkte (1), (2) und (3) sollen gleichzeitig ausgeglichen werden, um deren relative Lage möglichst gut zu finden.

Man berechnet zuerst die gut genäherten Koordinaten dieser drei Neupunkte z. B. nach den §§ 76 (und 77) — sie mögen sein $(x_1)(y_1)$; $(x_2)(y_2)$ und $(x_3)(y_3)$ — und hierauf die genäherten Richtungswinkel und Strecken aller von den Neupunkten (1), (2) und (3) ausgehenden Strahlen z. B.

$$\text{tg}\,((1).(2)) = \frac{(y_2) - (y_1)}{(x_2) - (x_1)} \quad \text{und} \quad \overline{(1).(2)} = \frac{(y_2) - (y_1)}{\sin((1).(2))} \overset{\text{oder}}{=} \frac{(x_2) - (x_1)}{\cos((1).(2))}. \quad (1)$$

Da für die in diesem Buche behandelten Rechnungen keine Rücksicht auf die durch die Abbildung auf die Ebene entstehenden Fehler zu nehmen ist, so gilt hier allgemein z. B.

$$((2).(1)) = ((1).(2)) \pm 180^0. \tag{2}$$

Sind: $dx_1\, dy_1$, $dx_2\, dy_2$, $dx_3\, dy_3$ die Verbesserungen der obigen Näherungskoordinaten, dz_1 und dz_3 die Verbesserungen des Richtungswinkels der Nullrichtung der auf den gesuchten Punkten (1) und (3) gemessenen Sätze, dann müssen nach dem in den §§ 82 und 83 Gesagten die linearen Fehlergleichungen die Form haben:

$$v = a\,dz_1 + b\,dz_3 + c\,dx_1 + d\,dy_1 + e\,dx_2 + f\,dy_2 + g\,dx_3 + h\,dy_3 + l, \quad \text{Gewicht } p. \tag{3}$$

In den einzelnen Fehlergleichungen werden stets mehrere Koeffizienten zu Null.

1. Nach § 83, a) erhält man die Richtungswinkel der von den Festpunkten, im Beispiel also von (4) und (6), nach den zu bestimmenden Punkten gehenden beobachteten Strahlen, zunächst vom Punkt (4) aus, zu:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1' = \underline{\psi_0} + 1, \quad \text{Gewicht } p_1 = \frac{m}{m+1} = \frac{2}{3}, \text{ von 4 nach 1,} \\ &\qquad \text{weil durch } m = 2 \text{ feste Strahlen (nach (6)} \\ &\qquad \text{und (7)) orientiert,} \\ &\varphi_3' = \underline{\psi_0} + 3, \quad \text{Gewicht } p_3 = \frac{m}{m+1} = \frac{2}{3}, \text{ von 4 nach 2,} \\ &\qquad \text{weil nach } m = 2 \text{ festen Strahlen orientiert.} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Hierbei ist:

$$\left.\begin{aligned} &\underline{\psi_0} = \frac{\psi_0' + \psi_0''}{2}, \text{ wenn: } \psi_0' = \psi_{4\cdot6} - 2, \text{ und: } \psi_{4\cdot6} = \operatorname{arctg}\frac{y_6 - y_4}{x_6 - x_4}, \\ &\qquad\qquad \psi_0'' = \psi_{4\cdot7} - 4 \qquad\qquad \psi_{4\cdot7} = \operatorname{arctg}\frac{y_7 - y_4}{x_7 - x_4}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Für die von Punkt (6) ausgehenden beobachteten Richtungen wird:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_5' = \underline{\psi_0} + 5\text{:} \quad \text{Gewicht } p_5 = \frac{m}{m+1} = \frac{1}{2}; \text{ von 6 nach 2,} \\ &\varphi_7' = \underline{\psi_0} + 7\text{:} \quad \text{„} \quad p_7 = \frac{m}{m+1} = \frac{1}{2}; \text{ „ 6 „ 3,} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

wobei das jetzige

$$\underline{\psi_0} = \psi_{6\cdot4} - 6 \quad \text{und} \quad \psi_{6\cdot4} = \psi_{4\cdot6} \pm 180^0. \tag{7}$$

Da nun z. B.

$$\underline{\varphi_1}' = \varphi_1' + v_1 = \operatorname{arctg} \frac{y_4 - ((y_1) + dy_1)}{x_4 - ((x_1) + dx_1)} \pm 180^0; \text{ Gewicht } p_1 \text{ (nach § 83)},$$

so folgen die Fehlergleichungen für die von den Festpunkten (4) und (6) nach den Neupunkten gehenden beobachteten Strahlen:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= c_1\,dx_1 + d_1\,dy_1 + l_1; \quad \text{Gewicht } p_1 = \tfrac{2}{3},\\ v_3 &= e_3\,dx_2 + f_3\,dy_2 + l_3; \quad \text{„ } p_3 = \tfrac{2}{3},\\ \text{und}\qquad & \\ v_5 &= e_5\,dx_2 + f_5\,dy_2 + l_5; \quad \text{„ } p_5 = \tfrac{1}{2},\\ v_7 &= g_7\,dx_3 + h_7\,dy_3 + l_7: \quad \text{„ } p_7 = \tfrac{1}{2}, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \frac{\partial v_1}{\partial (x_1)} = + \frac{\sin \varphi_{1\cdot 4}}{4\,.\,1} \cdot \varrho''; \quad d_1 = \frac{\partial v_1}{\partial (y_1)} = - \frac{\cos \varphi_{1\cdot 4}}{4\,.\,1} \cdot \varrho'';\\ l_1 &= \operatorname{arctg} \frac{y_4 - (y_1)}{x_4 - (x_1)} - \{\varphi_1' \pm 180^0\} = ((1).(4)) - \{\varphi_1' \pm 180^0\}\\ e_3 &= \frac{\partial v_3}{\partial (x_2)} = + \frac{\sin \varphi_{2\cdot 4}}{2\,.\,4} \varrho''; \quad f_3 = \frac{\partial v_3}{\partial (y_2)} = - \frac{\cos \varphi_{2\cdot 4}}{2\,.\,4} \varrho'';\\ l_3 &= ((2)\cdot(4)) - \{\varphi_3' \pm 180^0\};\\ e_5 &= + \frac{\sin \varphi_{2\cdot 6}}{2\,.\,6} \varrho; \; f_5 = - \frac{\cos \varphi_{2\cdot 6}}{2\,.\,6} \varrho; \; l_5 = ((2).(6)) - \{\varphi_5' \pm 180^0\};\\ g_7 &= + \frac{\sin \varphi_{3\cdot 6}}{3\,.\,6} \varrho; \; h_7 = - \frac{\cos \varphi_{3\cdot 6}}{3\,.\,6} \varrho; \; l_7 = ((3).(6)) - \{\varphi_7' \pm 180^0\}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

2. Bei den auf den Neupunkten gemessenen Richtungen ist zu unterscheiden zwischen den Richtungen nach Festpunkten und zwischen den Richtungen nach Neupunkten.

Ist (φ_0) der Näherungswert für den Richtungswinkel der Nullrichtung des auf Punkt (1) gemessenen Satzes, dz_1 seine Verbesserung, so ist nach § 82 allgemein:

$$\underline{\varphi_e} = (\varphi_0) + dz_1 + n + v_n = \operatorname{arctg} \frac{y_e - ((y_1) + dy_1)}{x_e - ((x_1) + dx_1)}, \tag{10}$$

wenn $\underline{\varphi_e}$ den ausgeglichenen Richtungswinkel des Strahles von Punkt (1) nach Punkt (e), n die nach (e) beobachtete Richtung und v_n deren Verbesserung vorstellt. Aus dieser Gleichung folgt für unveränderliche Zielpunkte, d. h. y_e und x_e konstant:

$$v_n = \text{arctg}\,\frac{y_e-(y_1)}{x_e-(x_1)} - \{(\varphi_0)+n\} - dz_1 + c_n dx_1 + d_n dy_1 \qquad (11)$$

und für veränderliche Zielpunkte, d. h.

$$\underline{y_e} = (y_e) + dy,$$

$$\underline{x_e} = (x_e) + dx,$$

$$v_n = \text{arctg}\,\frac{(y_e)-(y_1)}{(x_e)-(x_1)} - \{(\varphi_0)+n\} - dz_1 + c_n dx_1 + d_n dy_1 - c_n dx - d_n dy, \qquad (12)$$

weil

$$c_n = \frac{\partial v_n}{\partial (x_1)} = \frac{\sin \varphi_{1\cdot e}}{1\cdot e}\,\varrho'' = -\frac{\partial v_n}{\partial (x_e)}$$

und

$$d_n = \frac{\partial v_n}{\partial (y_1)} = -\frac{\cos \varphi_{1\cdot e}}{1\cdot e}\,\varrho = -\frac{\partial v_n}{\partial (y_e)}. \qquad (13)$$

Für den Neupunkt (1) erhält man deshalb die Fehlergleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
v_8 &= a_8\,dz_1 + c_8\,dx_1 + d_8\,dy_1 + l_8; && \text{Gewicht 1,}\\
v_9 &= a_9\,dz_1 + c_9\,dx_1 + d_9\,dy_1 + g_9\,dx_3 + h_9\,dy_3 + l_9; && \text{Gewicht 1,}\\
v_{10} &= a_{10}dz_1 + c_{10}dx_1 + d_{10}dy_1 + l_{10}; && \text{Gewicht 1,}\\
v_{11} &= a_{11}dz_1 + c_{11}dx_1 + d_{11}dy_1 + e_{11}dx_2 + f_{11}dy_2 + l_{11}; && \text{Gewicht 1,}\\
v_{12} &= a_{12}dz_1 + c_{12}dx_1 + d_{12}dy_1 + l_{12}; && \text{Gewicht 1.}
\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

In diesen Gleichungen sind demnach sämtliche $a = -1$;

außerdem ist $c_9 = -g_9$; $d_9 = -h_9$; $c_{11} = -e_{11}$; $d_{11} = -f_{11}$ (15)

und $l_n = \text{arctg}\,\frac{(y_e)-(y_1)}{(x_e)-(x_1)} - \{(\varphi_0)+n\} = ((1)\,.\,(e)) - \{(\varphi_0)+n\}.$

Für den Neupunkt (3) findet man die Fehlergleichungen in derselben Weise zu:

$$\left.\begin{aligned}
v_{13} &= b_{13}dz_3 + g_{13}dx_3 + h_{13}dy_3 + l_{13}; && \text{Gewicht 1,}\\
v_{14} &= b_{14}dz_3 + g_{14}dx_3 + h_{14}dy_3 + e_{14}dx_2 + f_{14}dy_2 + l_{14}; && \text{Gewicht 1,}\\
v_{15} &= b_{15}dz_3 + g_{15}dx_3 + h_{15}dy_3 + l_{15}; && \text{Gewicht 1,}\\
v_{16} &= b_{16}dz_3 + g_{16}dx_3 + h_{16}dy_3 + c_{16}dx_1 + d_{16}dy_1 + l_{16}; && \text{Gewicht 1,}
\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

worin:

$$\left.\begin{aligned} b_{13} = b_{14} = b_{15} = b_{16} = -1; \quad g_{14} = -e_{14}; \quad h_{14} = -f_{14}; \\ g_{16} = -c_{16} = -c_9; \quad h_{16} = -d_{16} = -d_9, \\ l_n = \operatorname{arctg} \frac{(y_e) - (y_2)}{(x_e) - (x_2)} - \{(\varphi_0') + n\} = ((2).(e)) - \{(\varphi_0') + n\}, \\ g_n = \frac{\partial v_n}{\partial (x_3)} = \frac{\sin \varphi_{3.e}}{3.e} \varrho''; \quad h_n = \frac{\partial v_n}{\partial (y_3)} = -\frac{\cos \varphi_{3.e}}{3.e} \varrho''. \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Aus den zu den Fehlergleichungen (8), (14) und (16) wegen der Bedingung $[pvv]$ = Minimum nach § 67 gehörigen Normalgleichungen folgen die Unbekannten dy_3, dx_3, dy_2, dx_2, dy_1, dx_1, dz_3 und dz_1 und damit die ausgeglichenen Größen

$$\underline{x_1} = (x_1) + dx_1 \quad \text{bis} \quad \underline{\varphi_0} = (\varphi_0) + dz_1.$$

Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit, d. h. einer beobachteten Richtung vom Gewichte 1, ergibt sich, weil 8 Unbekannte aus 13 Fehlergleichungen bestimmt werden, zu

$$\mathfrak{m} = \sqrt{\frac{[pvv]}{13 - 8}}. \quad (18)$$

Nach § 71 findet man die Gewichte $p_{x_1}, p_{y_1}, \ldots, p_{z_1}$ der ausgeglichenen Größen und deshalb deren mittlere Fehler durch

$$m_{x_1} = \frac{\mathfrak{m}}{\sqrt{p_{x_1}}}, \quad \text{usw.} \quad (19)$$

In bezug auf die Zahlenrechnung ist zu bemerken, daß man zweckmäßig zuerst die zu den Fehlergleichungen (8) sich ergebenden Normalgleichungsanteile, hierauf die zu den Gleichungen (14) und dann die zu den Gleichungen (16) folgenden Normalgleichungsanteile berechnet und dann diese Anteile gliedweise addiert, wodurch die acht (bzw. neun, wenn die Gleichung für $[pll]$ mit gerechnet wird) Normalgleichungen erhalten werden. Nach der Anmerkung 1 in § 82 kann man aus den Fehlergleichungen (14) und (16) die unwichtigen Orientierungsunbekannten dz_1 und dz_3 auch vor Aufstellen der Normalgleichungsanteile eliminieren.

Die Proberechnungen führt man sinngemäß wie in §§ 82 und 83 durch. Die in den §§ 82, 83 und 84 behandelten Ausgleichungen können für einen Punkt leicht auf graphisch-mechanischem Wege ausgeführt werden. (Vgl. hierzu: Hohenner, Graphisch-mechanische Ausgleichung trigonometrisch eingeschalteter Punkte. Stuttgart 1904.)

13. Kapitel.

Polygonisierung oder Polygonierung.

Über die Anlage und Messung der Polygonzüge, sowie über die Bezeichnung der Polygonpunkte wurde bereits im 8. Kapitel Einiges gesagt. Ebenfalls ist dort bereits die Berechnung und Ausgleichung an- und abgeschlossener (und doppelt orientierter), sowie freier Züge behandelt; es ist deshalb hier noch zu zeigen, wie Polygonzüge an unzugängliche trigonometrische Punkte angeschlossen und wie sog. Knotenpunkte (§ 75) berechnet werden.

§ 85. Anschluß des Zuges an einen unzugänglichen trigonometrischen Punkt (Hochpunkt).

Der Polygonzug führt nahe bei dem gegebenen Punkte unzugänglichen (II) vorbei wie in Fig. 140 gezeichnet.

Durch Annahme des Hilfspunktes (H), Messung der Seite $s = \overline{3.H}$ (wie einer Polygonseite) und Messung der Winkel $\gamma_1 \gamma_2$ (gelegentlich der Polygonwinkelmessung) kann die Seite $s_{II} = \frac{s \cdot \sin \gamma_2}{\sin(\gamma_1 + \gamma_2)}$ und hierauf der von (I) nach (II) gehende Zug berechnet werden. Ein Anschlußwinkelwiderspruch w_β kommt hierbei nicht zum Vorschein und es sind nur die am Endpunkte (II) auftretenden Koordinatenwidersprüche w_y und w_x nach § 52 zu verteilen.

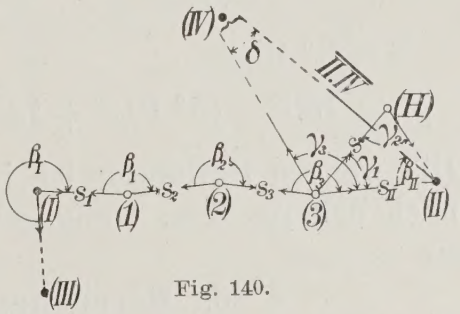


Fig. 140.

Ist aber von (3) oder dem Hilfspunkte (H) aus ein weiterer (entfernter) gegebener Punkt (IV) sichtbar, dann kann durch Messung z. B. des Winkels $\gamma_3 = \text{IV.3.II}$, der Abschlußwinkel $\beta_{II} = 3.\text{II.IV}$ gefunden werden, so daß die Berechnung und Ausgleichung eines an- und abgeschlossenen, doppelt orientierten Zuges möglich wird. Unter Bezugnahme auf die Fig. 140 findet man:

$$\beta_{II} = 180^0 - (\gamma_3 + \delta),$$

wobei:

$$\sin \delta = \frac{\sin \gamma_3 \cdot s_{II}}{\overline{II.IV}}; \quad \operatorname{tg}(II.IV) = \frac{y_{IV} - y_{II}}{x_{IV} - x_{II}},$$

und

$$\overline{II.IV} = \frac{y_{IV} - y_{II}}{\sin(II.IV)} \overset{\text{oder}}{=} \frac{x_{IV} - x_{II}}{\cos(II.IV)}.$$

Zahlenbeispiel: Bei der Stadtvermessung von Kufstein wurde gefunden (vgl. obige Fig. 140 und in Fig. 124 S. 171 den Zug von (I) = *K*. 23 nach (II) = *G*):

Standpunkt	Zielpunkt	Richtung	Seite
(I)	(III)	0° 0,0′	·
	(1)	264 37,7	51,44
(1)	(I)	0 0,0	·
	(2)	190 32,9	55,87
(2)	(1)	0 0,0	·
	(3)	174 44,1	115,10
(3)	(2)	0 0,0	·
	(IV)	49 48,7	·
	H	104 15,3	197,00
	(II)	175 48,4	·
H	(II)	0° 0,0	·
	(3)	44 16,9	·

Punkt	*x*	*y*
(I)	− 61 529,25	+ 4 991,55
(III)	− 61 613,63	+ 4 959,99
(II)	− 61 649,79	+ 5 346,13
(IV)	− 59 692,06	+ 4 510,68

Man berechnet: $\operatorname{tg}(\mathrm{II}\cdot\mathrm{IV}) = \dfrac{-835{,}45}{+1957{,}73}$.

$y_{IV} - y_{II}$	2.92 192$_n$
$E \frac{\sin}{\cos}(\mathrm{II.IV})$	0.03 633
$x_{IV} - x_{II}$	3.29 175
$\operatorname{tg}(\mathrm{II.IV})$	9.63 017$_n$; (II.IV) = 336° 53,4′
$\overline{\mathrm{II.IV}}$	3.32 808

$$s_{II} = \frac{\overline{3.H} \cdot \sin 44^\circ 16{,}9'}{\sin 64^\circ 10{,}0'} = 152{,}82$$

$$\sin\delta = \frac{\sin 125^\circ 59{,}7' \cdot s_{II}}{\overline{\mathrm{II.IV}}}$$

$$\delta = 3^\circ 19{,}8'$$

$$\beta_{II} = 180^\circ - (3^\circ 19{,}8' + 125^\circ 59{,}7') = 50^\circ 40{,}5'$$

197,00	2.29 447
$\sin 44^\circ 16{,}9'$	9.84 397
$1 : \sin 64^\circ 10{,}0'$	0.04 573
s_{II}	2.18 417
$1 : \overline{\mathrm{II.IV}}$	6.67 192
$\sin 125^\circ 59{,}7'$	9.90 797
$\sin\delta$	8.76 406

Die weitere Rechnung ist im folgenden Formulare (siehe Seite 207) nach den im Kap. 8 angegebenen Regeln ausgeführt.

§ 86. Berechnung verknoteter Polygonzüge.

Wenn sich zwei Polygonzüge (I) nach (II) und (III) nach (IV) (Fig. 141) derart in einem Punkte (3) schneiden, daß dieser Knotenpunkt (3) nahezu in der Zugmitte zwischen (I) und (II) einerseits und zwischen (III) und (IV) andererseits liegt, dann berechnet man mit Vorteil zuerst die ausgeglichenen Koordinaten des Knotenpunktes (3) aus den gegebenen vier Punkten (I), (II), (III) und (IV) und hierauf die einzelnen Züge (I).(3), (II).(3), (III).(3) und

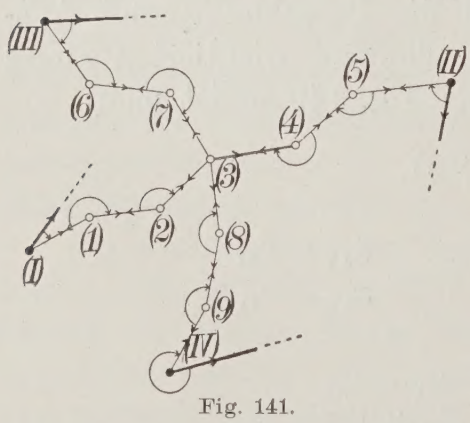


Fig. 141.

Polygonzug von (I) = *P*. *P*. 23 bis (II) = *G*.

Seite s Punkt	Richtungswinkel α Polygonwinkel β $d\beta$ ° ′	log cos α log s log sin α	log s · cos α log s · sin α	$s \cdot \cos\alpha$ dx x	$s \cdot \sin\alpha$ dy y	$y_{III} = +4\ 959{,}99$ $y_I = +4\ 991{,}55$ $y_{III} - y_I = -31{,}56$
(I . III) =	200 30,6	(nach *P.*	*P.* 22)	— , —	— , —	$x_{III} = -61\ 613{,}63$ $x_I = -61\ 529{,}25$
	264 37,7					$x_{III} - x_I = -84{,}38$
I = *P*. *P*. 26	— 0,2			−61 529,25	+4 991,55	
I . 1 = 51,44	105 08,1	9.41 679$_n$	1.12 809$_n$	— 13,43	+ 49,66	$y_{III} - y_I$ | 1.49 914$_n$
	190 32,9	1.71 130		— 1	— 0	$x_{III} - x_I$ | 1.92 624$_n$
1 = *P*. *P*. 56	— 0,2	9.98 467	1.69 597	−61 542,69	+5 041,21	tg (I . III) | 9.57 290
55,87	115 40,8	9.63 684$_n$	1.38 402$_n$	— 24,21	+ 50,35	(I . III) = 200° 30,6′
	174 44,1	1.74 718		— 1	— 1	y_{IV} =
2 = *P*. *P*. 57	— 0,2	9.95 483	1.70 201	−61 566,91	+5 091,55	y_{II} =
115,10	110 24,7	9.54 253$_n$	1.60 361$_n$	— 40,14	+ 107,87	$y_{IV} - y_{II}$ =
	175 48,4	2.06 108		— 3	— 1	x_{IV} =
3 = *P*. *P*. 58	— 0,1	9.97 183	2.03 291	−61 607,08	+5 199,41	x_{II} =
152,82	106 13,0	9.44 602$_n$	1.63 019$_n$	— 42,68	+ 146,74	$x_{IV} - x_{II}$ =
	50 40,5	2.18 417		— 3	— 2	$y_{IV} - y_{II}$ |
II = *G*	— 0,1	9.98 237	2.16 654	−61 649,79	+5 346,13	$x_{IV} - x_{II}$ |
(II . IV) =	336 53,4	(Soll, nach	Thierberg)	— , —	— , —	tg (II . IV) |
	1056 54,2	(Ist)				(II . IV) = 336° 53,4′
w_β =	+ 0,8			— ,	— ,	$\Sigma(+s\cos\alpha) = +0{,}00$
d_β =	— 0,16			— ,	— ,	$\Sigma(-s\cos\alpha) = -120{,}46$
				—	—	$\Sigma s \cdot \cos\alpha \overset{ist}{=} -120{,}46$
	—			— ,	— ,	$\Sigma s \cdot \cos\alpha \overset{soll}{=} -120{,}54$
				— ,	— ,	Verbesserung = $-w_x$ = −0,08
				—	—	$\Sigma(+s\sin\alpha) = +354{,}62$
	—			— ,	— ,	$\Sigma(-s\sin\alpha) = -0{,}00$
				— ,	— ,	$\Sigma s \cdot \sin\alpha \overset{ist}{=} +354{,}62$
				—	—	$\Sigma s \cdot \sin\alpha \overset{soll}{=} +354{,}58$
	—			— ,	— ,	Verbesserung = $-w_y$ = −0,04

(IV).(3) in der bisherigen Weise als an- und abgeschlossene (doppelt orientierte) Züge.

Der einzuschlagende Rechnungsweg ist hierbei folgender:

1. Berechnung des Richtungswinkels einer vom Knotenpunkt ausgehenden Seite, z. B. von (3.4). Man erhält für diesen Richtungswinkel nach § 52 aus den Zugteilen (I) nach (3), (II) nach (4) bzw. (3), (III) nach (3) und (IV) nach (3) vier Werte α_1, α_2, α_3 und α_4, deren Gewichte p als Reziprokzahlen der Anzahl der zur Ableitung benutzten gemessenen Winkel, also $p_1 = \frac{1}{4}$; $p_2 = \frac{1}{3}$; $p_3 = \frac{1}{4}$; $p_4 = \frac{1}{4}$ genommen werden dürfen, so daß nach § 67 (Anmerkung)

$$\underline{(3.4)} = \frac{p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + p_3\alpha_3 + p_4\alpha_4}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4} = \frac{[p\alpha]}{[p]}.$$

2. Die in den einzelnen Zügen (I) nach (3) usf. auftretenden Winkelwidersprüche w_β werden wie in § 52 verteilt, und hierauf werden mit den abgeglichenen Polygonwinkeln die Richtungswinkel der einzelnen Zugseiten und mit diesen und den Seitenlängen die Koordinatenunterschiede aufeinanderfolgender Punkte berechnet.

3. Mit diesen Koordinatenunterschieden findet man von den gegebenen Punkten (I), (II), (III) und (IV) ausgehend für (3) vier verschiedene Koordinatenwerte $x_3^{(1)}\ y_3^{(1)} \cdots x_3^{(4)}\ y_3^{(4)}$, aus denen die ausgeglichenen Werte durch $\underline{x_3} = \frac{[px]}{[p]}$ und $\underline{y_3} = \frac{[py]}{[p]}$ folgen, wobei die Gewichte p als Reziprokzahlen der Zuglängen von (I) bis (3), (II) bis (3) usw. genommen werden dürfen.

4. Die hierauf in den einzelnen Zügen zwischen den Ausgangspunkten und dem Knotenpunkte (3) sich zeigenden Koordinatenwidersprüche w_x und w_y werden dann nach § 52 verteilt.

§ 87. Messung und Berechnung von Bussolenzügen.

Mit der Bussole werden unmittelbar die Richtungswinkel der einzelnen Zugseiten auf etwa $\pm\ 0{,}1^0$ gemessen (4. Kap.); die Bussolenablesungen sind im Vergleich zu den Kreisablesungen auf dem Theodolit also erheblich ungenauer. Damit die algebraische Summe der einzelnen (+ und −) Richtungswinkelfehler einen verhältnismäßig kleinen linearen Schlußfehler des Zuges ergibt, nimmt man in den Bussolenzügen im allgemeinen möglichst kurze Seiten (bei denen ein Winkelfehler nur eine kleine Querverschiebung des Endpunktes der Seite verursacht; deren algebraische Summe gibt dann den von den Winkelfehlern herrührenden, verhältnismäßig kleinen Teilbetrag des

linearen Schlußfehlers nach § 4) von etwa 10 ÷ 70 m, höchstens 100 m, Länge. Die Form des Zuges ist beliebig und da sofort die Richtungswinkel der einzelnen Seiten gemessen werden, so schaden kleine Zentrierungsfehler (im Gegensatz zu den Theodolitzügen) nicht viel. In der Regel werden Bussolenzüge nur für untergeordnete Zwecke gemessen, — für Eigentumsvermessungen (über Tage) dürfen sie nicht verwendet werden —; wenn keine örtlichen Ablenkungen der Magnetnadel zu befürchten sind, mißt man mit sog. Sprungständen (s. § 44).

Es sei gegeben (Fig. 142) $x_I y_I$, $x_{III} y_{III}$. Der Bussolenzug (I), (1), (2), (3), (4) ist mit Sprungständen zu messen und dann sollen die Koordinaten der Punkte (1) . . . (4) berechnet werden.

Die Punkte (1), (2) . · · können mit Pflöcken u. dgl. bezeichnet werden. Zur Messung werde eine berichtigte Vollkreisbussole (deren Zielfernrohr mit Distanzmessereinrichtung versehen sein kann) verwendet (§ 30). Zuerst wird nach § 31 die (etwas veränderliche) Korrektion $k = -(\delta + i)$ der Nadelablesungen (Mittelwert aus Nord- und Südendeablesung) bestimmt, um später aus diesen die Richtungswinkel berechnen zu können. Zu diesem Zwecke wird die Bussole in der Geraden (I. III) (Orientierungslinie) aufgestellt, nach genügender Lotrechtstellung der Umdrehachse die Arretierung der Nadel gelöst, Punkt (III) (mehrmals) angezielt und (mehrmals) die Nadel abgelesen $= N$. Dann ist:

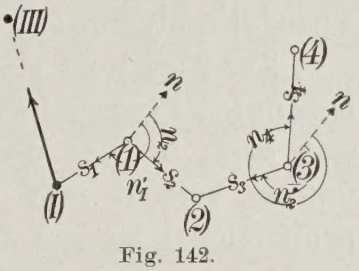


Fig. 142.

$$(\mathrm{I.III}) = N + k \text{ folglich } k = (\mathrm{I.III}) - N, \text{ wobei } \operatorname{tg}(\mathrm{I.III}) = \frac{y_{III} - y_I}{x_{III} - x_I}. \quad (1)$$

Nach Arretierung der Nadel wird hierauf die Bussole nach Punkt (1) gebracht, dort zentriert usw., hierauf (I) angezielt und an der Nadel abgelesen (Nord und Süd) n_I', dann (2) angezielt und abgelesen n_2. Die Seiten s_1, s_2 werden entweder je einmal mit dem Meßband, Latten oder mit dem entfernungsmessenden Fernrohr (an der Bussole) gemessen.

Nach Arretierung der Nadel wird die Bussole nach (3) gebracht (also (2) übersprungen), worauf in der gleichen Weise wie vorher die Winkel n_2' und n_4 sowie s_3 und s_4 gemessen werden usw.

Es ist zu empfehlen nach Beendigung der Zugmessung die Korrektion k ein zweites Mal zu bestimmen um weiterhin den Mittelwert beider zu benutzen (vgl. § 29). (Die Magnetlagen an verschiedenen Stellen des Zuges dürfen als parallel angenommen werden.)

Die Richtungswinkel der einzelnen Zugseiten werden:

$$\left.\begin{aligned} (\mathrm{I}.1) &= \alpha_1 = n_{\mathrm{I}}' \pm 180^0 + k \\ (1.2) &= \alpha_2 = n_2 + k \\ (2.3) &= \alpha_3 = n_2' \pm 180^0 + k \\ (3.4) &= \alpha_4 = n_4 + k \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Demnach:

$$\left.\begin{aligned} x_1 = x_{\mathrm{I}} + s_1 \cos \alpha_1; \quad x_2 &= x_1 + s_2 \cos \alpha_2; \\ x_3 = x_2 + s_3 \cos \alpha_3; \quad x_4 &= x_3 + s_4 \cos \alpha_4 \\ y_1 = y_{\mathrm{I}} + s_1 \sin \alpha_1; \quad y_2 &= y_1 + s_2 \sin \alpha_2; \\ y_3 = y_2 + s_3 \sin \alpha_3; \quad y_4 &= y_3 + s_4 \sin \alpha_4 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Die Berechnung erfolgt im gleichen Formular, Seite 125, wie die des Theodolitpolygonzugs etwa mit 4stelligen Logarithmen.

Zur Erzielung einer Probe ist stets anzustreben den Zug auf einem bekannten Punkte (ev. auf dem Ausgangspunkt) enden zu lassen. Die sich dann bei der Berechnung zeigenden Koordinatenwidersprüche w_x und w_y verteilt man auf die einzelnen Koordinatenunterschiede etwa proportional zu den Zugseitenlängen.

14. Kapitel.

Kleine selbständige Triangulierung.

Solche Triangulierungen liefern die Grundlagen zur Bestimmung von Richtung und Länge von Tunnelachsen sowie für die Vermessung von Fluß- und Stadtgebieten, wenn an keine Landestriangulierung angeschlossen werden kann. Hierbei müssen dieselben Arbeiten wie bei einer Landestriangulierung ausgeführt werden, nur kommen dem Zwecke entsprechende einfachere Apparate zur Verwendung. Handelt es sich z. B. um die Bestimmung einer Tunnelachse, dann verbindet man die zwei Achsendpunkte durch möglichst wenige Dreiecke, während man zur Aufnahme des Gebietes einiger Gemarkungen dieses, wenn möglich, zunächst mit einem oder einigen großen Dreiecken überzieht und dieses Netz dann weiterhin verdichtet. Die Schärfe der Winkelmessung in den Dreiecken muß sich nach der Seitenlänge und dem Zwecke der Triangulierung richten; die Längen der Dreiecksseiten werden aus einer in günstigem Gelände gemessenen Grundlinie (als welche auch eine Dreiecksseite dienen kann) berechnet. Im folgenden werde angenommen, daß die Längen auf etwa $\frac{1}{30000}$ ihrer Größe richtig sein sollen und daß das Netz sich nicht wesentlich über 20 km ausdehne; dann reicht die Messung einer auf günstigem

Gelände ausgewählten Grundlinie von 1 bis 2 km Länge mit einfachem Werkzeuge aus, wie z. B. mit 5 oder 7 m langen Meßlatten, die ev. mit abgerundeten Stahlendschneiden versehen sind.

§ 88. Grundlinienmessung und trigonometrische Vergrößerung der Grundlinie.

Man wählt den Ort für die etwa 1 ÷ 2 km lange Grundlinie so aus, daß diese auf möglichst ebenem festen Boden gemessen werden kann. Es wurde schon in § 35 erwähnt, daß man mit gut abgeglichenen 5 m-Meßlatten eine Strecke von 1 km Länge durch eine Messung auf etwa $\pm \frac{1}{40000}$ d. L. richtig erhält; das Mittel aus vier Messungen wird also auf $\frac{1}{80000}$ d. L. sicher.

Auf festem ebenem Boden mit nicht über 4° Neigung findet man aber eine 1 km lange Linie durch eine Messung leicht auf etwa $\frac{1}{100000}$ d. L. genau mit einem Paar 5 oder 7 m langen kräftigen hölzernen Meßlatten mit schwach abgerundeten stählernen Endschneiden, einem Neigungsmesser mit nicht zu kleiner Aufsatzlinie und einem Komparator auf folgende Weise:

Die Grundlinie wird mit Hilfe des Theodoliten abgesteckt, so daß in Abständen von etwa 50 m Pflöcke nahezu bodengleich geschlagen und auf diesen Nägel eingewiesen werden. Über je zwei dieser Nägel wird eine Schnur gespannt, längs deren die Meßlatten gelegt werden.

Mit Normalmaßstäben wird eine Vergleichslänge (Komparatorlänge von nahezu 5 oder 7 m) durch zwei bis viermalige Messung auf wenige Hundertelmillimeter gemessen und damit unmittelbar darauf die Länge der Meßlatten bestimmt (s. § 34).

Bei der unmittelbar anschließenden Grundlinienmessung werden die Meßlatten längs der Schnur vorsichtig aneinander gereiht und dabei wird die Neigung γ jeder Latte auf einige Minuten abgelesen und notiert. Die Endmaße werden mit einem geeigneten Millimetermaßstab ermittelt. Diese Messung erfolgt mindestens hin und zurück. Nach Beendigung der Grundlinienmessung (ev. auch noch während der Messung) erfolgt die wiederholte Vergleichung der Meßlatten mit der Komparatorlänge, die nötigenfalls neu zu bestimmen ist.

Die Länge der Grundlinie ergibt sich als Summe der Meßlattenlagen, + dem Endmaße, ± Korrektion wegen unrichtiger Länge der Lattenmeter, − Reduktion auf den Messungshorizont $\left(r = l\,2 \cdot \sin^2 \frac{\gamma}{2}\right)$, − der eventuellen Reduktion auf den Meereshorizont, im Falle alle aus der Grundlinie berechneten Längen auf die Meeresfläche bezogen sein sollen.

Es empfiehlt sich, die Reduktionen auf den Messungshorizont, etwa mittels einer kleinen anzufertigenden Tafel bis auf 0,01 mm zu berechnen.

Ist g_h die Länge der Grundlinie in der auf mehrere Meter bekannten Höhe h über der Meeresfläche, R der Krümmungsradius der Meeresfläche und g_0 die auf diese reduzierte Grundlinienlänge, dann ist: $\frac{g_0}{g_h} = \frac{R}{R+h}$, folglich

$$g_0 = g_h \cdot \frac{R}{R+h} \approx g_h - g_h \cdot \frac{h}{R}.$$

Für R darf meist hinreichend genau 6370000 m genommen werden.

Zur Erreichung noch größerer Schärfe in der Längenmessung auf ziemlich unebenem Boden verwendet man lange Drähte (oder Bänder) aus Invar. (s. § 36).

Aus dieser Grundlinie g_0 wird eine benachbarte Dreiecksseite von etwa der 3 ÷ 4fachen Seitenlänge trigonometrisch berechnet, indem beide durch ein zweckmäßig rhombisches oder halbrhombisches Netz verbunden werden (siehe auch Fig. 129; ev. kann diese Vergrößerung ein zweites Mal erfolgen).

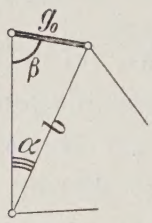


Fig. 143a.

Fig. 143b.

Damit hierbei die unvermeidlichen Winkelmessungsfehler möglichst kleine Längenfehler der abgeleiteten Dreiecksseiten verursachen, müssen die in den Fig. 143a und b dreifach bezeichneten Winkel erheblich genauer gemessen werden als die andern. Denn wenn in Fig. 143a z. B.

$$g_0 = 1000 \text{ m}; \ \beta \approx 89^0\,0'; \ \alpha \approx 14^0\,28'$$

so folgt:

$$b = \frac{g_0}{\sin \alpha} \cdot \sin \beta \sim 4002, \ \ldots m. \qquad (1)$$

Besitzt g_0 den mittleren Fehler m_g, α den mittleren Fehler m_α, β den mittleren Fehler m_β, dann ist zunächst für bestimmte Fehler (vgl. § 64)

$$db = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} dg - \frac{g_0 \sin \beta}{\sin^2 \alpha} \cos \alpha \cdot d\alpha + \frac{g_0}{\sin \alpha} \cdot \cos \beta d\beta$$

und folglich nach Übergang zu mittleren Fehlern

$$m_b^2 = \left(\frac{b}{g_0}\right)^2 \cdot m_g^2 + (b \cdot \operatorname{ctg} \alpha)^2 \cdot m_\alpha^2 + (b \cdot \operatorname{ctg} \beta)^2 m_\beta^2. \qquad (2)$$

Ist z. B. $m_\alpha = m_\beta = \pm 10''$, so folgt aus Gleichung (2) der durch die Winkelfehler verursachte mittlere Fehler der Seite b:

$$m_b^2 = (4002 \cdot 4{,}93)^2 \cdot \left(\frac{10''}{206265''}\right)^2 + (4002 \cdot 0{,}02)^2 \cdot \left(\frac{10''}{206265''}\right)^2 =$$

$$= 0{,}959^2 + 0{,}0039^2.$$

Der gleiche Winkelfehler von 10″ verursacht demnach bei α einen Längenfehler von etwa 1 m, bei β einen solchen von 4 mm in der Seite b. Man sagt deshalb, α ist für die Bestimmung von b maßgebender Winkel und er muß deshalb sehr genau, also öfter als β, gemessen werden.

Am einfachsten mißt man die einzelnen Winkel so oft, daß

$$m_\alpha \operatorname{ctg} \alpha = m_\beta \operatorname{ctg} \beta = K. \tag{3}$$

Will man z. B. in der Seite b unseres Beispiels durch die Winkelmeßfehler den mittleren Längenfehler von $\pm$ 0,04 m verursachen lassen, dann ist nach Gleichung (2):

$$0{,}04^2 = \left(\frac{b}{\varrho''}\right)^2 (m_\alpha^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha + m_\beta^2 \cdot \operatorname{ctg}^2 \beta) = \left(\frac{b}{\varrho}\right)^2 \cdot 2 \cdot K^2. \tag{4}$$

Demnach ist:

$$K = \frac{0{,}04 \cdot \varrho}{b \cdot \sqrt{2}}. \tag{5}$$

Durch Einsetzen der Zahlen wird:

$$K = \frac{0{,}04 \cdot 206265}{4002 \cdot 1{,}414} = 1{,}46.$$

Demnach aus (3):

$$m_\alpha = \frac{K}{\operatorname{ctg} \alpha} = \frac{1{,}46}{4{,}93} = \pm 0{,}3''; \quad m_\beta = \frac{1{,}46}{0{,}02} = \pm 73''.$$

Es müßte demnach der Winkel α sehr genau, etwa durch 10fache Repetition (des Winkels und seines Ergänzungswinkels) mit passenden Theodoliten gemessen werden. Man findet auch leicht, daß gleichzeitig mit der Vergrößerungszahl der Grundlinie die notwendige Meßschärfe in den maßgebenden Winkeln abnimmt und daß im rhombischen Netze, Fig. 143 b, bei der gleichen Vergrößerung verhältnismäßig schwächere Theodolite zur Messung der maßgebenden Winkel ausreichen.

§ 89. **Zahlenbeispiel.**

Zur Bestimmung der Achse des Gotthardtunnels wurden von Prof. Dr. Koppe[1]) die beiden Achsenendpunkte Göschenen = (I) und Airolo = (VI) durch ein Dreiecksnetz verbunden, von dem ein Teil in

1) Zeitschrift für Vermessungswesen. Jahrgang 1875.

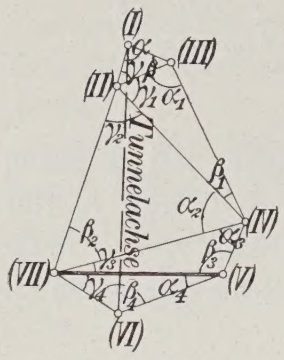


Fig. 144.

der Fig. 144 gezeichnet ist. (Die Zielung von (II) nach (III) konnte wegen Geländehindernissen nicht gemessen werden; sie ist hier als gemessen angenommen.) Die angegebenen Punkte sind (II) = Bätz; (III) = Stock; (IV) = Borel; (V) = Stabbiello; (VII) = Fibbia. Auf jedem Punkte wurden mit einem Theodolit mit 4 Nonien von 10″ Angabe 20 vollständige Richtungssätze gemessen.

Aus einer gemessenen Grundlinie wurde abgeleitet:

$$\log \overline{\text{V.VII}} = 3.999\,2293.$$

Die als Differenzen der entsprechenden gemessenen Richtungen entstehenden gemessenen Winkel sind hier sämtlich als gleich genau angenommen und zwar:

Gemessene Winkel	Verbesserte Winkel	Gemessene Winkel	Verbesserte Winkel
$(\alpha) = 80^0\ 24'\ 53{,}3''$	54,1″	$(\alpha_1) = 90^0\ 24'\ 57{,}3''$	58,0″
$(\beta) = 48\ 19\ 31{,}5$	32,4	$(\beta_1) = 18\ 11\ 12{,}1$	12,8
$(\gamma) = 51\ 15\ 32{,}6$	33,5	$(\gamma_1) = 71\ 23\ 48{,}4$	49,2
$\Sigma = 179\ 59\ 57{,}4$	60,0	$179\ 59\ 57{,}8$	60,0
$(\alpha_2) = 61\ 42\ 06{,}2$	07,8	$(\alpha_3) = 50\ 18\ 22{,}5$	22,3
$(\beta_2) = 56\ 13\ 11{,}5$	13,0	$(\beta_3) = 115\ 22\ 30{,}4$	30,2
$(\gamma_2) = 62\ 04\ 37{,}6$	39,2	$(\gamma_3) = 14\ 29\ 07{,}7$	07,5
$\Sigma = 179\ 59\ 55{,}3$	60,0	$180\ 00\ 00{,}6$	00,0
$(\alpha_4) = 20\ 18\ 04{,}7$	04,7		
$(\beta_4) = 129\ 06\ 52{,}5$	52,4		
$(\gamma_4) = 30\ 35\ 02{,}9$	02,9		
$\Sigma = 180\ 00\ 00{,}1$	00,0		

Obwohl der sphärische Exzeß des Dreiecks II.IV.VII schon 0,3″ beträgt, darf die Rechnung wie in der Ebene z. B. nach einer der folgenden zwei Arten geführt werden.

I. a) Ausgleichung der im Netze auftretenden Widersprüche nach der Methode der kl. Quadrate. Im vorliegenden Falle besteht nach § 72 die Ausgleichung lediglich in der gleichmäßigen Verteilung der Dreieckswinkelwidersprüche auf die einzelnen gemessenen Winkel, weil von irgendeiner Seite ausgehend die übrigen Dreiecksseiten nur in einer Reihenfolge berechnet werden können. Durch diese Ausgleichung sind die oben beigeschriebenen, verbesserten oder ausgeglichenen Winkel erhalten worden.

b) Mit diesen und der gegebenen Seite $\overline{\text{V . VII}}$ werden durch fortgesetzte Anwendung des Sinussatzes alle Dreiecksseiten berechnet.

c) Nach Annahme eines Koordinatensystems, dessen x Achse nahezu in der Achsenrichtung liegt, z. B. (VI) als Ursprung und $(\text{VI . VII}) = 300^0\,0'\,0{,}0''$, werden die Koordinaten aller Dreieckspunkte (mit Probe) durch Berechnung des Polygonzuges VI, V, IV, III, I, II, VII, VI gefunden.

d) Aus den Koordinaten entsprechender Punkte können dann die gesuchten Strecken und Winkel berechnet werden z. B.

$$\sphericalangle\,\text{VII . VI . I} = (\text{VI . I}) - (\text{VI . VII})$$

$$\sphericalangle\,\text{III . I . VI} = (\text{I . VI}) - (\text{I . III})$$

$$\operatorname{tg}(\text{VI . I}) = \frac{y_\text{I} - y_\text{VI}}{x_\text{I} - x_\text{VI}};\quad \overline{\text{VI . I}} = \frac{y_\text{I} - y_\text{VI}}{\sin(\text{VI . I})} \overset{\text{oder}}{=} \frac{x_\text{I} - x_\text{VI}}{\cos(\text{VI . I})} \text{ usf.}$$

Die Zahlenrechnung ist so ausführlich gegeben, daß eine weitere Erläuterung nicht nötig ist.

b)

$\overline{\text{VI . VII}}$	3.649 7069	$\overline{\text{II . VII}}$	4.068 0540
$\sin \alpha_4$	9.540 2756	$\overline{\text{II . IV}}$	4.043 0227
$\overline{\text{V . VII}}$	3.999 2293	$E \sin \alpha_1$	0.000 0115
$E \sin \beta_4$	0.110 2020	$\sin \gamma_1$	9.976 6945
$\sin \gamma_4$	9.706 5498	$\sin \beta_1$	9.494 3181
$\overline{\text{V . VI}}$	3.815 9811	$\overline{\text{III . IV}}$	4.019 7287
$\overline{\text{IV . V}}$	3.511 2104	$\overline{\text{II . III}}$	3.537 3523
$\sin \gamma_3$	9.398 1720	$E \sin \alpha$	0.006 1056
$\overline{\text{V . VII}}$	3.999 2293	$\sin \beta$	9.873 2835
$E \sin \alpha_3$	0.113 8091	$\sin \gamma$	9.892 0869
$\sin \beta_3$	9.956 5356	$\overline{\text{I . II}}$	3.416 7414
$\overline{\text{IV . VII}}$	4.069 5740	$\overline{\text{I . III}}$	3.435 5448
$E \sin \gamma_2$	0.053 7530		
$\sin \alpha_2$	9.994 7270		
$\sin \beta_2$	9.919 6957		

c)

Seite s Punkt	Richtungswinkel α Polygonwinkel β	$\log\cos\alpha$ $\log s$ $\log\sin\alpha$	$\log s\cos\alpha$ $\log s\sin\alpha$	$s\cos\alpha$ dx x	$s\sin\alpha$ dy y
(VI . VII) =	300° 00′ 00,0″				
VI	129 06 52,4			0,000	0,000
	69 06 52,4	9.552 0604	3.368 0415	+ 2 333,681	+ 6 115,966
	135 30 34,9	3.815 9811			
V		9.970 4840	3.786 4651	+ 2 333,681	+ 6 115,966
	24 37 27,3	9.958 5925	3.469 8029	+ 2 949,866	+ 1 352,066
	130 11 42,9	3.511 2104			
IV		9.619 7876	3.130 9980	+ 5 283,547	+ 7 468,032
	334 49 10,2	9.956 6351	3.976 3638	+ 9 470,302	− 4 452,449
	138 44 30,4	4.019 7287			
III		$9.628\ 8703_n$	$3.648\ 5990_n$	+ 14 753,849	+ 3 015,583
	293 33 40,6	9.601 7664	3.037 3112	+ 1 089,711	− 2 498,851
	80 24 54,1	3.435 5448			
I		$9.962\ 1955_n$	$3.397\ 7403_n$	+ 15 843,560	+ 516,732
	193 58 34,7	$9.986\ 9489_n$	$3.403\ 6903_n$	− 2 533,322	− 630,515
	184 44 01,9	3.416 7414			
II		$9.382\ 9542_n$	$2.799\ 6956_n$	+ 13 310,238	− 113,783
	198 42 36,6	$9.976\ 4203_n$	$4.044\ 4743_n$	− 11 078,329	− 3 752,000
	101 17 23,4	4.068 0540		+ 2	
VII		$9.506\ 2088_n$	$3.574\ 2628_n$	+ 2 231,911	− 3 865,783
	120 00 00,0	$9.698\ 9700_n$	$3.348\ 6769_n$	− 2 231,911	+ 3 865,783
		3.649 7069			
VI		9.937 5306	3.587 2375	0,000	0,000

d)

$$\operatorname{tg}(\mathrm{VI}\,.\,\mathrm{I}) = \frac{+516{,}732}{+15\,843{,}560}$$

(VI . I) = 1° 52′ 04,9″

$\overline{\mathrm{VI}\,.\,\mathrm{I}} = 15\ 851{,}98_2$

(VI . VII) = 300° 00′ 00,0″

∢ VII . VI . I = 61° 52′ 04,9″

(I . III) = 113° 33′ 40,6″

(I . VI) = 181 52 04,9

∢ III . I . VI = 68° 18′ 24,3″

+ 516,732	2.713 2654
$E\,\frac{\sin}{\cos}$ (VI . I)	0.000 2309
+ 15 843,560	4.199 8527
tg (VI . I)	8.513 4127
$\overline{\mathrm{VI\ I}}$	4.200 0836

II. Unter Vermittlung der Koordinaten der Dreieckspunkte kann die Ausgleichung nach § 84 in folgender Weise gemacht werden.

a) Man nimmt die x-Achsenrichtung eines Koordinatensystems ungefähr in der Mitte der Längsrichtung des Netzes an und berechnet die Koordinaten der Punkte (V) und (VII) derart, daß die gegebene Seite $\overline{\mathrm{V}\,.\,\mathrm{VII}}$ erhalten bleibt. Im Anschlusse an diese beiden Festpunkte werden mit den gemessenen Winkeln z. B. nach § 76 die Näherungskoordinaten aller weiteren Punkte berechnet; die Ausgleichung erfolgt nach dem in § 84 behandelten Verfahren.

VIII. Abschnitt.

Abstecken von Geraden und Kurven.

§ 90. Abstecken von Geraden und Winkeln mit Hilfe des Theodoliten.

Das scharfe Abstecken der Zwischenpunkte langer Geraden (deren Endpunkte gegeben sind) erfolgt mit dem Theodolit durch Einweisen, wenn die Gerade von einem Endpunkte aus übersehen werden kann. Der berichtigte Theodolit wird in einem der beiden Punkte richtig aufgestellt, nach Anzielen des anderen Endpunktes werden der Reihe nach die Zwischenpunkte durch Winken mit einer Fahne, Verwendung des Feldfernsprechers, Raketensignale u. dgl. eingewiesen.

Die Verlängerung der Geraden von A nach B über B hinaus kann in der Weise erfolgen, daß der Theodolit in B richtig aufgestellt wird. Nach Anzielen von A und Durchschlagen des Fernrohrs wird Punkt (1), nach Wiederanzielen von A und Durchschlagen des Fernrohrs aber Punkt (2) eingewiesen. Der richtige Punkt liegt in der Mitte zwischen (1) und (2). (Vgl. hiezu § 24. 1. A und B.)

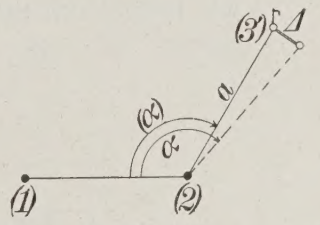


Fig. 145.

Wenn der gegebene Winkel α an den Schenkel (2).(1) der Fig. 145 angetragen werden soll, dann wird der Theodolit in (2) richtig aufgestellt und $\measuredangle \alpha$ genähert an (2).(1) angetragen, wodurch der Punkt (3′) eingewiesen wird. Der Winkel 1.2.3′ wird hierauf scharf gemessen (ev. durch mehrfache Repetition) und dadurch zu (α) gefunden. Bestimmt man angenähert (ev. durch Abschreiten) die Entfernung $\overline{2.3'} = a$, so findet man die notwendige Querverschiebung Δ des vorläufigen Punktes (3′) zu

$$\Delta = a \cdot \frac{\alpha - (\alpha)}{\varrho}.$$

Z. B.

$$\begin{aligned} \alpha &= 121^{\circ}\,17'\,26'' \\ (\alpha) &= 121\;\;17\;\;03'' \\ \hline a &\approx 425\text{ m}: \end{aligned}$$

der Punkt (3′) ist nach rechts zu verschieben um

$$\Delta = \frac{425\,000 \cdot 23''}{206\,265} = 47{,}3 \text{ mm}.$$

§ 91. Abstecken von Kreisbögen.

Die zwei im Gelände abgesteckten Geraden G und G_1 der Fig. 146 sollen durch einen Kreisbogen mit dem gegebenen Radius R verbunden werden.

Man sucht zuerst den Schnittpunkt S der beiden Geraden G und G_1 auf und mißt mit einem Theodoliten von $20'' \div 30''$ Nonienangabe entweder durch einfache Winkelmessung oder durch einmalige Repetition in jeder Fernrohrlage den Winkel α der beiden Geraden. Werden die Tangenten sehr lang, dann mißt man α etwas schärfer.

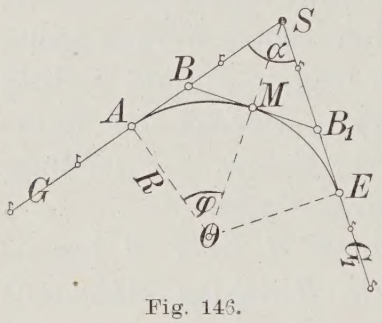


Fig. 146.

Bei der Absteckung der Bogenpunkte geht man in der Regel vom Großen ins Kleine vor und bestimmt deshalb zuerst die sog. Bogenhauptpunkte (Bogenanfang A, Bogenende E und häufig auch Bogenmitte M) und danach in etwa $5 \div 25$ m Abstand die Bogenkleinpunkte derart, daß der Verlauf des Bogens deutlich erkennbar ist.

a) Bestimmung der Bogenhauptpunkte. Nach der Fig. 146 ist:

$$\varphi = 90^0 - \frac{\alpha}{2}. \tag{1}$$

$$\overline{S.A} = \overline{S.E} = R \cdot \operatorname{tg} \varphi. \tag{2}$$

$$\overline{A.B} = \overline{M.B} = \overline{M.B_1} = \overline{E.B_1} = R \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}. \tag{3}$$

$$\overline{S.M} = \overline{B.M} \cdot \operatorname{tg} \varphi = R \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \operatorname{tg} \varphi. \tag{4}$$

$$\text{Bogenlänge } \overset{\frown}{A.E} = R \cdot \frac{2\varphi}{\varrho}. \tag{5}$$

Man halbiert mit dem in S stehenden Theodoliten den Winkel α und mißt auf der Winkelhalbierenden die Strecke $\overline{S.M}$ ab, wodurch M erhalten ist. Durch Abmessen von $\overline{S.B}$ und $\overline{S.A}$ bzw. $\overline{S.B_1}$ und $\overline{S.E}$ erhält man die Punkte B, A, B_1 und E. Zur Probe muß dann sein: B, M und B_1 in einer Geraden, $\overline{B.M} + \overline{M.B_1} = 2 \cdot \overline{A.B}$ und M in der Mitte zwischen B und B_1.

Diese Hauptpunkte bezeichnet man meist mit kräftigen Holzpflöcken, auf deren Oberfläche bei scharfer Messung noch ein Draht-

stift eingewiesen wird, um später ev. leicht eine Schnur über benachbarte Punkte spannen zu können.

Wenn der Schnittpunkt S zum Aufstellen des Theodolits nicht brauchbar ist, dann mißt man den Winkel α indirekt, indem nach Fig. 147 die beiden Hilfspunkte H und H_1 auf den Geraden G und G_1 ausgewählt und im Dreieck H, S, H_1 die Stücke a, β und β_1 gemessen werden.

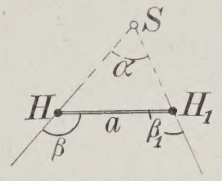


Fig. 147.

Es folgt:

$$\alpha = \beta + \beta_1 - 180^0, \qquad (6)$$

$$\overline{S.H} = \frac{a}{\sin\alpha} \cdot \sin\beta_1; \quad \overline{S.H_1} = \frac{a}{\sin\alpha} \cdot \sin\beta. \qquad (7)$$

Zahlenbeispiel. Die gegebenen und gemessenen Stücke sind durch Unterstreichen hervorgehoben.

	R	2.60 206	
	tg φ	9.58 935	
$R = 400{,}00$	tg $\frac{\varphi}{2}$	9.27 279	
$\alpha = 137^0\ 32{,}5'$	$\overline{S.A} = R \cdot \text{tg}\,\varphi$	2.19 141	$= 155{,}386$
$\frac{\alpha}{2} = 68^0\ 46{,}25'$	$\overline{A.B} = R \cdot \text{tg}\,\frac{\varphi}{2}$	1.87 485	$= 74{,}963$
$\varphi = 21\ 13{,}75$	$\overline{S.M} = R\,\text{tg}\,\varphi\,\text{tg}\,\frac{\varphi}{2}$	1.46 420	$= 29{,}121$
$\frac{\varphi}{2} = 10\ 36{,}9$	$2\varphi'$	3.40 611	
$2\varphi' = 2547{,}5$	$1 : \varrho'$	6.46 373	
	R	2.60 206	
	$\overset{\frown}{AE}$	2.47 190	$= 296{,}414$

Nach Abstecken der Punkte M, B, A, B_1 und E lagen B, M und B_1 in einer Geraden; die Messung der Strecken $\overline{B.M}$ und $\overline{B_1.M}$ lieferte 74,950 und 74,925 (statt 74,963). Diese Abweichungen rührten von unscharfer Bezeichnung der Punkte im Gelände her.

b) Abstecken der Bogenkleinpunkte. Dies kann nach verschiedenen Methoden erfolgen.

1. Mit rechtwinkligen Koordinaten von der Tangente aus.

α) Die Bogenpunkte brauchen nicht gleichweit voneinander entfernt zu sein.

Gegeben die runden Abszissen $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ und der Bogenhalbmesser R. Gesucht sind die zugehörigen Ordinaten $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$.

Nach der Fig. 148 ist:

$$y = R - \sqrt{R^2 - x^2} = R - \sqrt{(R + x)(R - x)} \tag{8}$$

oder:

$$y = R - R\left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right)^{1/2} = \frac{x^2}{2R} + \frac{x^4}{8R^3} + \frac{x^6}{16R^5} + \cdots \tag{9}$$

Für sehr flache Bögen genügt in (9) das erste Glied (Parabel).

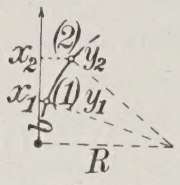


Fig. 148.

Für runde R sind in Handbüchern zum Abstecken von Kurven die Ordinaten nach (9) berechnet, z. B. von Knoll, Jordan, Sarrazin und Overbeck.

β) Die Bogenpunkte stehen gleichweit voneinander ab. Es sei b die gegebene Bogenlänge zwischen zwei Punkten, dann ist der zugehörige Zentriwinkel

$$\varphi'' = \frac{b}{R} \cdot \varrho''. \tag{10}$$

Demnach wird:

$$\left.\begin{array}{lll} x_1 = R \cdot \sin\varphi\,; & y_1 = R - R\cos\varphi = R \cdot 2\sin^2\dfrac{\varphi}{2} & \\ x_2 = R \cdot \sin 2\varphi\,; & y_2 = \quad = R \cdot 2\sin^2\dfrac{2\varphi}{2} & \\ x_3 = R \cdot \sin 3\varphi\,; & y_3 = \quad = R \cdot 2\sin^2\dfrac{3\varphi}{2} & \\ \vdots \quad \vdots \quad ; & \vdots \quad \vdots & \end{array}\right\} \tag{11}$$

Nach diesen Formeln (11) sind die Koordinaten für runde R berechnet z. B. von Kröhnke, Winkel.

Häufig bezeichnet man zur Absteckung der Kleinpunkte die Abszissenachse durch eine gespannte Schnur, an die ein rechtwinkliges Dreieck (Katheten 3 und 4, Hypotenuse 5 m) angelegt wird. Wenn die Ordinaten zu lang werden (im allgemeinen größer als $15 \div 20$ m), dann legt man mit Vorteil zwischen A und M (Fig. 146) eine weitere Tangente ein, wodurch die Ordinaten zufolge Gleichung (9) auf etwa $\frac{1}{4}$ verkleinert werden.

2. Mit rechtwinkligen Koordinaten von der Sehne aus.

Fig. 149.

Nach Abstecken der Sehne AM wird deren Länge $2s$ gemessen und ihre Mitte O aufgesucht.

Man findet (siehe Fig. 149) die Pfeilhöhe nach Gleichung (9) zu:

$$\overline{O \cdot O_1} = K = \frac{s^2}{2R} + \frac{s^4}{8R^3} + \frac{s^6}{16R^5} + \cdots \tag{9}$$

$$\text{oder: } K = 2R\sin^2\frac{\psi}{2}, \quad \text{wenn } \sin\psi = \frac{s}{R}. \tag{11}$$

Zählt man die Abszissen $x_1, x_2, \ldots$ der Bogenpunkte von O aus und bezeichnet die von der Sehne aus gezählten zugehörigen Ordinaten mit $Y_1, Y_2, \ldots$, so ist:

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= K - y_1, \\ Y_2 &= K - y_2, \\ \vdots \quad &\quad \vdots \quad \vdots \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

wenn $y_1, y_2, \ldots$ nach den Gleichungen (9) bzw. nach (11) gefunden werden.

3. Mit Peripheriewinkeln und Sehnen.

Die Sehne s wird von jedem Punkte des Kreisumfangs aus unter dem Winkel φ gesehen, wobei (Fig. 150)

$$\sin \varphi = \frac{s}{2R}. \tag{13}$$

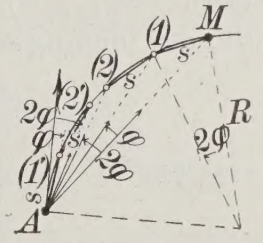


Fig. 150.

Der Theodolit (zweckmäßig Repetitionstheodolit) wird auf irgend einem Punkte des Bogens, z. B. in A, aufgestellt, ein zweiter Bogenpunkt, z. B. M, angezielt und dann am Horizontalkreis abgelesen (bzw. es wird Null eingestellt und dann M anvisiert). Nach Verdrehung der Alhidade um den Winkel φ wird der von M um s entfernte Punkt (1) eingewiesen; nach der Drehung um 2φ der von (1) um s entfernte Punkt (2) usf.

Ist im Standpunkt A die Tangentenrichtung gegeben, dann wird durch Antragen des Winkels φ an diese und Abmessen der Sehne s der Punkt (1′), durch Antragen des Winkels 2φ und Abmessen der Sehne s von (1′) aus der Punkt (2′) gefunden usf.

Meist verwendet man runde Sehnenlängen von 20 m, die mit dem 20 m langen Meßband hergestellt werden; die Winkel $\varphi, 2\varphi, 3\varphi, \ldots$ werden hierbei unrund. Benutzt man aber ein Meßband oder einen Draht, an dem der zweite Bandstock an beliebiger Stelle angeklemmt werden kann, dann kann in einfacher Weise die einem runden Werte von φ nach Gleichung (13) entsprechende unrunde Sehnenlänge zur Absteckung benutzt werden.

Zweckmäßig steckt man nach Ziffer 2 gleichzeitig weitere Bogenpunkte von der Sehne aus ab.

Die Methode ist auf schmalen Dämmen vorteilhaft.

4. In Einschnitten, Tunnels u. dgl. müssen die Bogenpunkte von der Sehne aus abgesteckt werden. Man verwendet dann möglichst lange Sehnen. Ist z. B. A im Gelände gegeben, ist außerdem R be-

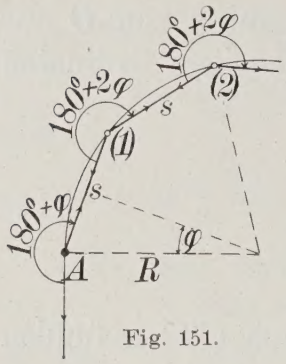


Fig. 151.

kannt und wegen der lichten Weite des Tunnels sei noch die Sehne s anwendbar, dann wird der Theodolit in A aufgestellt und an die Tangentenrichtung in A (Fig. 151) der Winkel $180^0 + \varphi$ angetragen, wobei $\sin \varphi = \frac{s}{2R}$.

Nach Abmessen der Sehnenlänge s ist der Punkt (1) bekannt. Mit dem hierauf in Punkt (1) aufgestellten Theodolit wird der Winkel $180^0 + 2\varphi$ angetragen, s abgemessen, Punkt (2) gefunden usf. Wegen der meist kurzen Seiten s muß der Theodolit sehr scharf zentriert werden; zweckmäßig verwendet man bei diesen Absteckungen mechanische Zentrierungsvorrichtungen, wie z. B. die Freiberger Aufstellung (siehe § 50).

5. Von den vielen sonstigen Methoden zur Absteckung von Bögen (vgl. auch § 8), soll nur noch eine Einrückmethode erwähnt werden, deren Genauigkeit für viele Zwecke ausreicht. Ist z. B. A und die Tangentenrichtung in diesem Punkte, sowie der Radius R gegeben, dann mißt man (z. B. mit dem 20 m-Meßband), die Strecke x nach Fig. 152 und (nahezu) senkrecht dazu $y = \frac{x^2}{2R}$ ab, wodurch (1) gefunden wird; auf der Sehne $A.(1)$ wird x abgemessen, durch Absetzen von $2y$ wird Punkt (2) gefunden usf.

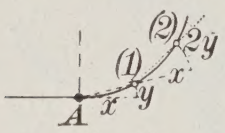


Fig. 152.

§ 92. Abstecken von mehrfachen Kreisbögen.

Die Aufgaben sind sehr mannigfaltig. Es sei z. B. gegeben (siehe Fig. 153) R_1, R_2 und der Anfangspunkt A z. B. durch $\overline{S.A} = a$; durch Messung möge der Winkel α bekannt sein.

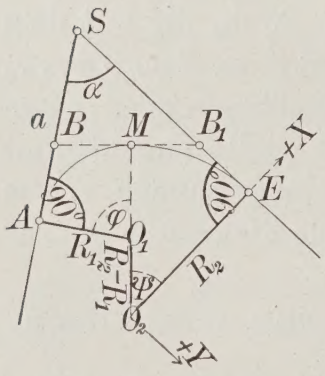


Fig. 153.

In dem geschlossenen Polygonzuge (mit $n = 5$ Punkten) S, A, O_1, O_2, E, S sind dann bekannt 7 Stücke ($= 2n - 3$ Stücke), die in der Fig. 153 hervorgehoben sind, so daß die Lösung versucht werden kann. Nimmt man den Nullpunkt eines Hilfskoordinatensystems in O_2 und dessen x-Achsenrichtung in $\overline{O_2.E}$ an, dann liefert die Anwendung des Projektionssatzes auf das geschlossene Polygon O_2, E, S, A, O_1, O_2 zur Berechnung der Unbekannten φ, ψ und $\overline{S.E}$ in bekannter Weise:

$$\left.\begin{aligned} R_2\cos 0 - \overline{E.S}\cos 90^0 + a\cdot\cos(90^0+\alpha) - R_1\cos(90^0+\alpha+90^0) + \\ + (R_2 - R_1)\cos(90^0+\alpha+90^0+180^0+\varphi) = 0, \\ R_2\sin 0 - \overline{E.S}\sin 90^0 + a\cdot\sin(90^0+\alpha) - R_1\sin(90^0+\alpha+90^0) + \\ + (R_2 - R_1)\sin(90^0+\alpha+90^0+180^0+\varphi) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Oder:

$$\left.\begin{aligned} R_2 - a\sin\alpha + R_1\cos\alpha + (R_2 - R_1)\cos(\alpha+\varphi) = 0, \\ -\overline{E.S} + a\cos\alpha + R_1\sin\alpha - (R_2 - R_1)\sin(\alpha+\varphi) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1')$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergeben sich in einfacher Weise die beiden Unbekannten φ und $\overline{E.S}$, weiterhin wird:

$$\left.\begin{aligned} \psi = 180^0 - (\alpha+\varphi); \\ \overline{A.B} = \overline{B.M} = R\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}; \quad \overline{M.B_1} = \overline{E.B_1} = R_2\,\mathrm{tg}\,\frac{\psi}{2}; \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

so daß die Punkte B, B_1, E und M leicht abgesteckt werden können.

§ 93. Abstecken von Übergangskurven.

Der Übergang von der Geraden $\left(\text{Krümmung } \frac{1}{\infty}\right)$ zum Kreisbogen $\left(\text{Krümmung } \frac{1}{R}\right)$ soll zur Erzielung ruhiger Fahrt bei Schnellbahnen mit Radien kleiner als etwa 800 m nicht plötzlich, sondern allmählich erfolgen und deshalb wird zwischen beide eine Übergangskurve eingelegt. Da die äußere Schiene in den Kreisbögen überhöht verlegt wird, um der beim Befahren des Bogens auftretenden Zentrifugalkraft entgegenzuwirken, so kann diese Überhöhung h gleichzeitig in der Übergangskurve allmählich gewonnen werden, in der Regel durch gleichmäßige Steigung der äußeren Schiene gegen die innere. Die Übergänge (in vertikaler Richtung) zu Anfang und Ende der Übergangskurve werden durch sehr flache Kreis- oder Parabelbögen (mit Radien R_v größer 2000 m) ausgerundet. (Um Einklemmungen der Räder zu vermeiden, wird außerdem im Bogen die innere Schiene nach dem Kreismittelpunkte etwas abgerückt.)

Bezeichnen: s Spurweite (normale Spur $s = 1{,}435$ m, von Schienenkopf- zu Kopfmitte 1,5 m),
h Überhöhung der äußeren Schiene im Kreisbogen,
P Gewicht, m Masse des Fahrzeuges,
$g = 9{,}81$ m Schwerebeschleunigung pro Sek.,
R Kreisbogenradius,
v Sekundliche Geschwindigkeit des Fahrzeuges,

dann entsteht beim Befahren des Kreisbogens die Zentrifugalkraft

$$\frac{m \cdot v^2}{R}. \tag{1}$$

Fig. 154.

Um das Abwärtsgleiten des Fahrzeuges auf der Unterlage mit der Querneigung γ (siehe Fig. 154) zu verhindern, müssen die Projektionen der Schwerkraft und der Zentrifugalkraft auf die Auflagelinie entgegengesetzt gleich sein; also

$$\frac{m v^2}{R} \cdot \cos \gamma = mg \cdot \sin \gamma . \tag{2}$$

Setzt man wegen der Kleinheit von γ den Wert $\cos \gamma = 1$ und $\sin \gamma = \frac{h}{s}$, so erhält man aus (2):

$$h = \frac{s}{g} \cdot \frac{v^2}{R}. \tag{3}$$

Da auf demselben Gleise meistens auch langsame Züge fahren und auch die Reibungsverhältnisse noch etwas ändernd wirken, so wird die Überhöhung h häufig durch empirische Formeln gefunden z. B. durch

$$(h)_{\text{mm}} = 500 \cdot \frac{V}{R} \tag{4}$$

worin V die stündliche Zuggeschwindigkeit in km.

Diese Überhöhung h soll durch Einschalten der Übergangskurve auf die Länge

$$a = n \cdot h \tag{5}$$

verzogen werden. Es wird angenommen, daß die äußere Schiene gegen die innere gleichmäßig geneigt werde, so daß also $1 : n$ die tg des Neigungswinkels der äußern gegen die innere Schiene ist (Fig. 155).

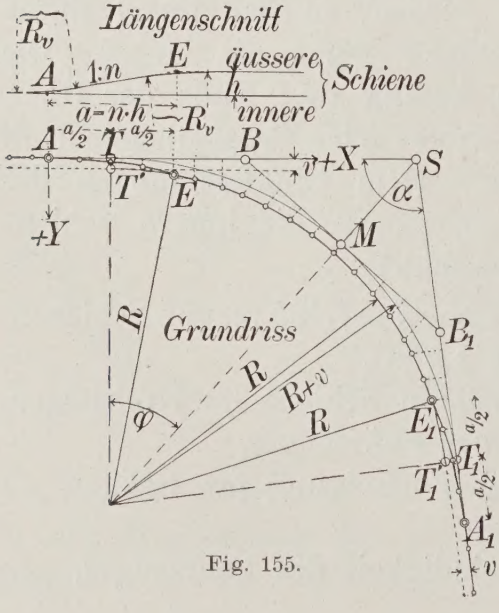


Fig. 155.

In der Entfernung x vom Anfangspunkt A der Übergangskurve liegt dann die äußere Schiene $\frac{x}{n}$ höher als die innere. Nimmt man in A den Nullpunkt des in Fig. 155 gezeichneten rechtwinkligen Koordinatensystems an und vertauscht die Länge in der sehr flachen Kurve $\overset{\frown}{A.E}$ mit den Abszissen x der Kurvenpunkte, so beträgt die Krümmung $\frac{1}{r}$ im laufenden Kurvenpunkt (xy) zufolge Gleichung (3), in der für h die Überhöhung $\frac{x}{n}$ an dem Punkte (xy) zu setzen ist:

$$\frac{1}{r} = \frac{g}{s \cdot v^2} \cdot \frac{x}{n}. \tag{6}$$

Den Regeln der Analysis zufolge ist aber für eine ebene Kurve:

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}. \tag{7}$$

Da die Kurve $\overset{\frown}{A.E}$ von der Abszissenachse nur wenig abweicht, so darf der Nenner näherungsweise gleich der Einheit genommen werden, so daß dann aus (6) und (7) wird:

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{g}{s \cdot v^2 \cdot n} \cdot x. \tag{8}$$

Integriert man (8) zweimal und berücksichtigt zur Konstantenbestimmung, daß für $x = 0$ auch $\frac{dy}{dx} = 0$ und $y = 0$ werden muß, so folgt:

$$y = x^3 \cdot \frac{g}{6 s v^2 \cdot n} = \frac{x^3}{K}. \tag{9}$$

Der gleichmäßigen Neigung der äußeren Schiene gegen die innere entspricht demnach unter den gemachten Annahmen (in der Horizontalprojektion) die kubische Parabel als Übergangskurve. Der jeweilige Krümmungsradius r der Übergangskurve im Punkte (xy) ist zufolge (6) und (9):

$$r = \frac{K}{6 \cdot x}. \tag{10}$$

An der Übergangsstelle E der Übergangskurve in den Kreisbogen muß r zu R werden, demnach wird die Länge a der Übergangskurve nach (10) genügend scharf:

$$a = \frac{K}{6 \cdot R} \quad (\text{oder } K = 6 \cdot a \cdot R). \tag{11}$$

Die Überhöhung soll zur Erreichung ruhiger Fahrt auf mindestens die 200fache Länge verteilt werden ($n = 200$); die Konstante K wird für normalspurige Hauptbahnen meist zwischen 100 000 und 60 000, häufig zu 90 000 genommen. Z. B. mit $V = 70$ km pro Stunde, also

$$v = \frac{70\,000}{60 \cdot 60} = 19{,}45; \quad s = 1{,}5; \quad n = 300; \quad g = 9{,}81$$

wird nach (9):

$$K = \frac{6 \cdot 1{,}5 \cdot 19{,}45^2 \cdot 300}{9{,}81} \approx 98\,000.$$

Die Ordinate der Übergangskurve bei dem Punkte T $\left(\text{für } x = \frac{a}{2}\right)$ wird nach (9):

$$y_T = \frac{a^3}{8 \cdot K};$$

im Endpunkte E aber (unter Beachtung von (11))

$$y_E = \frac{a^3}{K} = \frac{a^2}{6R}. \qquad \text{(Folglich } y_T = \tfrac{1}{8}\, y_E.\text{)} \tag{12}$$

Dem Kreise mit dem Radius R entspricht im Punkte E nach § 91. b. 1. α) die Ordinate

$$y'_E = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2R} + \cdots = \frac{a^2}{8R}. \tag{13}$$

Die Differenz:

$$y_E - y'_E = \frac{a^2}{6R} - \frac{a^2}{8R} = \frac{a^2}{24 \cdot R} = \frac{y_E}{4} = v \tag{14}$$

stellt also die Parallelverschiebung der Kreistangente durch Einschaltung der Übergangskurve vor.

Die Absteckung ist deshalb in folgender Weise auszuführen:

α) Gegeben: R, K und α; die Geraden (Tangenten) sind beizubehalten.

1. Berechnung der Übergangskurvenlänge nach (11): $a = \frac{K}{6 \cdot R}$.

2. Die dem Endpunkt entsprechende Ordinate wird nach (9): $y_E = \frac{a^3}{K}$ und demnach die Parallelverschiebung $v = \frac{y_E}{4}$.

3. Mit dem Kreisbogenradius $(R + v)$ berechnet man wie in § 91 die Hilfshauptpunkte T, T_1, M, B, B_1 (Fig. 155) durch $\varphi = 90 - \frac{\alpha}{2}$; $\overline{S.T} = (R + v) \operatorname{tg} \varphi$; $\overline{T.B} = \overline{M.B} = (R + v) \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ usw.

4. Nach Abstecken dieser Hauptpunkte wird von T (und T_1) aus $\frac{a}{2}$ nach außen abgemessen und dadurch der Kurvenanfang A gefunden; die Übergangskurve von A bis E wird stets mit Abszissen und Ordinaten von der Tangente aus abgesteckt. Die den von T bzw. M und T_1 aus gezählten Abszissen entsprechenden Kreisbogenordinaten (für den Kreisbogenhalbmesser R) sind entweder sämtlich um v zu vergrößern oder von einer um v parallel nach innen gerückten Geraden aus abzustecken.

b) Ist ein schon vorhandener Kreisbogen beizubehalten, dann sind die beiden vorhandenen Tangenten, die durch T' und T_1' gehen, von diesen beiden Punkten aus um v nach außen parallel zu verlegen und zwischen diesen neuen Tangenten und dem Kreisbogen sind dann wie vorher die beiden Übergangskurven abzustecken.

IX. Abschnitt.
Höhenmessung.

15. Kapitel.
Höhenmessung durch Nivellieren.

§ 94. Der Nivellierapparat.

Der Nivellierapparat besteht aus einem beim Gebrauch lotrecht stehenden Maßstabe, der Nivellierlatte, und dem eigentlichen Nivellierinstrumente, mit dessen Hilfe die Nivellierlatte im vertikalen Sinne aneinander gereiht wird. Zur vorübergehenden Bezeichnung des Lattenaufstellungspunktes dient eine kräftige eiserne Fußplatte von etwa 1 dm Durchmesser mit gewölbter Oberfläche und drei Füßen, wenn nicht hierzu in der zu nivellierenden Strecke vorhandene festliegende Steine u. dgl. Verwendung finden können.

Die Nivellierlatte von $3 \div 4$ m Länge und etwa 1 dm Breite ist meist aus gut getrocknetem, astfreiem (harzreichem) Kiefernholz gefertigt und wird gegen das Eindringen der Feuchtigkeit noch durch Tränken mit Leinöl und mehrfachen Lackfarbenanstrich geschützt. Die Querschnitte *a* und *b* der Figur 156 werden meist verwendet, wenn die Latte aus einem Stück besteht (*b* auch bei zusammenschiebbaren Latten), die Querschnitte *c* und *d*, wenn die Latte etwa um die Mitte zusammenklappbar ist. In der Regel wird die Latte bis auf Zentimeter geteilt und mit übersichtlicher Dezimeterbezifferung, die von unten nach oben zunimmt, versehen; am gebräuchlichsten ist die Felderteilung (Fig. 157), doch kommen auch Strichteilungen in Anwendung. (Latten für Feinnivellierungen werden auch in $\frac{1}{2}$ cm und 4 mm geteilt.) Zum Halten der Latte dienen zwei in Brusthöhe angebrachte Handgriffe. Das Fußende der Latte ist mit einem kräftigen Metallbeschläge meist mit ebener Aufsatzfläche normal zur Latte versehen. Die Lotrechtstellung geschieht nach Augenmaß, mit einem angehängten Senkel, oder mit einer angeschraubten Dosenlibelle. Durch freihändiges Halten wird die Latte nach Lorber auf $\pm 2\frac{1}{3}{}^0$, mit Hilfe des Senkels auf $\pm 1\frac{1}{3}{}^0$ und mit

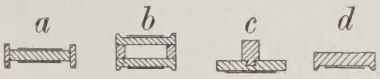


Fig. 156.

Fig. 157.

der Dosenlibelle auf $\pm 25'$ lotrecht gerichtet. Die Rückseite der Latte kann mit einer zweiten Teilung versehen werden (Wendelatte); häufig wird auch dieselbe Teilung mit einer zweiten Bezifferung (etwa als dekadische Ergänzung) versehen.

Die Teilung soll gleichmäßig sein, doch schaden unregelmäßige Teilungsfehler kleiner als 0,1 mm auch bei feinen Arbeiten nicht viel. In einigen Tagen kommen Veränderungen in der Länge der Lattenmeter bis zu 0,3 mm vor. Bei feineren Nivellements und hauptsächlich bei der Messung großer Höhenunterschiede muß deshalb die Lattenmeterlänge Tag für Tag durch Vergleichen mit einem Normalmaßstabe bestimmt werden (am zweckmäßigsten wird hierzu ein Strichmaßstab benutzt, der auf die einzelnen Meter der Nivellierlatte gelegt werden kann).

Die wichtigsten Nivellierinstrumente sind auf Stativen gebrauchte Libelleninstrumente mit Ablesefernrohren, wobei zwei Arten unterschieden werden sollen, je nachdem das Fernrohr mit Ringen versehen ist oder nicht.

a) Nivellierinstrumente ohne Ringfernrohr.

Die Einrichtung ist aus der Fig. 158 ersichtlich. In dem, mit dem Stative federnd verbundenen, dreifüßigen Intrumentunterbau ist die Umdrehachse des Fernrohrs derart gelagert, daß grobe und feine Drehungen ausgeführt werden können. Die Nivellierlibelle mit $30'' \div 10''$ Teilwert über (unter) dem etwa 20 bis 30 mal vergrößernden Fernrohre ist mit diesem fest verbunden; zur raschen genäherten Lotrechtstellung der Umdrehachse ist zweckmäßig auf dem drehbaren Aufbau entweder eine Dosenlibelle oder eine unempfindliche Querlibelle vorhanden.

Es sind folgende Berichtigungen vorzunehmen:

1. Die Umdrehachse muß bei jeder Aufstellung angenähert lotrecht gerichtet werden. Da dies hier mit Hilfe der Nivellierlibelle und der Querlibelle (bzw. mit einer Dosenlibelle) erfolgt, so werden deren Achsen mittels der Korrektionsschräubchen an diesen Libellen nahezu senkrecht zur Umdrehachse gerichtet (siehe § 19).
2. Nach deutlicher Sichtbarmachung des Fadenkreuzes wird die Ziellinie durch Heben oder Senken des Fadenkreuzes zur Libellenachse möglichst scharf parallel gerichtet, damit die Fernrohrzielung bei einspielender Nivellierlibelle horizontal liegt. Diese Berichtigung geschieht durch Nivellieren des Höhenunterschiedes zweier etwa $80 \div 100$ m entfernter Punkte aus der

Mitte und aus den Endpunkten nach § 20. Wenn später stets nahezu aus der Mitte nivelliert wird, dann ist ein verbleibender kleiner Fehler (1 ÷ 2 mm auf die angegebene Entfernung) in der Parallelstellung zwischen Ziellinie und Libellenachse unschädlich. Die richtige Führung des Okularauszuges (§ 12) untersucht man durch mehrmaliges Bestimmen des Höhenunterschiedes zwischen zwei Punkten mit dem vollständig berichtigten

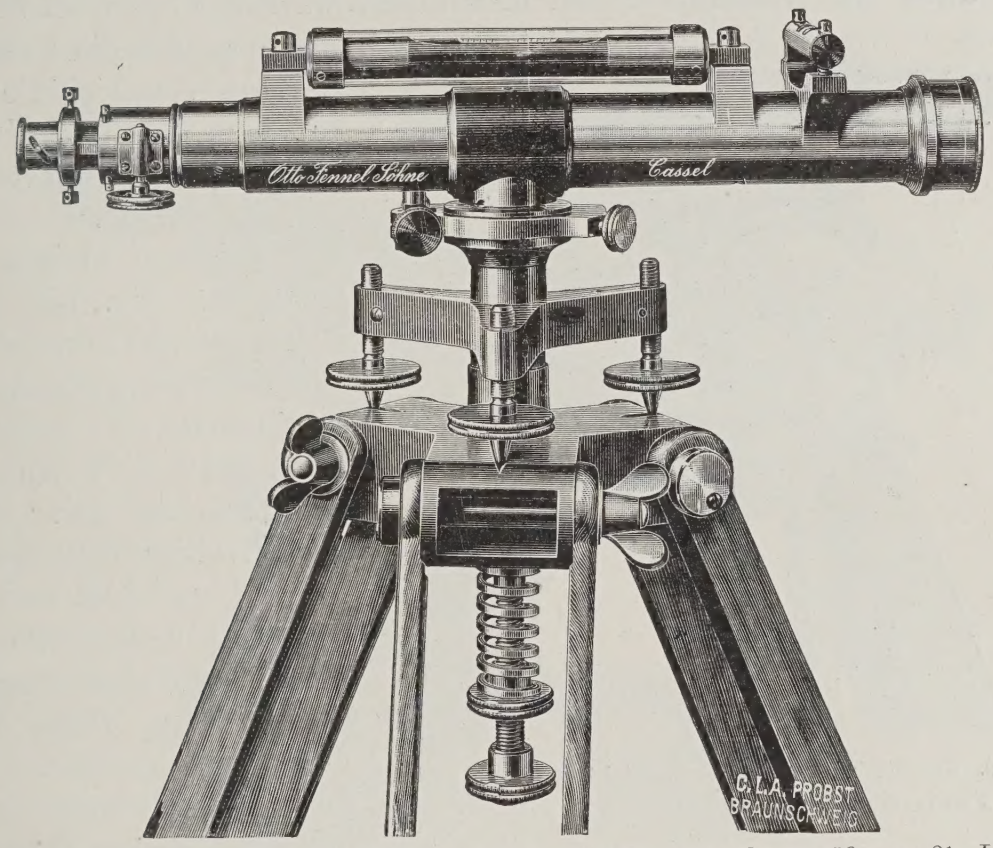


Fig. 158. Nivellierinstrument von Fennel Söhne in Cassel. Fernrohrvergrößerung 21, Libellenteilwert 30″.

Nivellierinstrumente von verschiedenen Instrumentenstandpunkten aus (verschieden lange Zielungen nach den beiden Punkten). Empfindliche Libellen müssen während der Beobachtungen vor einseitiger Erwärmung geschützt werden; es werden deshalb die Libellen häufig durch ein Glasrohr geschützt und im Sonnenschein benutzt man außerdem häufig Feldschirme oder sonstige Schutzmittel.

b) Nivellierinstrumente mit Ringfernrohr.

Ringfernrohre verwendet man häufig an größeren Instrumenten mit 40 ÷ 30fach vergrößernden Fernrohren und 5″ ÷ 10″ Teilwert der

Nivellierlibelle, doch kommen solche auch an kleinen Instrumenten vor. In Fig. 160 (Hildebrand in Freiberg) ist die Nivellierlibelle mit dem Fernrohre, in Fig. 159 (Ertel & Sohn in München) aber mit den Fernrohrstützen fest verbunden; das Fernrohr läßt sich bei beiden Instrumenten drehen und umlegen; die zur genäherten Lotrechtstellung der Umdrehachse dienende Dosenlibelle ist in den beiden Figuren nicht zu sehen (sie kann auch fehlen).

Unter der Annahme gleich dicker Fernrohrringe kann bei beiden Instrumenten die Parallelstellung von Ziellinie und Libellenachse auf einem Instrumentenstandorte ausgeführt werden.

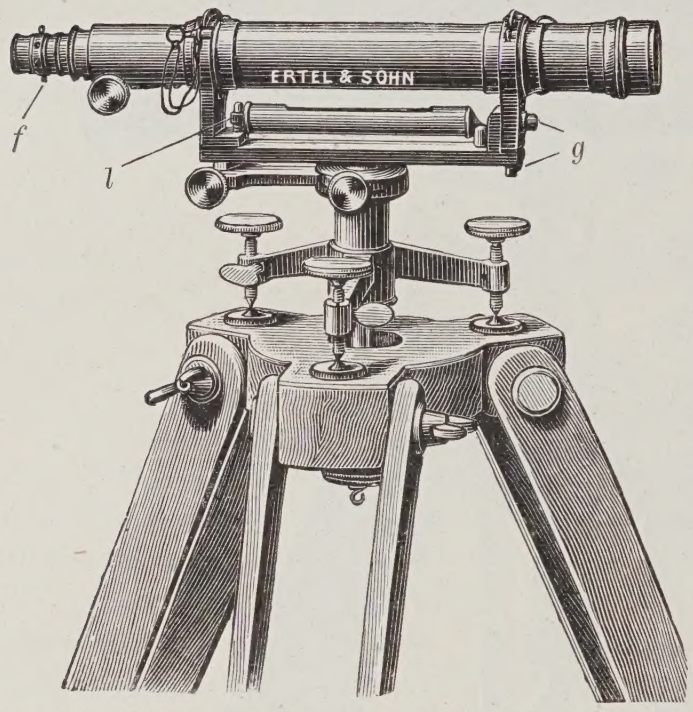


Fig. 159. Nivellierinstrument von T. Ertel & Sohn in München. Fernrohrvergrößerung 18; Libellenteilwert 18″.

Bei dem kleinen Instrumente Fig. 159 wird zuerst nach § 12 das Fadenkreuz mit den Fadenkreuzschräubchen f zentriert. Nach § 19 wird dann die Umdrehachse mit Hilfe der Nivellierlibelle scharf lotrecht gerichtet und dabei die Libellenachse mit den Schräubchen l scharf senkrecht zu dieser Umdrehachse gestellt. Zu dieser Umdrehachse wird hierauf mit den Schräubchen g noch die Ziellinie scharf senkrecht gerichtet, so daß dann schließlich, weil Libellenachse und Ziellinie senkrecht zur gleichen Geraden stehen, diese beiden parallel sind. Zur Ausführung der letztgenannten Berichtigung wird auf einer etwa 100 m entfernten Latte ein Punkt P (im vertikalen Sinne) angezielt. Nach vorsichtigem Umlegen des zentrierten Fernrohres in den gabelförmigen Lagern und Drehen um die Vertikalachse um 180^0 geht die Zielung bei P vorbei nach P'. Durch Heben oder Senken eines der beiden Lager, bis die Mitte zwischen P und P' getroffen wird, erfolgt die Senkrechtstellung der Ziellinie zur Umdrehachse, wenn die beiden Fernrohrringe gleich dick sind. Werden mit dem so berichtigten Instrumente durch mehrmaliges Nivellieren aus der Mitte und aus den Enden zwischen zwei sicher bezeichneten Punkten gleiche Höhenunterschiede gefunden (sog.

Mittenprobe, § 20), dann dürfen für später die Ringe als gleich dick betrachtet werden.

Behufs Berichtigung des Instrumentes Fig. 160 wird nach § 12 das Fadenkreuz mit den Schräubchen *f* zentriert. Durch Drehen des Fernrohrs mit Libelle um die Ringachse (nach beiden Seiten) zeigt sich, ob die Libellenachse diese kreuzt; mit den Schräubchen *k* wird der etwaige Kreuzungsfehler nach § 18 beseitigt. Durch Umlegen des Fernrohrs (mit der Libelle) wird an den (in der Fig. 160 nicht sichtbaren) vertikal wirkenden Schräubchen *l* nach § 17 und 18 die Li-

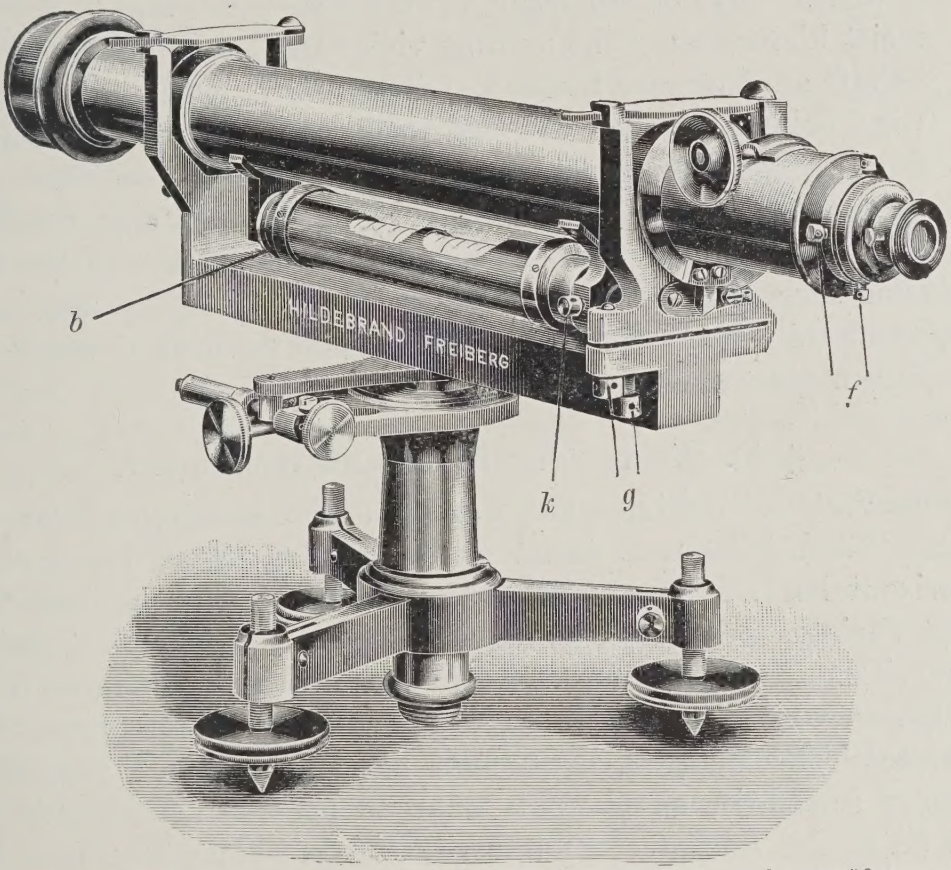


Fig. 160. Nivellierinstrument von Hildebrand in Freiberg i. S. Fernrohrvergrößerung 32; Libellenteilwert 5″.

bellenachse parallel zur Auflageebene der Fernrohrringe gerichtet. Mit Hilfe der Schräubchen *g* wird dann nach § 19 die Libellenachse (samt dem Fernrohr) angenähert senkrecht zur Umdrehachse gestellt. Die Ringgleichheit wird in derselben Weise wie vorher geprobt.

Anmerkungen.

1. An Stelle der einfachen Libelle kann in Fig. 160 eine Doppelschlifflibelle verwendet werden. Behufs Parallelstellung der beiden parallelen Libellenachsen zur zentrierten Ziellinie wird auf § 20 verwiesen.

2. Im allgemeinen wenig empfehlenswert sind auf die Fernrohrringe aufgesetzte Reitlibellen, weil sich zwischen die Libellenfüße und die Fernrohrringe leicht störender Staub lagert.
3. Damit der Beobachter die Libellenblase sehen kann, ohne seinen Standort wechseln zu müssen, bringt man häufig hierzu dienende Spiegeleinrichtungen an.
4. Zum leichteren Feineinstellen sehr empfindlicher Libellen sind besondere Hebe- oder Elevationsschrauben in Verbindung mit einem großen Hebelarme z. B. an einer Fernrohrstütze der Fig. 160 vorteilhaft. Aus dem gleichen Grunde haben die drei Fußschrauben meist kleine Ganghöhe und um vieles Drehen an diesen Schrauben behufs annähernder Lotrechtstellung der Drehachse zu vermeiden, wird beim Aufstellen des Instrumentes die rohe Lotrechtstellung durch passendes Seitwärts- und Einwärtsrücken eines Stativbeines (Eintreten) ausgeführt. Zur Verfeinerung der Lattenablesung können drei horizontale Fäden angebracht werden. (Bei sehr feinen Nivellements wird die Neigung der Ziellinie durch Libellenausschläge gemessen und dann die Lattenablesung dementsprechend verbessert.)

§ 95. Fest- oder Fixpunktnivellement.

Die Fest- oder Fixpunkte werden durch messingne oder eiserne Bolzen, Dübel, Nieten u. dgl. von etwa 1 dm Länge bezeichnet, die in horizontalen oder vertikalen Flächen von Gebäuden oder tief gesetzten Steinen mit eingestemmten Bleiringen oder mit Zement befestigt sind. Zum leichteren Auffinden und zum Schutze vor Beschädigung wird vor die in vertikale Flächen eingesetzten Bolzen, deren zentrische Bohrung den Punkt bezeichnet, eine Schutztafel mit passender Aufschrift angebracht, während bei den Höhenmarken nach Fig. 7 (S. 5) der höchste Punkt des hervorstehenden kugeligen Kopfes den bezeichneten Punkt darstellt. Weniger dauerhafte Bezeichnungen bilden die höchsten Punkte gewöhnlicher Marksteine, Treppenstufen, bodengleich eingeschlagene, kräftige Pflöcke (ev. mit Nagel mit breitem Kopfe) u. dgl.

Als Vergleichsfläche dient in Deutschland bei allen größeren Nivellements die sog. Normalnullfläche; die Abstände der einzelnen Festpunkte von dieser Fläche bezeichnet man als Höhen über Normalnull (N.N.). Diese Niveaufläche fällt annähernd mit der Meeresfläche zusammen und ist bezeichnet durch den Normalhöhenpunkt an einem Pfeiler der Berliner Sternwarte, der genau 37 m über N.N. angenommen ist und außerdem noch durch viele über Deutschland ver-

teilte Festpunkte, deren Höhen über N.N. durch Fein- oder Präzisionsnivellements genau bestimmt sind, so daß also weitere Nivellementszüge an diese Punkte angeschlossen werden können.

Es sei nun (Fig. 161) A ein Festpunkt, H_A dessen gegebene Höhe über N.N. und mit dem gut berichtigten Nivellierapparate soll die Höhe der Punkte B und C gemessen werden. (Die scharfe Parallelstellung der Ziellinie zur Libellenachse sollte an jedem Arbeitstage geprobt werden.)

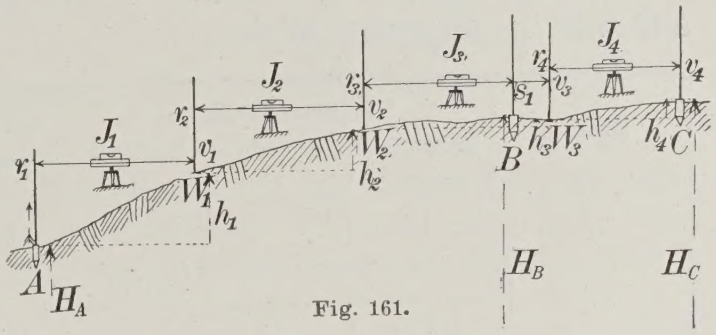


Fig. 161.

Es spielt sich dann folgender Nivelliervorgang ab:

Die Latte, deren Nullpunkt mit dem Aufsatzpunkt zunächst zusammenfallen möge, wird in A lotrecht aufgehalten, das Nivellierinstrument in J_1 ungefähr $30 \div 60$ m von A entfernt aufgestellt und seine Umdrehachse z. B. mit Hilfe der Dosenlibelle genähert lotrecht gerichtet. Hierauf wird die Latte in A (nachdem sie im Fernrohre deutlich gesehen wird) so angezielt, daß der Vertikalfaden durch die Zentimeterteilung hindurchgeht, dann wird die Nivellierlibelle durch geringe Drehung einer geeigneten Fußschraube zum scharfen Einspielen gebracht und unmittelbar darauf an der Latte bis auf mm abgelesen; diese Ablesung sei r_1 und heiße „Rückblick".

Der Lattenträger wird abgerufen, schreitet die Entfernung bis zum Instrumente — die Zielweite — ab, geht in der Richtung des Nivellements um nahezu die gleiche Strecke vorwärts, bezeichnet dort den Punkt W_1 entweder mit der fest eingetretenen Fußplatte oder er wählt hierzu einen passenden, fest liegenden Stein u. dgl. und hält die Nivellierlatte über W_1 lotrecht.

Diese Latte wird dann von J_1 aus angezielt (Vertikalfaden durch die Teilung), die Libelle wieder scharf zum Einspielen gebracht und sodann der „Vorblick" v_1 abgelesen.

Die Latte bleibt im „Wechselpunkte" W_1 stehen; das Instrument wird nach J_2 in etwa $30 \div 60$ m Entfernung von W_1 gebracht, die Umdrehachse wieder genähert lotrecht gerichtet, die Latte angezielt, die Libelle zum scharfen Einspielen gebracht und sodann der neue Rückblick r_2 abgelesen.

In der gleichen Weise wie vorher wird dann die Latte nach dem neuen Wechselpunkte W_2 gebracht und auf ihr bei scharf einspielender Libelle der Vorblick v_2 abgelesen. Dann kommt wieder

Instrumentenwechsel, das Instrument also nach J_3, der Rückblick r_3; Latte nach dem Fixpunkt B — „Seitenblick“ s_1; Latte nach dem Wechselpunkte W_3 — Vorblick v_3.

Vom neuen Instrumentenstandorte J_4 aus erhält man den Rückblick r_4 und den Vorblick v_4 auf C usw.

Die Ablesungen r, v und s schreibt man zweckmäßig tabellarisch auf z. B. in folgender Weise:

Punkt	Lattenablesungen: Rückblick r	Lattenablesungen: Seitenblick s	Lattenablesungen: Vorblick v	Instrumenthorizont	Höhe	Bemerkungen
A	2,451			75,083	72,632	Bolzen Nr. 58
W_1			1,032		74,051	
	3,295			77,346		
W_2			2,176		75,170	
	3,139			78,309		
B		2,141			76,268	Treppenstufe
W_3			1,051		77,258	
	2,487			79,745		
C			1.123		78,622	Markstein
$\Sigma =$	11,372		5,382			
$\Sigma r - \Sigma v =$	+ 5,990			$H_C - H_A =$	+ 5,990	(Probe)

Man findet, daß jeder Teilhöhenunterschied h_1, h_2, h_3 (s. Fig. 161) sich ergibt als Differenz von Rückblick und Vorblick, z. B.:

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= r_1 - v_1 \\ h_2 &= r_2 - v_2 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Es muß deshalb auch die Summe der Teilhöhenunterschiede zwischen Anfangspunkt und irgend einem Wechselpunkt, z. B. auch dem Endpunkte C, gleich der Differenz der Summen der Rückblicke und Vorblicke sein, also z. B.:

$$H_C - H_A = h_1 + h_2 + \cdots h_4 = \Sigma r - \Sigma v$$

oder: (2)

$$H_C = H_A + (\Sigma r - \Sigma v).$$

Auf dem Umwege über die Instrumentenhorizonte findet man die einzelnen Höhen auch in folgender Weise:

Der Instrumentenhorizont in J_1 ist: $J_1 = H_A + r_1$
Höhe des Wechselpunkts: $W_1 = J_1 - v_1$
Neuer Instrumentenhorizont: $J_2 = W_1 + r_2$
Höhe des Wechselpunkts: $W_2 = J_2 - v_2$
Instrumentenhorizont: $J_3 = W_2 + r_3$
Höhe von B: $H_B = J_3 - s_1$
Höhe des Wechselpunkts: $W_3 = J_3 - v_3$
usf.

Die Rechnung nach diesen Gleichungen ist im obigen Schema ausgeführt; durch Anwendung der Gleichung (2) wird die Höhe der Wechselpunkte, nicht aber die der zwischenliegenden Punkte B usf. geprobt.

Bemerkungen:

1. Sind die Zielweiten im Vor- und Rückblick immer nahezu gleich groß, dann werden u. a. kleine Fehler in der Berichtigung des Instrumentes unwirksam. Bei weniger scharfer Messung auf stark geneigten Flächen arbeitet man mit Rücksicht auf den Zeitaufwand mit ungleich langen Zielweiten im Rück- und Vorblick. Die Zielweiten bewegen sich im allgemeinen zwischen 30 und 70 m (siehe § 96).
2. Unmittelbar nach jeder Ablesung überzeuge man sich durch einen Blick auf die Libelle davon, daß die Libellenblase während der Ablesung tatsächlich einspielte.
3. Wenn der Nullpunkt der Latte nicht mit deren Aufsatzpunkt zusammenfällt, dann liefert die obige Rechnung trotzdem die richtigen Höhen, nur die Instrumentenhorizonte sind um die Verschiebung des Nullpunkts gegen den Aufsatzpunkt zu $\left\{\begin{matrix}\text{hoch}\\\text{niedrig}\end{matrix}\right\}$, je nachdem ersterer $\left\{\begin{matrix}\text{tiefer}\\\text{höher}\end{matrix}\right\}$ als letzterer liegt.
4. Bei der Messung großer Höhenunterschiede muß während der Messung die Lattenmeterlänge mit einem Normalmaß bestimmt werden, um die richtigen Höhenunterschiede berechnen zu können. Wurde z. B. der Höhenunterschied $h' = \pm 128{,}672$ Lattenmeter gefunden und außerdem 1 Lattenmeter $= 1\text{ m} + 0{,}31$ mm gemessen, so ist der richtige Höhenunterschied $h = h'(1 + 0{,}31\text{ mm}) = \pm (128{,}672 + 40{,}0\text{ mm}) = \pm 128{,}712$ m.
5. Die beste Sicherung für die Richtigkeit gemessener Höhenunterschiede wird stets durch Hin- und Zurücknivellieren zwischen zwei Punkten oder durch Nivellieren einer geschlossenen Schleife erzielt.

§ 96. Genauigkeit des Nivellierens.

Jede Ablesung auf der Nivellierlatte ist mit einem kleinen Fehler behaftet, der durch Zusammenwirken vieler Ursachen entsteht, wie z. B. Schätzungsfehler beim Abschätzen der mm auf der Zentimeterteilung, Einstellfehler der Libellenblase, Zielfehler infolge unruhiger Bilder u. dgl., kleine Veränderungen der Ziellinienneigung während der Ablesung; außerdem fälschen aber auch Veränderungen der Instrumenten- und Wechselpunktshöhen z. B. durch Einsinken des Instrumentes und der Bodenplatte während der Messung den gesamten Höhenunterschied. Näherungsweise darf angenommen werden, daß der Fehler in der Ablesung proportional mit der Zielweite wächst, so daß, wenn $\pm \delta$ die Proportionalitätskonstante und z die Zielweite vorstellt, dieser Fehler $\pm \delta \cdot z$ beträgt. Bei gleichen Zielweiten im Rück- und Vorblick wird deshalb der Fehler im Höhenunterschied zweier aufeinanderfolgender Wechselpunkte $\pm \delta z \pm \delta \cdot z$ und demnach nach § 4 der mittlere Fehler

$$\sqrt{2\delta^2 z^2}. \qquad (1)$$

Bei der Nivellierung der Strecke s mit lauter gleichen Zielweiten z müssen $n = \frac{s}{2z}$ Instrumentenaufstellungen genommen werden. Der mittlere Fehler m_h des Höhenunterschiedes h der beiden Streckenendpunkte wird deshalb in gleicher Weise wie vorher:

$$m_h^2 = n \cdot 2\delta^2 z^2 = \frac{s}{2z} \cdot 2\delta^2 z^2 = \delta^2 s \cdot z$$

oder:

$$m_h = \pm \delta \cdot \sqrt{s \cdot z}. \qquad (2)$$

d. h. der mittlere Nivellierfehler ist proportional der Quadratwurzel aus der nivellierten Strecke und der Quadratwurzel aus der angewandten Zielweite. Um ihn klein zu machen, muß deshalb der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten mit kleiner Zielweite nivelliert werden. Da der Zeitaufwand mit kleinerwerdender Zielweite größer wird, so nimmt man im allgemeinen die günstige Zielweite zwischen 30 und 70 m (bei besseren Nivellierungen) an. Die Größe der günstigen Zielweite hängt von den Eigenschaften des verwendeten Nivellierinstruments (und der Latteneinteilung) ab, dessen Fernrohr die leichte Schätzung der mm ermöglichen und dessen Libelle so empfindlich sein muß, daß bei wiederholtem Einspielenlassen auf der um die günstige Zielweite entfernten Latte stets dieselbe Zahl abgelesen wird. Die Libelle darf aber andererseits nicht zu empfindlich sein, damit

der Beobachter zum Einspielenlassen nicht unnötig viel Zeit braucht, und deshalb sind bei kurzen Zielweiten (Bergnivellierungen) weniger empfindliche Libellen zweckentsprechender. Bei großen Instrumenten für Feinnivellements benutzt man erfahrungsgemäß meist Libellen mit $5 \div 10''$ Teilwert und $40 \div 30$fach vergrößernde Fernrohre; für die gewöhnlichen Zwecke Libellen mit $10'' \div 30''$ Teilwert und $30 \div 15$fach vergrößernde Fernrohre.

Die Güte eines Nivellements wird nach dessen mittleren Nivellierfehler auf 1 km beurteilt. Unter der Annahme $z =$ Konstante folgt, wenn $\delta \sqrt{z} = \mathfrak{m}$ gesetzt wird, aus Gleichung (2)

$$m_h = \pm \mathfrak{m} \sqrt{s}. \tag{3}$$

$\mathfrak{m}$ ist der mittlere Nivellierfehler auf ein km, wie sogleich aus (3) für $s = 1$ km hervorgeht.

Aus Gleichung (3) folgt das Gewicht p_h eines nivellierten Höhenunterschiedes zweier s km entfernter Punkte (vgl. § 65) zu

$$p_h = \frac{1}{s}. \tag{4}$$

Aus dem Anschlußfehler m_h, der sich beim Nivellieren eines bekannten Höhenunterschiedes zwischen zwei s km voneinander entfernten Punkten zeigt, ergibt sich nach Gleichung (3) der mittlere Nivellierfehler auf das Kilometer zu

$$\mathfrak{m} = \frac{m_h}{\sqrt{s}}. \tag{5}$$

Die beiden Anschlußpunkte können auch zusammenfallen; dann ist s in Gleichung (5) die Länge der nivellierten Schleife (ev. die Länge des Hin- und Zurücknivellements) in km-Einheiten.

Aus Gleichung (4) findet man, daß der ausgeglichene Höhenunterschied das arithmetische Mittel aus den durch das Hin- und Zurücknivellement gefundenen beiden gleich genauen Werten ist; durch die Ausgleichung wird demnach der bei der Rückkehr (bzw. bei dem Anschluß an einen gegebenen Punkt) auf den Ausgangspunkt sich zeigende Anschlußfehler proportional zu den Zwischenstrecken auf die Zwischenpunkte verteilt. Durch diese Mittelbildung wird der mittlere Fehler M der ausgeglichenen Nivellements auf 1 km kleiner und zwar wird nach § 5

$$M = \frac{\mathfrak{m}}{\sqrt{2}}. \tag{6}$$

Schon mit verhältnißmäßig kleinen Nivellierinstrumenten mit etwa 20fach vergrößernden Fernrohren und $10'' \div 15''$ Libellenteilwert kann

erfahrungsgemäß leicht mit etwa 50 m langen Zielweiten ein mittlerer Nivellierfehler von etwa $m = \pm 6$ mm auf 1 km erzielt werden.

Nivelliert man z. B. den Höhenunterschied zweier 9 km entfernter Punkte hin und zurück und findet $h_1 = 17{,}632$; $h_2 = -17{,}659$, so ist der ausgeglichene Höhenunterschied $H_1 = \frac{h_1 + h_2}{2} = +17{,}646$. Der mittlere Nivellierfehler auf 1 km wird, da die nivellierte Länge $s = 2 \cdot 9 = 18$ km ist, $m = \frac{h_2 - h_1}{\sqrt{s}} = \frac{27}{\sqrt{18}} = \pm 6{,}4$ mm; der mittlere Kilometerfehler des ausgeglichenen Nivellements ergibt sich (nach Gl. (6)) zu $M = \frac{\pm 6{,}4}{\sqrt{2}} = \pm 4{,}5$ mm und der mittlere Fehler z. B. von H_1 (nivellierte Strecke 9 km) demnach zu $m_{H_1} = \pm 4{,}5 \cdot \sqrt{9} = \pm 13{,}5$ mm.

Nach den Bestimmungen des Zentraldirektoriums der Vermessungen im preußischen Staate vom 12. Januar 1895 muß jeder Höhenunterschied hin und zurück nivelliert werden und es gilt ein Nivellement noch als brauchbar, wenn der mittlere Kilometerfehler nicht mehr als ± 5 mm, und als gut, wenn er nicht mehr als ± 3 mm beträgt. Das vorige Nivellement wäre demnach brauchbar.

Die Festpunkte werden dem Zwecke entsprechend verschieden scharf einnivelliert und man unterscheidet deshalb häufig Nivellierungen erster bis vierter Ordnung. Die Nivellementslinien 1. Ordnung (Präzisions- oder Feinnivellements) erstrecken sich über ganze Länder und werden mit einem mittleren Nivellierfehler von etwa $\pm 0{,}5$ bis ± 3 mm auf 1 km gemessen. Bei diesen Nivellierungen werden die Lattenablesungen meist auf 0,1 mm berechnet und es wird hierbei die Ziellinie meist nicht scharf horizontal gelegt, sondern ihre jeweilige kleine Neigung gegen die Horizontale wird mit Hilfe des Ausschlages der Libellenblase gemessen, so daß bei bekannter (z. B. durch Ablesen an zwei Fäden des entfernungsmessenden Fernrohrs) Zielweite die entsprechende Verbesserung der Lattenablesung leicht berechnet werden kann.

Für ein Nivellementshauptnetz einer Stadt genügen Nivellierungen mit etwa ± 4 bis ± 5 mm mittlerem Kilometerfehler; für bautechnische Zwecke solche mit ± 3 bis etwa ± 10 mm mittlerem Nivellierfehler auf 1 km; bei einspielender Libelle wird in diesen auf der etwa 30÷60 m entfernten Latte bis auf 1, ausnahmsweise $\frac{1}{2}$ mm abgelesen.

Bei Nivellierungen 3. und 4. Ordnung erfolgen die Lattenablesungen auf größere Entfernungen bis auf cm.

§ 97. Nivellementsnetze und deren Ausgleichung. Zahlenbeispiel.

Bei der Höhenvermessung einer größeren Fläche werden auf dieser zuerst durch Nivellieren einiger Linien, die sie durchziehen, mehrere Festpunkte bestimmt. In der Regel bilden diese Nivellementslinien einige Schleifen, in denen sich sog. Schlußfehler w zeigen, und mit diesen erhält man rasch einen Überblick über die Nivellierungsgenauigkeit.

Sind $w_1, w_2 \ldots w_n$ die Schlußfehler der Schleifen von den Längen $s_1, s_2 \ldots s_n$, so folgt nach § 96 Gleichung (5) der mittlere Nivellierfehler einer 1 km-Strecke zu $\mathfrak{m}_1 = \frac{w_1}{\sqrt{s_1}}$; $\mathfrak{m}_2 = \frac{w_2}{\sqrt{s_2}} \cdots \mathfrak{m}_n = \frac{w_n}{\sqrt{s_n}}$. Aus allen Schlußfehlern der einzelnen Schleifen erhält man demnach den Mittelwert:

$$(\mathfrak{m}) = \sqrt{\frac{\mathfrak{m}_1^2 + \mathfrak{m}_2^2 + \cdots \mathfrak{m}_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{\left[\frac{ww}{s}\right]}{n}}. \qquad (1)$$

Beispiel: Bei der Vermessung der Stadt Kufstein wurden mit einem kleinen Instrumente nach Fig. 159 (Teilwert 8″; Vergrößerung 18) mit durchschnittlich 35 m langen Zielweiten (Ablesung bis auf 0,5 mm auf einer in cm geteilten Latte) die in der Fig. 162 eingeschriebenen Höhenunterschiede nur in einer Richtung gemessen.

Man findet in der Schleife I mit dem Umfang

$$s_{\mathrm{I}} = 2{,}6 \text{ km}, \quad w_{\mathrm{I}} = +\,0{,}524 + 8{,}214 - 8{,}740 = -\,0{,}002;$$

außerdem:

$$s_{\mathrm{II}} = 2{,}8; \; w_{\mathrm{II}} = -\,3 \text{ mm};$$
$$s_{\mathrm{III}} = 2{,}4; \; w_{\mathrm{III}} = +\,5;$$
$$s_{\mathrm{IV}} = 2{,}4; \; w_{\mathrm{IV}} = +\,7.$$

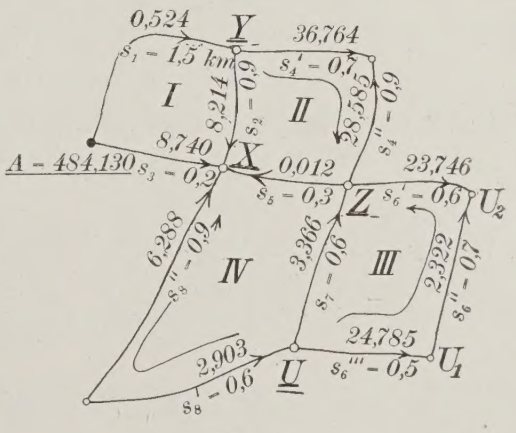


Fig. 162.

Nimmt man die Widersprüche in Millimetereinheiten, dann findet man $\left[\frac{ww}{s}\right] = 35{,}59$, somit nach Gleichung (1) den genäherten mittleren Nivellierfehler pro km:

$$(\mathfrak{m}) = \sqrt{\frac{35{,}59}{4}} = \pm\, 3{,}0 \text{ mm}.$$

Diese Widersprüche w müssen durch Ausgleichung beseitigt werden. Bei Nivellementsnetzen mit wenigen Knotenpunkten kann dies in einfacher Weise nach der Methode der kleinsten Quadrate unter Vermittlung der Höhen dieser Punkte geschehen.

Bezeichnen in Fig. 162 $\underline{X}$, $\underline{Y}$, $\underline{Z}$, $\underline{U}$ die ausgeglichenen Höhen der Knotenpunkte und (x), (y), (z), (u) deren Näherungswerte, also

$$\left.\begin{aligned} \underline{X} &= (x) + dx \\ \underline{Y} &= (y) + dy \\ \underline{Z} &= (z) + dz \\ \underline{U} &= (u) + du \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$h_1 = 0{,}524$; $h_2 = 8{,}214$; $h_3 = 8{,}740$; $h_4 = +\,36{,}764 - 28{,}565 = 8{,}199$; $h_5 = 0{,}012$; $h_6 = 24{,}785 + 2{,}322 - 23{,}746 = 3{,}361$; $h_7 = 3{,}336$; $h_8 = 3{,}385$ die beobachteten Größen, $v_1, v_2 \ldots v_8$ deren Verbesserungen, um die ausgeglichenen Werte $\underline{h_1}, \underline{h_2} \ldots \underline{h_8}$ zu erhalten, und ferner $p_n = \frac{1}{s_n}$ die Gewichte der Beobachtungen (zufolge § 96 Gleichung (4)), dann bestehen, wenn die gegebene Höhe des Anschlußpunktes $A = 484{,}130$ m über N.N. ist, nach Anblick der Fig. 162, die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \underline{h_1} &= h_1 + v_1 = \underline{Y} - A; && \text{Gewicht } \frac{1}{s_1} \\ \underline{h_2} &= h_2 + v_2 = \underline{X} - \underline{Y} && \frac{1}{s_2} \\ \underline{h_3} &= h_3 + v_3 = \underline{X} - A && \frac{1}{s_3} \\ \underline{h_4} &= h_4 + v_4 = \underline{Z} - \underline{Y} && \frac{1}{s_4} \\ \underline{h_5} &= h_5 + v_5 = \underline{X} - \underline{Z} && \frac{1}{s_5} \\ \underline{h_6} &= h_6 + v_6 = \underline{Z} - \underline{U} && \frac{1}{s_6} \\ \underline{h_7} &= h_7 + v_7 = \underline{Z} - \underline{U} && \frac{1}{s_7} \\ \underline{h_8} &= h_8 + v_8 = \underline{X} - \underline{U} && \frac{1}{s_8} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Da die Gleichungen (3) linear sind, so werden unter Berücksichtigung der Gleichungen (2) die Verbesserungs- oder Fehlergleichungen:

$$
\left.\begin{aligned}
v_1 &= dy + \{(y) - A - h_1\} && = a_1\,dx + b_1 dy + c_1 \cdot dz + d_1 \cdot du + l_1 \\
&&& \text{Gewicht } p_1 = \frac{1}{s_1} \\
v_2 &= dx - dy + \{(x) - (y) - h_2\} && = a_2 \cdot dx + b_2 dy + c_2\,dz + d_2 \cdot du + l_2 \\
&&& \text{Gewicht } p_2 = \frac{1}{s_2} \\
v_3 &= dx + \{(x) - A - h_3\} && = a_3\,dx + b_3 dy + c_3\,dz + d_3\,du + l_3 \\
&&& \text{Gewicht } p_3 = \frac{1}{s_3} \\
v_4 &= -dy + dz\,\{(z) - (y) - h_4\} && = a_4\,dx + b_4 dy + c_4\,dz + d_4\,du + l_4 \\
&&& \text{Gewicht } p_4 = \frac{1}{s_4} \\
v_5 &= dx - dz + \{(x) - (z) - h_5\} && = a_5\,dx + b_5 dy + c_5\,dz + d_5\,du + l_5 \\
&&& \text{Gewicht } p_5 = \frac{1}{s_5} \\
v_6 &= dz - du + ((z) - (u) - h_6\} && = a_6\,dx + b_6 dy + c_6\,dz + d_6\,du + l_6 \\
&&& \text{Gewicht } p_6 = \frac{1}{s_6} \\
v_7 &= dz - du + \{(z) - (u) - h_7\} && = a_7\,dx + b_7 dy + c_7\,dz + d_7\,du + l_7 \\
&&& \text{Gewicht } p_7 = \frac{1}{s_7} \\
v_8 &= dx - du + \{(x) - (u) - h_8\} && = a_8\,dx + b_8 dy + c_8\,dz + d_8\,du + l_8 \\
&&& \text{Gewicht } p_8 = \frac{1}{s_8}
\end{aligned}\right\} \quad (4)
$$

Aus den zu diesen Gleichungen nach § 67 gehörigen Normalgleichungen ergeben sich in der in § 68 ausgeführten Weise die Unbekannten du, dz, dy, dx, dann die Fehlerquadratsumme $[pvv]$ und die Gewichte p_u usf. der Unbekannten.

Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit, hier der mittlere Fehler der 1 km-Strecke nach der Ausgleichung, wird nach § 70, da $u = 4$ Unbekannte bestimmt wurden:

$$\mathfrak{m} = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-u}}. \qquad (5)$$

Der mittlere Fehler z. B. der Höhe des Punktes U folgt nach § 71 zu

$$\mathfrak{m}_u = \frac{\mathfrak{m}}{\sqrt{p_u}}. \qquad (6)$$

Für die Zahlenrechnung wurden als Näherungswerte angenommen:

$$(x) = 492{,}870$$
$$(y) = 484{,}656$$
$$(z) = 492{,}858$$
$$(u) = 489{,}492$$

Die tabellarisch geschriebenen Fehlergleichungen werden damit:

Nr	a	b	c	d	l in mm	p
1	·	+ 1	·	·	+ 2	0,7
2	+ 1	− 1	·	·	0	1,1
3	+ 1	·	·	·	0	5,0
4	·	− 1	+ 1	·	+ 3	0,6
5	+ 1	·	− 1	·	0	3,3
6	·	·	+ 1	− 1	+ 5	0,6
7	·	·	+ 1	− 1	0	1,7
8	+ 1	·	·	− 1	− 7	0,7
$\Sigma =$	+ 4	− 1	+ 2	− 3	+ 3	

und folglich:

$[paa] = +10{,}1$; $[pab] = -1{,}1$; $[pac] = -3{,}3$; $[pad] = -0{,}7$; $[pal] = -4{,}9$

$[pbb] = 2{,}4$; $[pbc] = -0{,}6$; $[pbd] = 0$; $[pbl] = -0{,}4$

$[pcc] = +6{,}2$; $[pcd] = -2{,}3$; $[pcl] = +4{,}8$

$[pdd] = +3{,}0$; $[pdl] = +1{,}9$

$[pll] = 57{,}5$

Die mit dem 25 cm langen Rechenschieber ausgeführte Auflösung nach dem Gaußischen Eliminationsverfahren liefert (siehe Seite 243).

Damit folgen die ausgeglichenen Höhen:

$$\underline{X} = 492{,}870 - 0{,}0002 = 492{,}8698$$
$$\underline{Y} = 484{,}656 - 0{,}0004 = 484{,}6556$$
$$\underline{Z} = 492{,}858 - 0{,}0017 = 492{,}8563$$
$$\underline{U} = 489{,}492 - 0{,}0020 = 489{,}4900 \pm 0{,}0027$$

$$\mathfrak{m} = \sqrt{\frac{47{,}1}{8-4}} = \pm 3{,}43 \text{ mm auf 1 km}.$$

Z. B.

$$m_u = \frac{3{,}43}{\sqrt{1{,}56}} = \pm 2{,}7 \text{ mm}.$$

dx.	dy.	dz.	du.	l.	
+ 10,1	− 1,1	− 3,3	− 0,7	− 4,9	$dx = \frac{-2,33}{10,1} = -0,23$
	2,4	− 0,6	0	− 0,4	
	*− 0,12**	*− 0,36*	*− 0,08*	*− 0,53*	
		6,2	− 2,3	+ 4,8	
		*− 1,08**	*− 0,23*	*− 1,60*	
			+ 3,0	+ 1,9	
			*− 0,05**	*− 0,34*	
				57,5	
				*− 2,38**	
	+ 2,28	− 0,96	− 0,08	− 0,93	$dy = \frac{-0,82}{2,28} = -0,36$
		+ 5,12	− 2,53	+ 3,20	
		*− 0,40**	*− 0,03*	*− 0,39*	
			+ 2,95	+ 1,56	
			*− 0,00**	*− 0,03*	
				+ 55,12	
				*− 0,38**	
		+ 4,72	− 2,56	+ 2,81	$dz = \frac{-7,81}{4,72} = -1,66$
			+ 2,95	+ 1,53	$p_z = 1,56 \cdot \frac{4,72}{2,95} = 3,49$
			*− 1,39**	*+ 1,52*	
				+ 54,74	
				*− 1,68**	
			+ 1,56	+ 3,05	$du = -1,956$
				+ 53,06	$p_u = 1,56$
				*− 5,95**	
				47,11	$= [pvv]$

Proberechnungen: Setzt man die Werte für dx, dy usf. in die Fehlergleichungen (4) ein, dann findet man die Verbesserungen $v_1 = +1,6$; $v_2 = +0,2$; $v_3 = -0,2$; $v_4 = +1,7$; $v_5 = +1,5$; $v_6 = +5,3$; $v_7 = +0,3$; $v_8 = -5,2$ mm und damit $[pvv] = 47,3$ was genügend mit dem obigen Wert übereinstimmt. Setzt man die ausgeglichenen Höhen und Höhenunterschiede in die Ausgangsgleichungen (3) ein, dann findet man, daß diesen Gleichungen sämtlich genügt wird, z. B.

$$h_8 = 492,8698 - 489,4900 = 3,3798$$

*) Über die Vorzeichen siehe Seite 150.

und andererseits

$$\underline{h_8} = 3{,}385 - 0{,}0052 = 3{,}3798.$$

Die Bestimmung der ausgeglichenen Höhen der zwischen den einzelnen Knotenpunkten eingemessenen Festpunkte erfolgt schließlich dadurch, daß der zwischen je zwei Knotenpunkten auftretende Anschlußfehler nach § 96 auf die einzelnen Teilstrecken proportional zu den Streckenlängen verteilt wird, wie dies z. B. für die zwei zwischen $\underline{U}$ und $\underline{Z}$ liegenden Punkte U_1 und U_2 geschehen ist (vgl. auch Fig. 162).

Punkt	Beobachteter Höhenunterschied	Strecke	Verbesserung mm	Ausgeglichene Höhe
$\underline{U}$				489,4900
	+ 24,7850	0,5	+ 1,5	
U_1				514,2765
	+ 2,3220	0,7	+ 2,0	
U_2				516,6005
	− 23,7460	0,6	+ 1,8	
$\underline{Z}$				492,8563
Σ bzw. Diff.	+ 3,3610	1,8	+ 5,3	+ 3,3663
		$\frac{5{,}3}{1{,}8} = 2{,}94$		

§ 98. Längenschnitt- oder Längenprofilaufnahme einer gegebenen Linie.

Der im Gelände vorgegebene (etwa abgesteckte) Linienzug, längs dessen der Vertikalschnitt mit dem Gelände aufzunehmen ist, wird zunächst durch durchlaufende, horizontale Messung mit Meßlatten oder mit dem Meßbande entlang der Linie in gleiche Teile (Stationen) von meist 100 m Länge zerlegt und innerhalb dieser Teile werden gleichzeitig weitere Punkte in runden Abständen von 20 bis 50 m sowie alle Geländebruchpunkte eingemessen und im Gelände entweder mit bodengleich geschlagenen Pflöcken (nebst Beipflock) oder auf Wegen mit Signierkreidestrichen u. dgl. bezeichnet. Der Punkt in z. B. 266,2 m Entfernung vom Anfangspunkt wird deshalb häufig mit der Zahl 2 + 66,2 bezeichnet, und diese Entfernungszahlen werden in passender Weise auf den Beipflöcken oder in sonstiger Weise bei den einzelnen Punkten angeschrieben.

Die Höhe der einzelnen Punkte wird sodann durch ein Festpunktnivellement in der Regel auf Zentimeter bestimmt; es wird deshalb auf der in den Profilpunkten aufgestellten Latte nur bis auf Zentimeter, auf den Wechsel- und besonderen Festpunkten dagegen bis auf

Millimeter abgelesen. Die Anlage von Festpunkten (benachbarte Marksteine u. dgl.) in Abständen von etwa $^1/_2$ km ist notwendig, damit an solchen Punkten die Arbeit leicht unterbrochen werden kann.

Bei der Aufzeichnung des Längenschnittes werden die in eine vertikale Ebene abgewickelten Längen meist im Maßstabe 1 : 2000 (oder 1 : 1000), die Höhen zehnfach überhöht, also 1 : 200 aufgetragen.

§ 99. Querschnitt- oder Querprofilaufnahme.

Die Querschnitte werden in der Regel senkrecht zur Leitlinie des Längenschnittes, in Kreisbögen also radial, gelegt. Die von der Richtung der wachsenden Entfernungszahlen des Längenschnittes aus linker bzw. rechter Hand liegenden Querschnitte werden meist etwa 10 bis 50 m weit nach links bzw. rechts aufgenommen.

Bei kleinen Querneigungen verwendet man bei der Aufnahme zweckmäßig das Nivellierinstrument zur Höhenbestimmung und ein Meßband oder Meßlatten zur Messung der horizontalen Entfernungen der einzelnen Punkte vom entsprechenden Punkte des Längenprofils und schreibt diese Zahlen in übersichtlicher Weise auf. Z. B.

links — Profil 6 + 25. — rechts

Punktentfernung	Lattenablesung	Bemerkungen
0	1,85	Pflock 6+25
1,5	1,90	
1,7	2,32	Graben
1,9	1,86	
4,5	1,76	Straßenmitte
7,2	1,86	Straßenrand
8,0	2,41	Böschung unten
13	2,80	
18	3,42	

Punktentfernung	Lattenablesung	Bemerkungen
0	1,85	Pflock 6+25
5,0	1,01	
10,0	0,35	
	3,64	Rückblick
15,0	2,80	
20,0	1,75	
25,0	0,93	

Nach Aufnahme des Punktes „rechts 10,0“ wurde das Nivellierinstrument umgestellt und dann erst konnten die weiteren Punkte 15, 20 und 25 bestimmt werden. Zum Auftragen der Querschnitte verwendet man zweckmäßig Millimeterpapier.

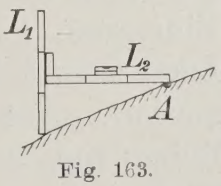


Fig. 163.

An Hängen muß das Nivellierinstrument oft umgestellt werden. Man benutzt dann zweckmäßiger die Setzlatte zur Aufnahme der Querschnitte. Die Setzlatte besteht aus zwei meist 3 m langen in Dezimeter geteilten Latten L_1 und L_2 der Fig. 163, von denen die eine mit einer unempfindlichen

Röhrenlibelle und häufig auch mit einer senkrecht dazu nach oben stehenden Führungsleiste versehen ist. Die Parallelstellung der Libellenachse zur Unterkante der Latte L_2 erfolgt nach zweimaliger Übertragung des festen Aufsatzpunktes A nach L_1 (zweite Übertragung mit umgelegter Latte L_2) und Mittelung der erhaltenen zwei Punkte an den Korrektionsschräubchen der Libelle.

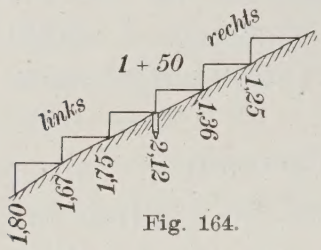


Fig. 164.

Die Messung des Querschnittes und die Aufschreibung der Ergebnisse ist aus der Fig. 164 ersichtlich.

Bei Verwendung sicherer Zwischenpunkte findet man mit Setzlatten bei mittleren Querneigungen den Höhenunterschied zweier etwa 50 m entfernter Punkte auf einige Zentimeter richtig.

Die Aufzeichnung der Längen und Höhen der Querschnitte erfolgt meist in gleichem Maßstabe, in der Regel in 1 : 200 d. natürl. Gr.

§ 100. Nivellement einer Fläche, Flächennivellement.

Durch das Flächennivellement wird die Lage und Höhe einer Anzahl über die aufzunehmende Fläche zweckmäßig verteilter Punkte gemessen, um damit im Plane z. B. auf der Fläche vorhandene Linien gleicher Höhe — die sog. Höhen- oder Schichtenlinien — konstruieren zu können.

Wenn kein Lageplan vorhanden ist, in den die Lage dieser im Felde aufgesuchten Punkte leicht eingetragen werden kann, dann steckt man einen entweder nahezu horizontal oder auch ungefähr in der Richtung des größten Gefälles auf der Fläche verlaufenden Polygonzug ab, der weiterhin als Leitlinie für die nachfolgenden Längen- und Querschnittaufnahmen dient. Der Abstand der einzelnen Querschnitte wird im allgemeinen zwischen 5 und 50 m angenommen; die Höhen der einzelnen Profilpunkte werden dem Zwecke der Aufnahme entsprechend bis auf Zentimeter oder bis auf Dezimeter bestimmt.

Ist aber ein brauchbarer Lageplan vorhanden, dann werden die einzelnen im Gelände ausgewählten Punkte durch Einschreiten oder Einmessen auf im Plane und im Gelände vorhandene Linien der Lage nach bestimmt, in den Plan eingezeichnet und fortlaufend numeriert. Außerdem ist es für die spätere Konstruktion der Höhenlinien von großem Werte, wenn bei der Aufnahme im Plane die Richtung der größten Flächengefälle und diejenigen Punkte, zwischen denen die Geländeneigung gleichmäßig ist, angegeben werden. Auf allen diesen, während der Aufnahme ausgewählten, Punkten wird die

Nivellierlatte der Reihe nach aufgesetzt und auf ihr vom Instrumente aus bis auf Zentimeter bzw. Dezimeter abgelesen. Um hierbei auch größere Höhenunterschiede messen zu können, wird die 4 m lange Latte häufig durch ein Aufsatzstück mitunter bis zu 6 m verlängert. Mit Rücksicht auf die Konstruktion der Höhenlinien sollen die Geländepunkte möglichst so ausgewählt werden, daß durch sie einige Längenschnitte in der Richtung des größten Flächengefälles gebildet werden; die Latte wird aber bei größeren Höhenunterschieden zur Vermeidung häufiger Instrumentenwechsel nicht in diesen Richtungen, sondern ungefähr in Richtung der Höhenlinien von Punkt zu Punkt gebracht, damit auf ihr bis auf Entfernungen von mehreren 100 m bei einspielender Libelle abgelesen werden kann. Jedes derartige Nivellement muß stets von einem bekannten Höhenpunkte ausgehen und sollte zur Probe stets an einem solchen endigen. Es wird deshalb vor dem Flächennivellement zweckmäßig ein die aufzunehmende Fläche durchziehendes Fixpunktnivellement zur Einmessung passender Anschlußpunkte ausgeführt.

Bei der Ausführung von Flächennivellierungen arbeiten mit Vorteil drei Personen zusammen. Der Leitende führt den Plan, weist den (oder die) Lattenträger auf die zu bestimmenden Punkte, trägt diese in den Plan ein, numeriert sie hierbei fortlaufend und deutet die Geländeverhältnisse im Plane an. Der am Instrumente befindliche Beobachter liest (bei einspielender Libelle) auf der Latte ab und schreibt mit der fortlaufenden Punktnummer die in überwiegender Zahl als „Seitenblicke“ zu behandelnden Ablesungen ins Feldbuch nach § 95 ein. Damit die im Plane und im Feldbuche stehenden Nummern stets demselben Geländepunkt zugeordnet sind, muß etwa bei jedem 5. Punkt eine Kontrolle z. B. durch zwei Signale mit einer Pfeife, Hupe u. dgl. vereinbart werden.

Ist aber ausnahmsweise nur ein Ingenieur und ein Gehilfe verfügbar, dann wählt Ersterer zunächst in Begleitung des Letzteren je etwa 20 Punkte im Felde aus, bezeichnet sie durch beigesteckte Nummernspachteln, zeichnet diese Punkte in den Plan ein und schickt dann den Gehilfen mit der Latte (ev. unter Mitgabe des Planes) von Nummer zu Nummer weiter.

Die nach § 95 berechneten Höhen der einzelnen Punkte werden den entsprechenden Punktnummern im Plane beigeschrieben, so daß danach die Konstruktion der Höhenlinien durch Interpolation runder Höhen zwischen den passenden Punkten und Zeichnen der durch Punkte gleicher Höhe gehenden Linien ausgeführt werden kann.

16. Kapitel.

Trigonometrische Höhenbestimmung durch Messen von Höhenwinkeln.

§ 101. Die Meßinstrumente. Meßschärfe.

Zur Messung der Höhenwinkel dienen Theodolite mit Höhenkreisen und für weniger genaue Zwecke die an Kippregeln oder Bussoleninstrumenten angebrachten Höhenbogen. Wesentlich ist, daß an Instrumenten für bessere Höhenwinkelmessungen in Richtung des Höhenkreises eine sog. Höhenlibelle vorhanden ist (siehe § 28). Die notwendige Messungsschärfe $d\alpha$ des Höhenwinkels α richtet sich nach der verlangten Genauigkeit dh des zu bestimmenden Höhenunterschiedes h und der Entfernung a des Zielpunktes. Für kleine Höhenwinkel wird hinreichend genau:

$$\frac{dh}{a} = \frac{d\alpha''}{\varrho''} \quad \text{oder} \quad d\alpha'' = \frac{dh}{a} \cdot \varrho''.$$

Ist z. B. $dh = \pm 0{,}01$ m, $a \approx 400$ m, dann folgt

$$d\alpha = \pm \tfrac{1}{40\,000} \cdot 206265'' \approx \pm 5''.$$

Nach der Größe von $d\alpha$ richtet sich für ein gegebenes Instrument die Messungsart und die Wiederholungszahl. Für scharfe Messung kommt nur die Bestimmung des Höhenwinkels aus gemessenen doppelten Zenitdistanzen (Höhenvollkreis) in Frage, während weniger scharfe Höhenwinkel durch Messung der Zenitdistanzen bzw. Höhenwinkel in einer Fernrohrlage (siehe § 28) bestimmt werden.

§ 102. Trigonometrische Höhenberechnung ohne Berücksichtigung der Erdkrümmung und Strahlenbrechung.

Es sei A (Fig. 165) der Instrumentenstandpunkt, H_A dessen gegebene Höhe; J die Höhe der Kippachse über A (Instrumentenhöhe), B der Punkt mit der zu bestimmenden Höhe H_B, Z die Höhe der Zielmarke über B, a die horizontale Entfernung von A und B und α der Höhenwinkel.

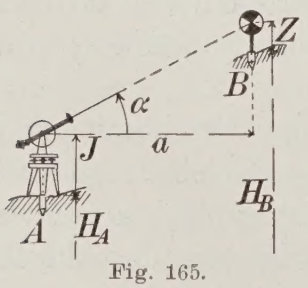


Fig. 165.

J, Z und α werden unmittelbar gemessen, a wird entweder durch Abgreifen aus einem Plane oder aus den gegebenen Lagekoordinaten von A und B oder durch direkte Messung bzw. eine kleine selbständige Triangulierung mit gemessener Grundlinie bestimmt.

Aus der Fig. 165 liest man dann ab:

$$H_B = H_A + J + a \operatorname{tg} \alpha - Z. \qquad (1)$$

Bei Rechnung bis auf 1 cm darf die Gleichung (1) bis zu Entfernungen von etwa 400 m verwendet werden (siehe § 103).

§ 103. Trigonometrische Höhenberechnung mit Berücksichtigung der Erdkrümmung und Strahlenbrechung.

Der von B nach A gehende Lichtstrahl (Fig. 166) verläuft in optisch verschieden dichten Teilen der Atmosphäre und wird deshalb eine Kurve — die Lichtkurve — beschreiben. Die an diese im Punkte A gezogene Tangente muß mit der Ziellinienrichtung in A zusammenfallen; sie weicht von der Sehne $\overline{A.B}$ um den Winkel r — die sog. terrestrische Strahlenbrechung oder Refraktion — ab, so daß in A der Höhenwinkel α gemessen wird.

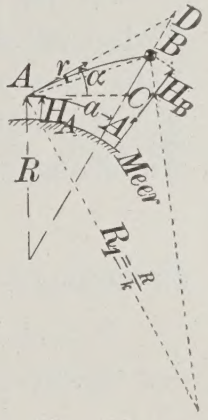


Fig. 166.

Ist a die horizontale Entfernung der beiden Punkte A und B und sind H_A und H_B deren Höhen, so darf, weil a im Vergleich zum Radius R stets klein ist, für $\overline{A.A'}$ auch $\overline{A.C}$ und in Verbesserungsausdrücken sogar $\overline{A.D}$ gesetzt werden. Deshalb wird:

$$\overline{C.B} = a \operatorname{tg}(\alpha - r).$$

Ferner ist mit Rücksicht auf das bei der Absteckung von Kreisbogen von der Tangente aus Gesagte (§ 91)

$$\overline{C.A'} = \frac{a^2}{2R} + \cdots \quad \text{(Einfluß der Erdkrümmung)}$$

und folglich

$$\overline{A'.B} = a \cdot \operatorname{tg}(\alpha - r) + \frac{a^2}{2R}. \qquad (1)$$

r ist abhängig von α und a, dann vom Luftdruck, der Luftfeuchtigkeit und -Temperatur.

Für gewöhnlich darf erfahrungsgemäß die Lichtkurve $\overset{\frown}{A.B}$ als Kreisbogen mit dem Radius $R_1 = \frac{R}{k}$ betrachtet werden, so daß dann wird

$$\overline{D.B} = \frac{a^2}{2R_1} + \cdots = \frac{a^2 \cdot k}{2R} \cdots \quad \text{(Einfluß der Strahlenbrechung)} \qquad (2)$$

und demnach

$$\overline{A'.B} = \overline{A'.C} + \overline{C.D} - \overline{D.B} = \frac{a^2}{2R} + a \cdot \operatorname{tg}\alpha - \frac{a^2 \cdot k}{2R}$$

$$= a \cdot \operatorname{tg}\alpha + \frac{a^2}{2R}(1-k). \qquad (3)$$

Die Strahlenbrechung wirkt also der Erdkrümmung entgegen.

Berücksichtigt man die Instrumentenhöhe J in A und die Zielhöhe Z in B wie in § 102, dann wird aus (3)

$$H_B = H_A + a \cdot \operatorname{tg}\alpha + \frac{a^2}{2R}(1-k) + (J-Z). \qquad (4)$$

R ist hierin der Krümmungshalbmesser des Normalschnittes der Erdoberfläche durch A in Richtung nach B in der mittleren Meereshöhe dieser beiden Punkte. Durch kleine Änderungen an R erleidet das Korrektionsglied bei verhältnismäßig kleinen a nur sehr geringe Änderungen, weshalb es meistens genügt, für R den Wert

$$R = 6\,370\,000 \text{ m}$$

zu nehmen.

k ändert sich täglich und stündlich etwas; für Deutschland wird der Gaußische Wert $k = 0{,}13$ viel gebraucht, so daß sich damit ergibt

$$\frac{1-k}{2R} \cdot a^2 = \frac{a^2_{\text{in km}}}{14{,}65} = \frac{a^2}{K}. \qquad (5)$$

Diese Korrektion läßt sich leicht mit dem gewöhnlichen Rechenschieber berechnen. Zur Übersicht wird:

a	Korrektion
500 m	0,017 m
1000	0,068
2000	0,272
5000	1,705
10000	6,82
20000	27,2

Zahlenbeispiel. Von A aus wurden nach mehreren umliegenden Punkten mit einem 20″ Nonientheodolit drei Sätze von doppelten Zenitdistanzen in der in § 28 A. erläuterten Weise (nach jedem Satze wurde der Höhenkreis verdreht) gemessen und hierbei für den Zielpunkt B gefunden.

Standpunkt A. $J = 0{,}320$ m.

Kreislage $\frac{l}{r}$.

Zielpunkt	Nonius I	Non. II	Mittel	$2z = r - l$ / z	Mittel der z	Bemerkungen	v	vv
B . . l	276° 10′ 40″	10′ 20″	276° 10′ 30″	170° 35′ 00″	85° 17′ 13″	$Z=0$	− 17″	289
r	86 45 40	45 20	86 45 30	85 17 30				
B								
				85 17 10			+ 3	9
B								
				85 17 00			+ 13	169
						Σ	− 1	467

Der mittlere Fehler des Gesamtmittels aller Zenitdistanzen folgt zu $\sqrt{\frac{467}{2.3}} = \pm 9''$, also wird: $\alpha = + 4^0\,42'\,47'' \pm 9''$.

Die gegebenen rechtwinkligen Koordinaten von A und B nebst der Höhe von B über N. N. sind:

Punkt	y	x	Höhe
B	+ 16 831,4	+ 52 632,7	161,76
A	+ 17 435,6	+ 53 188,1	
Unterschied	− 604,2	− 555,4	

Aus Gleichung (4) folgt sofort:

$$H_A = H_B - a \cdot \operatorname{tg}\alpha - \frac{a^2}{2R} \cdot (1 - k) - (J - Z)$$

$y_B - y_A$	2.78 118$_n$	
$E \frac{\sin}{\cos} (A\,.\,B)$	0.13 299	
$x_B - x_A$	2.74 461$_n$	
$\operatorname{tg}(A\,.\,B)$	0.03 657	
a	2.91 417	820,7
$\operatorname{tg}\alpha$	8.91 614	
$a\,.\,\operatorname{tg}\alpha$	1.83 031	+ 67,73

$$H_B = 161{,}76$$
$$-a \cdot \operatorname{tg}\alpha = -67{,}73 \pm 0{,}04$$
$$-\frac{a^2}{K} = -0{,}05$$
$$-(J-Z) = -0{,}32$$
$$\boldsymbol{H_A = +93{,}73 \pm 0{,}04}$$

$$dh \approx \pm \frac{9''}{206\,265''} \cdot 820{,}7 = \pm 0{,}04.$$

§ 104. Bemerkungen zu § 103.

1. Der jeweilige Wert des Beiwertes k kann aus (durch Nivellieren) gegebenem H_A, H_B und a und dem jeweilig gemessenen α mit Gleichung (4) bestimmt werden.

2. Der Erdkrümmungs- und Strahlenbrechungseinfluß kann (wie bei dem Nivellieren aus der Mitte) fast vollständig eliminiert werden durch Messung der Höhenwinkel α_1 und α_2 nach A und B von dem Hilfspunkte C aus, der von A und B nahezu gleich weit entfernt ist. Sind a_1 und a_2 die Entfernungen $\overline{C.A}$ und $\overline{C.B}$, so ist nach Gleichung (4) und (5):

$$H_A = H_C + a_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + \frac{a_1^2}{K},$$

$$H_B = H_C + a_2 \operatorname{tg} \alpha_2 + \frac{a_2^2}{K},$$

folglich:
$$H_A - H_B = a_1 \operatorname{tg} \alpha_1 - a_2 \operatorname{tg} \alpha_2 + \frac{1}{K}(a_1^2 - a_2^2). \qquad (6)$$

Für $a_1 = a_2$ fällt das Korrektionsglied fort, auf alle Fälle wird es sehr erheblich kleiner.

3. Wenn zwei Beobachter gleichzeitig in dem Endpunkte A bzw. B die Höhenwinkel α_1 bzw. α_2 nach dem anderen Endpunkt messen, so kann unter der Annahme gleicher Refraktion in A und B sowohl der Höhenunterschied dieser beiden Punkte als auch die Refraktionskonstante berechnet werden. Ist a die Entfernung $\overline{A.B}$, so folgt aus Gleichung (4)

$$H_B = H_A + a \operatorname{tg} \alpha_1 + \frac{a^2}{K},$$

$$H_A = H_B + a \operatorname{tg} \alpha_2 + \frac{a^2}{K},$$

durch Subtraktion:
$$H_B - H_A = \frac{a(\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2)}{2}, \qquad (7)$$

durch Addition:
$$K = -\frac{2a}{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2}. \qquad (8)$$

17. Kapitel.

Höhenbestimmung durch Luftdruckmessung.

Die wichtigsten Instrumente zur Luftdruckmessung sind Quecksilber- und Federbarometer, sowie Siedethermometer. Bei den ersten wird der Luftdruck durch das Gewicht einer Quecksilbersäule von abgemessener Höhe, bei den zweiten mit einer Art Federwage und

bei den letzten Instrumenten aus der gemessenen Temperatur des Dampfes siedenden Wassers bestimmt.

§ 105. Quecksilberbarometer.

Die Quecksilberbarometer kommen als Gefäß- oder als Heberbarometer zur Verwendung.

Beim Gefäßbarometer (Fig. 167) taucht das etwa 80 cm lange, oben meist etwa 9 mm weite Barometerrohr mit dem unteren Ende in ein größeres Gefäß, der Maßstab M ist unten mit einer Spitze S versehen, die scharf auf die spiegelnde Quecksilberoberfläche im Gefäße mit Hilfe einer Stellschraube s eingestellt werden kann. Die untere Fläche eines das Rohr umschließenden Ringes kann meist mittels Zahntriebes auf den höchsten Punkt der Kuppe eingestellt werden, so daß dann auf dem Maßstabe M die Barometerablesung B gemacht werden kann. Zur Bestimmung der Temperatur des ganzen Barometers (einschließlich der des Quecksilbers) ist ein Thermometer T vorhanden. Da das Einstellen der Spitze auf die Quecksilberoberfläche durch Verschieben des Maßstabes zeitraubend ist, so macht man häufig mittels eines durch eine Schraube beweglichen Gefäßbodens (Leder) oder durch verschieden starkes Eintauchen eines Schwimmkörpers die Quecksilberoberfläche veränderlich oder man stellt die Spitze bei einem mittleren Barometerstande B_m scharf ein und korrigiert die Ablesung B um die Veränderung des Quecksilberspiegels im Gefäße (Gefäßkorrektion). Ist d der Quecksilberquerschnitt im oberen Rohre, D der Quecksilberquerschnitt im Gefäße und k die der Änderung $B - B_m$ entsprechende Hebung des Horizonts im Gefäße, so ist $k \cdot D = (B - B_m)\, d$ oder: Gefäßkorrektion $k = (B - B_m)\, \frac{d}{D}$.

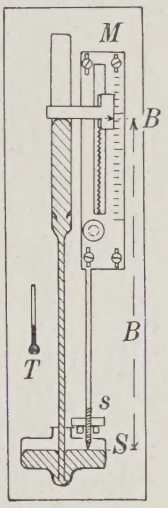


Fig. 167.

Diese Gefäßkorrektion könnte auch durch Verkürzen der Barometerteilung (kleinere Teilungsintervalle) berücksichtigt werden.

Bei dem Heberbarometer (Fig. 168) werden die beiden Einstellringe auf die Kuppen im oberen und unteren Schenkel eingestellt. Die Barometerablesung ergibt sich dann durch die Summe bzw. Differenz der oberen und unteren Ablesung, je nachdem der Maßstabnullpunkt innerhalb bzw. außerhalb von o und u liegt. An Barometern, die für die Reise bestimmt sind, wird im untern Knie ein eiserner Hahn angebracht, der nach Füllung des oberen Schenkels (durch Neigung des Barometers) geschlossen wird.

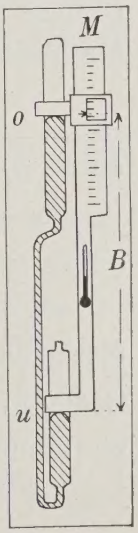


Fig. 168.

Die Barometerrohre sollen mit chemisch reinem Quecksilber (spez. Gewicht 13,59593 bei 0^0 C) gefüllt sein und es darf sich bei langsamem Neigen des Rohres im oberen Teile kein Luftbläschen (größer als etwa 1 mm) zeigen.

§ 106. Korrektionen der Quecksilberbarometerablesungen.

An den Ablesungen sind, abgesehen von der Gefäßkorrektion, folgende Verbesserungen anzubringen:

1. Wärmeverbesserung, um diejenige Ablesung zu erhalten, welche gemacht würde, wenn das Quecksilber die Temperatur 0^0 hat und der Maßstab richtig ist.
2. Verbesserung wegen der Kapillardepression.
3. Verbesserung wegen ungleicher Schwerebeschleunigung an verschiedenen Orten der Erde.

1. Temperaturkorrektion. Das erwärmte Quecksilber wird leichter und deshalb vom gleichen Luftdrucke höher gehoben. Ist deshalb B die Länge der Quecksilbersäule bei t^0, B_0 die entsprechende auf 0^0 reduzierte und $q = 0{,}000180$ der Ausdehnungskoeffizient von Quecksilber für 1^0, so ist:

$$B = B_0(1 + qt) \quad \text{oder} \quad B_0 = B(1 - qt + \cdots). \tag{1}$$

Die Länge B wird meist mit einem Maßstabe gemessen, der sich durch die Wärme ebenfalls verändert. Stellt B_t die Barometerablesung bei t^0 Maßstabtemperatur vor, so wird, wenn der Maßstab bei 0^0 richtig und m sein Ausdehnungskoeffizient für 1^0 ist, die Länge eines Maßstabteiles bei t^0 zu $(1 + m \cdot t)$ und folglich diejenige von B_t Teilen zu

$$B = B_t(1 + mt). \tag{2}$$

Aus (2) und (1) folgt:

$$B_0 = B_t(1 + mt)(1 - qt) = B_t(1 - (q - m) \cdot t)$$

oder:

$$B_0 - B_t = - B_t \cdot (q - m) \cdot t. \tag{3}$$

Ist der Maßstab aus Messing mit $m = 0{,}000019$, so findet man aus Gleichung (3) die für die Berechnung mit dem Rechenschieber sehr bequeme Formel

$$B_0 - B_t = - \frac{B_t}{620} \cdot \frac{t}{10}. \tag{3'}$$

2. Kapillardepression. Das Quecksilber wird von Glas abgestoßen; deshalb ist die Quecksilberoberfläche in Glasröhren gewölbt und der höchste Punkt dieser Kuppe steht in engen Röhren merklich

tiefer, als wenn keine solche Abstoßung vorhanden wäre. Diese Differenz bezeichnet man als Kapillardepression δ. Sie ist vom Rohrdurchmesser und von der Kuppen- oder Meniskushöhe abhängig. Eine mit den Angaben in Kohlrausch (Kleiner Leitfaden der praktischen Physik, 1900) gefertigte Darstellung gibt Fig. 169. Den

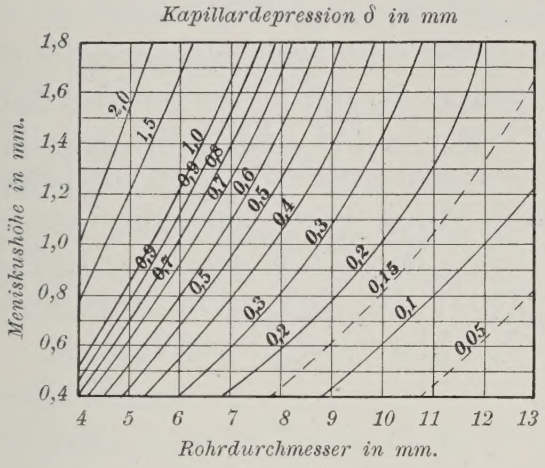


Fig. 169.

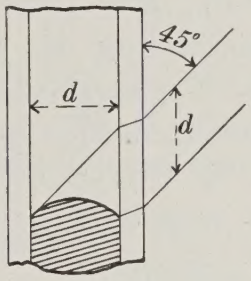


Fig. 170.

Rohrdurchmesser d bestimmt man nach Jordan in einfacher Weise durch Visieren längs eines 45°-Winkels nach Andeutung der Fig. 170.

3. Schwerekorrektion. Im Quecksilberbarometer wird der Luftdruck durch den Bodendruck einer Flüssigkeitssäule gewogen und es würden deshalb an verschiedenen Orten der Erde demselben Luftdrucke ungleich hohe Flüssigkeitssäulen das Gleichgewicht halten, im Falle die Schwerebeschleunigungen verschieden groß sind. Man reduziert meist alle Messungen auf die Schwerebeschleunigung g_0^{45}, die in der Meereshöhe unter 45° Breite vorhanden ist. Ein anderer Ort mit der Meereshöhe H und der Breite φ besitzt dann hinreichend genau die Schwerebeschleunigung

$$g = g_0^{45}(1 - \beta \cdot \cos 2\varphi)\left(1 - \frac{2H}{r}\right) \approx g_0^{45}\left(1 - \beta \cos 2\varphi - \frac{2H}{r}\right), \quad (1)$$

worin nach Helmert: $g_0^{45} = 9{,}80617$ m; $\beta = 0{,}002648$ genommen werden darf. Der Erdradius kann zu $r = 6\,370\,000$ m gesetzt werden.

Die Quecksilberhöhe B drückt am Orte mit der Schwerebeschleunigung g auf die Flächeneinheit mit $B \cdot q \cdot g$, wenn q das spezifische Gewicht des Quecksilbers ist. Der gleiche Druck wird in der Meeresfläche unter 45° Breite durch die Druckhöhe B_0^{45} erzeugt, folglich

$$B \cdot q \cdot g = B_0^{45} \cdot q \cdot g_0^{45} \text{ oder } B_0^{45} = B\frac{g}{g_0^{45}} = B\left(1 - \beta \cos 2\varphi - \frac{2H}{r}\right). \quad (2)$$

In Korrektionsform geschrieben erhält man aus (2)

$$B_0^{45} - B = -B\beta \cos 2\varphi - \frac{2B \cdot H}{r}, \quad (3)$$

z. B. für

$$\varphi = 52^0\,16'; \quad H = 70 \text{ m}; \quad B = 755;$$
$$B_0^{45} - B = +\,0{,}502 - 0{,}017 = +\,0{,}49 \text{ mm}.$$

Diese Korrektion ist für große Gebiete hinreichend konstant und muß stets vor der Benutzung der Quecksilberbarometerangaben zum Vergleiche mit Federbarometerablesungen (u. dgl.) angebracht werden.

Vollständiges Zahlenbeispiel: Die Ablesung am Orte $\varphi = 52^0\,16'$, $H = 70$ m an der Kuppe ergab (nach leichtem Beklopfen zur Überwindung der Reibung) $B_t = 757{,}0$ (nach Einstellen auf den Rand der Kuppe 755,7) bei $t = +\,19{,}5^0$. Die Gefäßkorrektion folgt für das benutzte Barometer aus $k = +\,0{,}007\,(B - 755)$, sein Messingmaßstab ist bei 0^0 richtig, der innere Rohrdurchmesser ist 9,1 mm.

Die Korrektionen werden:

Gefäßkorrektion:	$+\,0{,}01$
Wärmekorrektion:	$-\frac{757}{620} \cdot \frac{+\,19{,}5}{10} = -\,2{,}37$
Kapillardepression (bei $757{,}0 - 755{,}7 = 1{,}3$ Kuppenhöhe):	$+\,0{,}36$
Schwerekorrektion:	$+\,0{,}49$
	$B_0^{45} = 755{,}49$ mm.

Vergleicht man diesen Wert mit den entsprechenden Angaben eines besonders feinen Barometers (Normalbarometer), dann zeigt sich in der Regel noch eine kleine Abweichung, die als sog. Standkorrektion allen Ablesungen zuzufügen ist. Diese Standkorrektion ist längere Zeit genügend konstant und rührt von kleinen Mängeln des Barometers her (z. B. unvollkommenem Vakuum).

§ 107. Feder- oder Aneroidbarometer.

Die Federbarometer besitzen eine luftleer oder nahezu luftleer ausgepumpte Metalldose D (der schematischen Fig. 171 und 172) mit elastischem, gewelltem Deckel. Durch eine kräftige Feder F wird das Eindrücken dieses Deckels durch den Druck der Luft verhindert. Die Federspannkraft und der Luftdruck halten sich demnach das Gleichgewicht und bei verschieden starkem Luftdrucke wird deshalb die Feder verschieden stark gebogen, so daß ihr bewegliches Ende sich um sehr kleine Beträge verschiebt. Diese sehr kleine Verschiebung wird entweder mit Hilfe eines stark vergrößernden Strichmikroskopes (wie im Reitz-Deutschbeinschen Instrumente) oder nach mehrmaliger starker Hebelübersetzung durch Ablesen eines Zeigers auf einer kreis-

förmigen Teilung (Fig. 171) wie bei den Instrumenten von Vidie-Naudet, Bohne (Berlin), Lufft (Stuttgart) oder mit Hilfe einer Mikrometerschraube (Fig. 172), wie bei den Goldschmidschen Instrumenten (Usteri-Reinacher in Zürich) gemessen.

In Fig. 171 kann durch Verschieben der Hülse h (oder Ändern eines sonstigen Hebelarmes) das Übersetzungsverhältnis Dosenweg : Zeigerweg geändert werden. Durch Anziehen der Schraube s wird die Federspannung und damit der Zeigerstand geändert. An passender Stelle ist ein Thermometer im Barometer angeordnet.

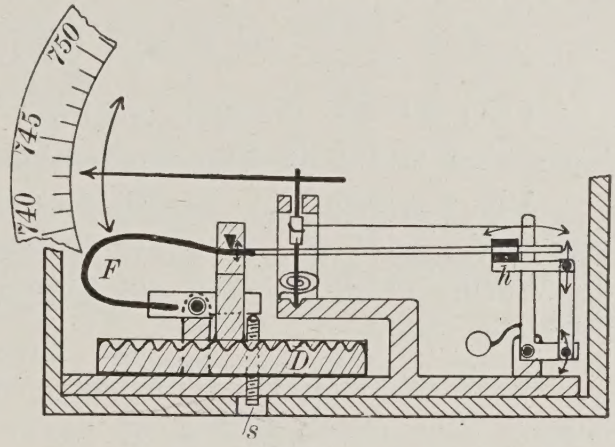


Fig. 171.

In Fig. 172 ist die Mikrometerschraube S mit einer in 100 Teile geteilten Trommel verbunden; durch eine ganze Schraubenumdrehung wird die Strichmarke M um einen Teil der Skala A verschoben. Damit die Berührung zwischen der Mikrometerschraube S und dem die Marke M tragenden Hebelarm stets gleichmäßig ist, ist dieser mit einer feinen Feder, der sog. Fühlfeder, f versehen, die am Ende die Strichmarke M_1 trägt. Wird durch Drehen der Mikrometerschraube M_1 auf M gestellt, dann übt die Meßschraube stets den gleichen (kleinen) Druck auf den Dosendeckel aus. Bei Nichtbenutzung wird die Mikrometerschraube zurückgedreht und dann wird durch einen Schieber der die Marke M tragende Hebel von der Meßfeder F abgehoben. Neben dem Maßstäbchen A ist im Gehäuse meist ein Thermometer eingelassen.

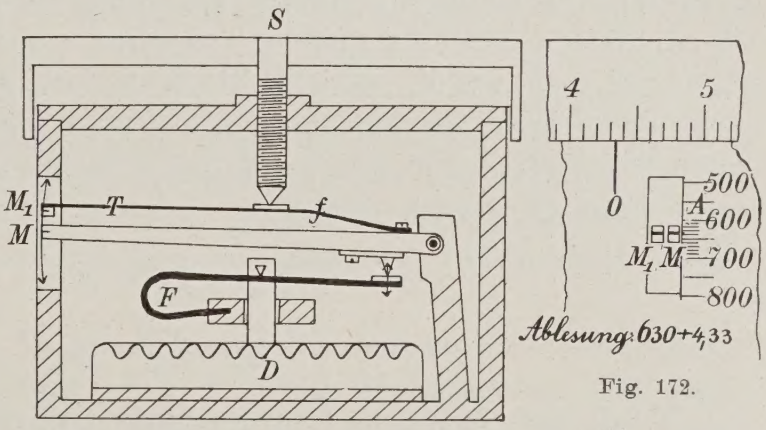


Fig. 172.

Zu allen Federbarometern ist zu bemerken, daß sie vor Stößen und raschen Temperaturänderungen (eine erwärmte Feder besitzt meist geringere Spannkraft, weshalb der Zeiger beim Erwärmen des Barometers meist steigt, siehe § 108) sorgfältig geschützt werden müssen. Deshalb werden sie im Felde stets in wattierten Holzgehäusen verwendet, aus denen sie nicht herausgenommen werden sollen.

§ 108. Korrektionen der Federbarometerablesungen.

Die Federbarometerablesung A_t dient zur Bestimmung des entsprechenden, in § 106 mit B_0^{45} bezeichneten Quecksilberbarometerstandes, für den hier der Einfachheit halber B_0 gesetzt wird. Zwischen diesen beiden besteht eine Beziehung von der Form:

$$B_0 = A_t + (W) + (T) + S. \tag{1}$$

(W) ist die Wärmekorrektion, (T) die Teilungs- oder Skalenkorrektion und S die Standkorrektion für die Federbarometerablesung.

Die Formeln zur Berechnung dieser Korrektionen können auf verschiedenen Wegen gefunden werden; am einfachsten ermittelt man die Wärmekorrektion und die Teilungskorrektion näherungsweise in folgender Weise:

1. Wärmekorrektion (W). Man setzt das Federbarometer längere Zeit (etwa 1 Stunde, damit alle Teile gleiche Temperatur annehmen) bei möglichst konstantem Barometerstande sehr verschiedenen Temperaturen aus und liest den Zeigerstand A_t, die Instrumententemperatur t und gleichzeitig ein zweites ruhendes Barometer B_t ab. Zu diesem Zwecke bringt man z. B. im Winter das Barometer aus einem geheizten Raum (in gleiche Höhe) ins Freie. Verwendet man etwa ein Quecksilberbarometer als ruhendes Barometer und sind B_1, B_2 ... dessen auf eine gleiche Temperatur reduzierte Ablesungen und A_{t_1}, t_1; A_{t_2}, t_2 ... die gleichzeitigen Federbarometerablesungen nebst den zugehörigen Instrumententemperaturen, so folgt aus Gleichung (1), wenn die Änderungen der Teilungskorrektion und der Standkorrektion vernachlässigt werden dürfen:

$$(W)_1 = B_1 - A_{t_1},$$

$$(W)_2 = B_2 - A_{t_2}.$$

Trägt man in einem Koordinatensystem die Werte $(W)_1, (W)_2 \ldots$ als Ordinaten zu den Abszissen t_1, t_2 ... auf und verbindet die erhaltenen Punkte durch eine ausgleichende Linie, so kann man aus dieser Zeichnung für gegebenes t die entsprechende Wärmekorrektion (W) entnehmen (nach ev. Parallelverschiebung der ausgleichenden Linie bis sie durch $t = 0^0$, $(W) = 0$ hindurchgeht).

Z. B. für das (kompensierte) Federbarometer Nr. 411 der geodätischen Sammlung der Braunschweiger Techn. Hochschule wurde gefunden:

Zeit	B	A_t	t	$(W) = B - A_t$
Januar 12				
$12^h\ 0^m$	764,70	765,15	+ 18,7	— 0,45
2 45	764,77	764,8	— 0,8	— 0,03
4 50	765,28	765,75	+ 16,5	— 0,47
Januar 13				
$10^h\ 0^m$	766,33	766,15	— 5,0	+ 0,18
12 45	765,62	766,1	+ 17,8	— 0,48
4 15	765,69	765,75	— 0,3	— 0,06
.	.	.	.	.

Der Auftrag dieser Werte t und (W) nebst weiteren in der Tabelle weggelassenen Koordinaten ergab die in Fig. 173 gezeichneten Punkte. Durch diese kann hinreichend scharf eine ausgleichende Gerade gelegt werden, so daß die Korrektion auf 0^0 Instrumenttemperatur folgt:

$$(W) = \frac{-0{,}72}{32{,}5} = -0{,}022 \cdot t. \quad (2)$$

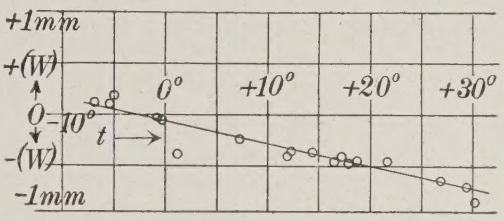


Fig. 173.

Sehr häufig genügt die Gleichung einer geraden Linie zur Darstellung der Wärmekorrektion, der Beiwert von t heißt dann Wärmekoeffizient. Er liegt meist in der Nähe von $-0{,}1$, weil die Federspannkraft mit wachsender Temperatur kleiner wird, so daß mit der Erwärmung des Barometers meist ein Steigen verbunden ist. Läßt man aber in die Barometerdose absichtlich etwas Luft ein, dann kann erreicht werden, daß deren Ausdehnung durch die Wärme die ungleiche Federspannkraft ausgleicht, oder man stellt die Hebel aus zwei verschiedenen Metallen her. — Derartige Barometer heißen kompensierte Barometer.

Mitunter zeigt sich, daß der Wärmekoeffizient an sehr verschiedenen Stellen der Barometerteilung, d. h. bei sehr verschiedenen Barometerständen bzw. Federspannungen (sehr wenig) wechselnde Größe besitzt; im vorherigen Zahlenbeispiel wurden Barometerstände von $730 \div 770$ mm verwendet.

2. Teilungs- und Standkorrektion. Vergleicht man die auf gleiche Instrumententemperatur, z. B. auf Null Grad, bezogenen Federbarometerablesungen A_0 mit den gleichzeitigen reduzierten Ständen B_0 des Quecksilberbarometers bei verschiedenen Luftdrucken, die man durch Verbringen beider Barometer unter eine Luftpumpe, oder durch Mitnahme beider Instrumente bei einer Bergbesteigung er-

halten kann, so zeigt sich, daß die beiden Ablesungen meist um eine veränderliche Größe voneinander abweichen. Nach Gleichung (1) wird:

$$B_0 - (A_t + (W)) = (T) + S. \qquad (3)$$

Trägt man in ein rechtwinkliges Koordinatensystem $A_0 = A_t + (W)$ als Abszissen und $(T) + S$ als Ordinaten ein und verbindet diese Punkte durch eine ausgleichende Kurve, dann liefert diese in ähnlicher Weise wie bei 1. für gegebenes A_0 das zugehörige $(T) + S$. In der Regel nimmt man die Teilungsverbesserung (T) für einen runden Wert von A_0, z. B. für $A_0' = 750$ gleich Null an, so daß S die Standkorrektion für die Zeigerstellung A_0' vorstellt.

Z. B. für das oben benutzte Federbarometer Nr. 411 wurde gefunden:

Zeit	B_0	$A_0 = A_t - W \cdot t$	$B_0 - A_0$
6./II. 10h	614,5	614,3	+ 0,2
3½	633,8	633,2	+ 0,6
7./II. 8¼	653,3	653,1	+ 0,2
4	662,1	661,7	+ 0,4
.	.	.	.
13./II. 11	748,3	748,6	− 0,3
4	762,3	762,6	− 0,3

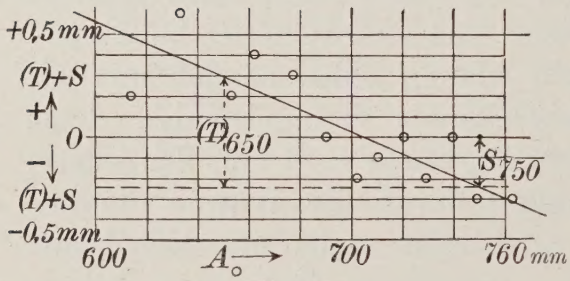


Fig. 174.

Damit ergab sich Fig. 174 und nach dieser wird die Gleichung der ausgleichenden Geraden

$$(T) = S_{750} + 0{,}00533\,(750 - A_0). \qquad (4)$$

Kann, wie hier, die Teilungskorrektion (T) durch eine lineare Funktion $T \cdot (K - A_0)$ ausgedrückt werden, dann bezeichnet man T als Teilungsbeiwert.

Die Reduktionsformel für das Aneroid Nr. 411 würde nach (3) und (4) lauten:

$$B_0 = A_t - 0{,}022 \cdot t + 0{,}00533\,(750 - A_0) + S. \qquad (5)$$

Die Erfahrung lehrt, daß sich der Wärme- und der Teilungsbeiwert mit der Zeit bei vorsichtiger Behandlung des Barometers verhältnismäßig wenig verändern, die Standkorrektion S ändert sich aber durch Erschütterungen u. dgl. leichter, so daß sie in der Regel vor und nach jeder längeren Messung durch Vergleichen des Barometers mit einem ruhenden Barometer bestimmt werden muß. Wegen der elastischen Nachwirkung der Federn müssen die Luftpumpenversuche

unter Einschaltung eines großen Hohlraumes auf eine längere Zeit (mehrere Tage) verteilt und auch bei Bergbesteigungen sollte nach Ankunft auf einem höheren (tieferen) Punkte mit der Ablesung etwas (einige Minuten) gewartet werden. Durch leichtes Beklopfen des Barometers mit der Fingerspitze werden die in den Lagern wirkenden kleinen Reibungswiderstände vor jeder Ablesung leichter überwunden.

§ 109. Bestimmung des Barometerstandes mit Siedethermometern.

Die Temperatur des Dampfes, der an der Luft siedendem, chemisch reinen Wasser entweicht, ist vom Drucke, der auf dem Wasser lastet, also vom Barometerstande, abhängig. Nach den Untersuchungen Regnaults siedet das Wasser bei den in der folgenden Tabelle[1]) gegebenen Temperaturen und Drucken (mm Quecksilber bei normaler Schwere im Meeresspiegel (g_0^{45})):

		1. Differenz	2. Differenz	3. Differenz
85° C bei	$B = 433{,}79$ mm			
		+ 92,21		
90	526,00		+ 15,80	
		+ 108,01		+ 2,18
95	634,01		+ 17,98	
		+ 125,99		+ 2,59
100	760,00		+ 20,57	
				+ 3,20

Durch Bestimmung der Siedetemperatur kann man demnach durch Interpolation leicht den zugehörigen Barometerstand ableiten, z. B. für 97,000° wird

$$B = 634{,}01 + 125{,}99 \binom{2/5}{1} + 20{,}57 \cdot \binom{2/5}{2} + 3{,}20 \binom{2/5}{3} =$$

$$= 634{,}01 + 50{,}396 - 2{,}465 + 0{,}205 - \cdots = 682{,}14 \text{ mm}.$$

1° Siedetemperaturänderung entsprechen demnach etwa 25 mm Druckänderung. Man muß deshalb die Siedetemperatur auf 0,01° bestimmen, um den Barometerstand auf 0,3 mm zu erhalten. Man benutzt dazu feine von 92° bis 101° in $^1/_{100}{}^0$ geteilte Thermometer mit großem Quecksilberbehälter und hängt sie bei den Siedeversuchen in ein Glasrohr, durch das der Wasserdampf strömt, vollständig ein. Zur Eichung dieser Siedethermometer bestimmt man bei sehr verschiedenen Baro-

1) Aus Landolt-Börnstein, Physikalisch-chemische Tabellen. 3. Auflage, Berlin 1905.

meterständen (in der Ebene und auf einem Berge) die gleichzeitig entsprechenden Siedetemperaturen und Barometerstände (z. B. mit einem Quecksilberbarometer).

§ 110. Die barometrischen Höhenformeln.

Denkt man sich im Punkte (1) (Fig. 175), der in der geographischen Breite φ und H m über dem Meere liegt, die unterhalb liegende Luft entfernt, so drückt der über (1) vorhandene lotrechte Luftzylinder im Punkte (1) mit der Kraft p auf die Flächeneinheit. In der Höhe dH über (1) also in (1′) ist der Druck um dp kleiner, so daß sich, wenn Δ das spezifische Gewicht (Dichte) der Luft und g die Schwerebeschleunigung zwischen (1) und (1′) vorstellt, ergibt:

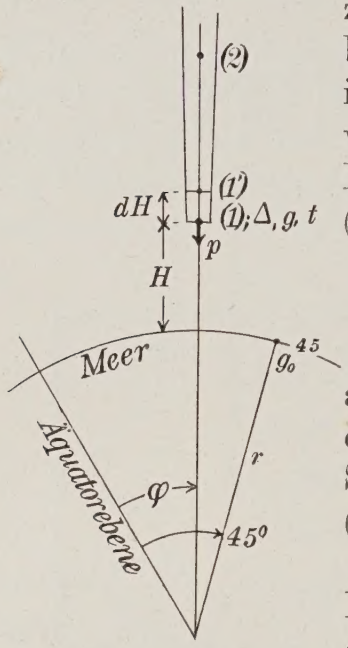


Fig. 175.

$$dp = - dH \cdot \Delta \cdot g. \qquad (1)$$

Die Dichte Δ der atmosphärischen Luft ist abhängig vom Drucke p, der Temperatur t und dem jeweiligen Wasserdampfgehalt; auch die Schwerebeschleunigung g ist zwischen den Punkten (1) und (2) der Fig. 175 veränderlich.

Durch physikalische Messungen hat sich die Dichte trockener Luft (mit 0,04 % CO_2) von 0°, die im Meeresniveau unter 45° geogr. Breite, d. h. bei der Schwerebeschleunigung g_0^{45} (siehe § 105) unter dem Drucke einer 0,760 m hohen Quecksilbersäule von 0° (spez. Gewicht $q = 13{,}59\,593$) steht, ergeben zu:

$$\Delta_0^{45} = 0{,}001\,293\,09^1) \text{ bei } p_0^{45} = 0{,}760 \cdot q \cdot g_0^{45}. \qquad (2)$$

Nach dem Boyle-Mariotteschen Gesetze ist dann bei 0° unter dem Drucke p die Luftdichte:

$$\Delta_0 = \Delta_0^{45} \cdot \frac{p}{p_0^{45}}. \qquad (3)$$

Da sich nach Gay-Lussac die Volumina, die von der gleichen Gasmenge gefüllt werden, umgekehrt wie die entspr. Dichten verhalten, und bei t^0 das bei 0° v_0 betragende Volumen in $v_0(1 + \alpha \cdot t)$ übergeht (α = Ausdehnungskoeffizient der Gase), so ist

$$\frac{\Delta}{\Delta_0} = \frac{v_0}{v_0(1 + \alpha \cdot t)} \quad \text{oder} \quad \Delta = \Delta_0 \cdot \frac{1}{1 + \alpha \cdot t}. \qquad (4)$$

1) Z. B. Landolt-Börnstein, Physikal.-chemische Tabellen, 3. Aufl. 1905.

Nach § 106 wird hinreichend genau die Schwerebeschleunigung im Punkte (1) gefunden durch

$$g = g_0^{45}(1 - \beta \cos 2q)\left(1 - \frac{2H}{r}\right). \tag{5}$$

Setzt man die Ausdrücke (2) bis (5) in Gleichung (1) ein, so folgt:

$$\left.\begin{aligned} dp &= -\,dH \cdot p\left\{\frac{\Delta_0^{45}(1 - \beta\cos 2\varphi)}{(1+\alpha\cdot t)\cdot 0{,}760\cdot q}\right\}\cdot\left(1 - \frac{2H}{r}\right) \\ \text{oder}\quad \frac{dp}{p} &= -\{\div\}\cdot\left(1 - \frac{2H}{r}\right)\cdot dH. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Die Abhängigkeit der Temperatur t von der Höhe H ist noch nicht genügend erforscht; nimmt man deshalb in Gleichung (6) die Temperatur t als konstante Mitteltemperatur zwischen den Punkten (1) und (2) und integriert, dann kommt:

$$lp = -\{\div\}\left(H - \frac{H^2}{r}\right) + C. \tag{7}$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstante setzt man

für den oberen Punkt (2): $p = B_2;\ H = H_2,$
für den unteren Punkt (1): $p = B_1;\ H = H_1,$

$$H_2 - H_1 = h \quad \text{und} \quad \frac{H_1 + H_2}{2} = H_m \tag{8}$$

(B_2 und B_1 verstehen sich in einheitlichem Maße, also z. B. auf gleiche Schwerebeschleunigung bezogen) in Gleichung (7) ein. Führt man die natürlichen Logarithmen in gemeine durch Beifügen des Faktors $\log 2{,}71828 \ldots = M$ über, so wird:

$$\log B_2 = -M\{\div\}\left(H_2 - \frac{H_2^2}{r}\right) + C,$$

$$\log B_1 = -M\{\div\}\left(H_1 - \frac{H_1^2}{r}\right) + C,$$

durch Subtrahieren: $\log B_1 - \log B_2 = M\cdot\{\div\}\left(H_2 - H_1 - \frac{H_2^2 - H_1^2}{r}\right) =$

$$= M\{\div\}\left(h - \frac{h\cdot 2H_m}{r}\right) = h\left(1 - \frac{2H_m}{r}\right)M\{\div\}. \tag{9}$$

Die Auflösung dieser Gleichung nach h liefert, da β und $\frac{2H_m}{r}$ sehr klein sind, hinreichend scharf:

$$h = \log\frac{B_1}{B_2}\cdot\frac{0{,}76\cdot q}{\Delta_0^{45}\cdot M}(1+\alpha\cdot t)(1+\beta\cos 2\varphi)\left(1 + \frac{2H_m}{r}\right). \tag{10}$$

Diese Gleichung ist unter den gemachten Voraussetzungen gültig, wenn die atmosphärische Luft ganz trocken ist. Da in ihr aber stets eine veränderliche Menge Wasserdampf enthalten ist, dessen Dichte nur nahezu $^5/_8$ (genauer 0,623) der Luftdichte beträgt, so ist für Δ_0^{45} in Gleichung (10) die Dichte (Δ_0^{45}) des Luft-Wasserdampfgemisches, für das hinreichend genau gleiches Mischungsverhältnis in verschiedenen Höhen angenommen werden darf, zu setzen. Bedeuten deshalb e das Mittel der in den Punkten (1) und (2) (Fig. 175) z. B. mit einem Psychrometer gemessenen Dunstdrucke, B das Mittel der in diesen Punkten gemessenen Drucke des Luft-Dampfgemisches, so ist $B - e$ der Druck der trockenen Luft. Wenn B und e durch Multiplikation mit dem gleichen Faktor in p_0^{45} und e_0^{45} (siehe Gleichung (2)) übergeführt sind, dann ergibt sich, da die Dichte (Δ_0^{45}) des Gemisches gleich der Summe der Dichten der einzelnen Teile ist, nach Gleichung (3)

$$(\Delta_0^{45}) = \frac{\Delta_0^{45}}{p_0^{45}}(p_0^{45} - e_0^{45}) + \frac{0{,}623\,\Delta_0^{45}}{p_0^{45}} \cdot e_0^{45} = \Delta_0^{45}\left(1 - \frac{0{,}377 \cdot e_0^{45}}{p_0^{45}}\right) =$$

$$= \Delta_0^{45}\left(1 - \frac{0{,}377 \cdot e}{B}\right). \qquad (11)$$

Setzt man den Wert (Δ_0^{45}) aus (11) in Gleichung (10) für Δ_0^{45} ein, so erhält man (nach Laplace, Soldner, Rühlmann, Jordan):

$$\left.\begin{aligned} h &= \frac{0{,}76 \cdot q}{\Delta_0^{45} \cdot M} \cdot \log \frac{B_1}{B_2} \cdot \left(1 + 0{,}377 \cdot \frac{e}{B}\right) \cdot (1 + \alpha \cdot t)(1 + \beta \cos 2\varphi) \cdot \\ &\qquad \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{H_m}{r}\right) \\ &= 18\,399{,}7 \log \frac{B_1}{B_2} \cdot \left(1 + 0{,}377 \cdot \frac{e}{B}\right) \cdot (1 + 0{,}00367 \cdot t) \cdot \\ &\qquad \cdot (1 + 0{,}002648 \cdot \cos 2\varphi) \cdot \left(1 + 2\,\frac{H_m}{6\,370\,000}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Diese vollständige Barometerformel (12) wird aber nur in einzelnen Fällen angewendet. Sie verlangt, daß in den zu bestimmenden Punkten etwa mit Hilfe des Psychrometers der Dunstdruck e und mit Hilfe eines Schleuderthermometers, das an einer etwa $^3/_4$ m langen Schnur ungefähr 1 bis 2 Minuten lang umgeschwungen wird, die Lufttemperatur t gemessen wird.

Da für große Gebiete, wie z. B. Deutschland, alle Faktoren mit Ausnahme des Wärmefaktors in Gl. (12) hinreichend konstant sind, so erhält man für das bezeichnete Gebiet, wenn mit Jordan $\frac{e}{B} = \frac{1}{100}$, $\varphi = 50^0$, $H_m = 500$ m gesetzt wird,

$$h = 18\,464\,(\log B_1 - \log B_2) \cdot (1 + 0{,}003665 \cdot t). \qquad (13)$$

Nach dieser Formel hat Dr. W. Jordan für $B_1 = 762$ mm sehr bequeme „barometrische Höhentafeln“ (2. Auflage, Stuttgart (Metzler) 1886) und ähnliche Tafeln für „Tiefland und für große Höhen“ (Hannover (Helwing) 1896) berechnet.

Anwendung dieser Tafeln. Gemessen

$$\left.\begin{aligned} B' &= 759{,}72 \\ B'' &= 758{,}11 \end{aligned}\right\} \text{ Lufttemperatur } t = +\,26^0\,\text{C}.$$

Die erstgenannte Tafel liefert bei $t = 26^0$ für B' und B'' die Hilfshöhen:

$$\begin{aligned} H' &= 26{,}3 \\ H'' &= 45{,}0 \\ \hline h &= +\,18{,}7\ \text{m}. \end{aligned}$$

Die Erfahrung hat ergeben, daß die Höhenunterschiede etwas besser stimmen, wenn zwischen 15^0 und 20^0 mit der um 1^0 vergrößerten Temperatur in die Tafel eingegangen wird.

Die zweitgenannte Tafel gibt $H' = 174{,}9$; $H'' = 193{,}5$, also $h = +\,18{,}6$ m.

Die abgekürzte Höhenformel (13) kann auch in der Form barometrischer Höhenstufen verwendet werden. Als barometrische Höhenstufe dh bezeichnet man diejenige Höhe (in Metereinheiten) einer Luftsäule, die einem Druck von 1 mm Quecksilbersäule das Gleichgewicht hält. Diese Höhenstufe ist in verschiedenen Höhen und bei verschiedener Temperatur verschieden groß. Schreibt man zunächst Gleichung (13) in leicht ersichtlicher Weise zu

$$h = K \cdot \log \frac{B_1}{B_2}\,(1 + \alpha \cdot t) \tag{13}$$

und setzt für $\log \frac{B_1}{B_2}$ eine bekannte Reihe ein, so wird:

$$h = K \cdot (1 + \alpha \cdot t) \cdot \log 2{,}718\,28 \cdot 2 \left(\frac{\frac{B_1}{B_2} - 1}{\frac{B_1}{B_2} + 1} + \frac{1}{3} \left(\frac{\frac{B_1}{B_2} - 1}{\frac{B_1}{B_2} + 1} \right)^3 + \cdots \right). \tag{14}$$

Vernachlässigt man die Glieder höherer als 1. Ordnung und setzt

$$B = \frac{B_1 + B_2}{2}, \tag{15}$$

so folgt aus (14):

$$h = \frac{K \cdot M}{B}\,(1 + \alpha \cdot t) \cdot (B_1 - B_2) = -\,dh \cdot (B_2 - B_1). \tag{16}$$

Die Höhenstufe dh läßt sich sehr bequem aus einer graphischen Tafel mit zwei Eingängen wie in Fig. 176 dargestellt entnehmen. Die Gleichung (16) berechnet man weiterhin am einfachsten mit dem logarithmischen Rechenschieber.

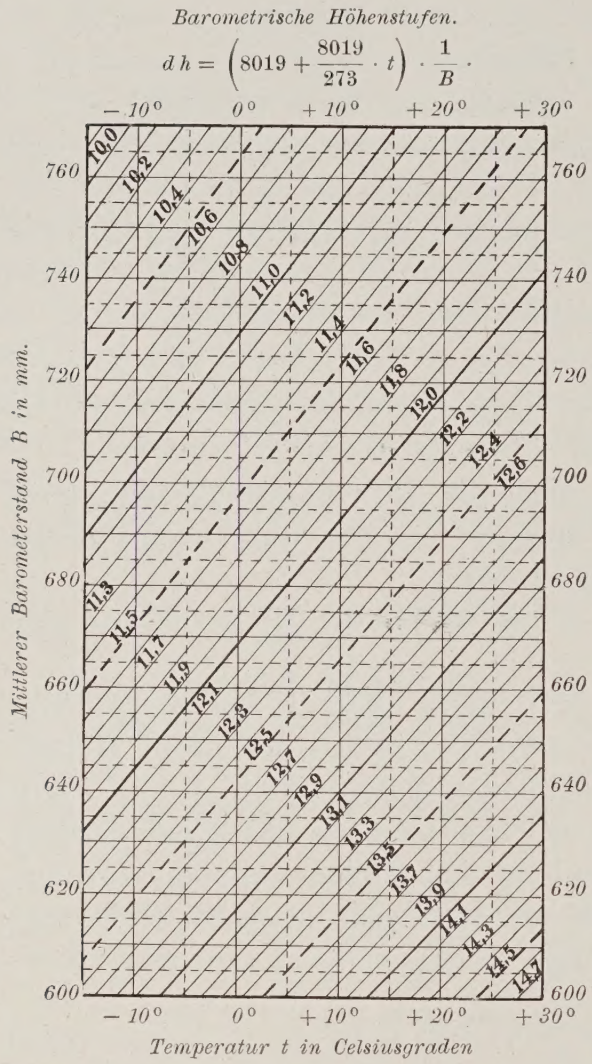


Fig. 176.

Eine einfache Rechnung ergibt, daß die in Gleichung (16) vernachlässigten Glieder höherer Ordnung bei Höhenunterschieden von mehreren 100 m nur sehr geringe Fehler verursachen.

Beispiel (wie oben):

$B_1 = 759{,}72$ } Lufttemperatur
$B_2 = 758{,}11$ } (im Mittel) $+ 26°$.

Die Tafel Fig. 176 gibt für $B = 759$ und $t = +26$, $dh = 11{,}55$, $B_2 - B_1 = -1{,}61$, folglich $h = 11{,}55 \cdot 1{,}61 = + 18{,}6$ m.

§ 111. Einige Höhenmessungsverfahren mit Barometern.

A. Damit die während der Messung eintretenden Luftdruckänderungen berücksichtigt werden können, wird möglichst im Messungsgebiet ein an einem Orte mit wenig wechselnder Temperatur ruhend aufgestelltes Barometer etwa alle $^1/_2$ Stunde abgelesen. Mit dem zweiten Barometer (Feldbarometer) werden der Reihe nach die einzumessenden Punkte besucht und zweckmäßig erst einige Minuten nach Ankunft auf jedem Punkte wird (nach leichtem Beklopfen) der Barometerstand und die Barometertemperatur abgelesen. Beim Transporte muß das Barometer sorgfältig vor stärkeren Erschütterungen und ungleichen Erwärmungen geschützt werden. Die Lufttemperatur wird entweder auf allen Feldpunkten oder etwa jede Stunde mit dem Schleuderthermometer gemessen.

In der Regel verwendet man zwei Feldinstrumente, die an über die Schulter gelegten Riemen vor der Brust getragen werden. Die

Feldbarometer sollten vor Beginn und nach Beendigung der täglichen Aufnahmen mit einem ruhenden Barometer verglichen werden, um stärkere Änderungen der Standkorrektionen berücksichtigen zu können; ist dies aber nicht möglich, dann sollte man zu verschiedenen Zeiten denselben Punkt im Felde aufsuchen.

Zahlenbeispiel: An einem ruhenden Barometer wurden am 22. Juli 1908 folgende reduzierten Beobachtungen erhalten:

Uhrablesung	Reduzierte Ablesung
$10^h\ 0^m$	667,20 mm
11 0	667,30
12 0	667,30
1 0	667,40
2 0	667,40
3 0	667,50

Mit dem in § 108 untersuchten kompensierten Bohneschen Aneroidbarometer Nr. 411, dessen Gleichung war:

$$B_0 = A_t - 0{,}022 \cdot t + 0{,}00533 \cdot (750 - A) + S,$$

worin

$$A = A_t - 0{,}022 \cdot t;\ S \text{ beträgt Bruchteile des mm,}$$

wurde gemessen:

Punkt n	Feldbarometer A_t ; (t)	Lufttemperatur t	Uhrablesung	Bemerkung
1	739,8 20,3	12,2	$9^h\ 55^m$	Kaltentalbachbrücke
2	720,9 19,4	11,2	10 40	Molkenhaus
3	721,9 18,5	11,4	11 10	Dreiherrnbrücke
4	711,6 16,8	10,8	11 55	Scharfenstein
5	701,1 16,4	9,3	12 15	Wegkreuzung
6	689,15 17,0	9,2	12 35	Bismarckklippe
7	668,6 20,5	9,4	1 23	Brocken
4	710,8 18,0	14,8	4 20	·
1	738,0 18,5	15,5	6 40	·

Nimmt man $S = 0$ an, so ergibt sich die folgende, mit dem gewöhnlichen Rechenschieber und der Höhenstufentafel (Fig. 176) bewirkte Rechnung, bei der das ruhende und das Feldbarometer wegen der allgemeinen Luftdruckänderung um gleiche Beträge korrigiert wurden (was unbedenklich gemacht werden darf).

Ruhendes Barometer	Punkt n	Feldbarometer B_n	Verbesserung v_n wegen allgemeiner Luftdruckänderung	Lufttemperatur t	$\frac{B_{n-1}+B_n}{2}$	$B_n - B_{n-1} + v_n - v_{n-1}$	$dh \cdot (B_{n-1} - B_n)$	Höhe
667,20	1	739,40	+ 0,20	12,2				287,8
,27	2	720,62	+ 0,13	11,2	730	− 18,85	+ 215,5	503,3
,30	3	721,64	+ 0,10	11,4	721	+ 0,99	− 11,5	491,8
,30	4	711,43	+ 0,10	10,8	716	− 10,21	+ 118,7	610,5
,30	5	701,00	+ 0,10	9,3	706	− 10,43	+ 123,0	733,5
,35	6	689,10	+ 0,05	9,2	695	− 11,95	+ 142,8	876,3
,40	7	668,58	+ 0,00	9,4	678	− 20,57	+ 252,0	1128,3
	Diff.	− 70,82	− 0,20		Σ	− 71,02	+ 840,5	+ 840,5
			− 71,02					

Die Höhe des Punktes (7) ist etwa 13 m zu klein.

B. Wenn zur Messung nur ein Barometer zur Verfügung steht, dann geht man zunächst auf einen Punkt, dessen Höhe bekannt ist (oder als bekannt angenommen wird), bestimmt daselbst den Barometerstand (Instrumenttemperatur), die Lufttemperatur und die Uhrzeit. Hierauf werden die zu messenden Punkte besucht und dabei die entspr. Barometer- (Instrumenttemperatur) und Uhrablesungen gemacht. Die Lufttemperatur wird meist nur ab und zu ermittelt und zum Schlusse wird nochmals auf dem Ausgangspunkt wie zu Beginn gemessen. Nach der Reduktion der Barometerablesungen zeigt sich zwischen der Anfangs- und Schlußablesung in der Regel eine Abweichung, die von Luftdruckänderungen und kleinen Standänderungen des Barometers herrührt. Diese Abweichung verteilt man proportionl der Zwischenzeit (ev. graphisch) auf die einzelnen Punkte. Damit die dieser Verteilungsart zugrunde liegende Annahme möglichst den tatsächlichen Verhältnissen entspricht, soll die Zeitdauer der ganzen Messung kurz sein.

Weil diese Annahmen (gleichmäßige Änderung des Luftdruckes und der Standkorrektion) häufig schlecht zutreffen, so liefert diese Meßart mitunter unzuverlässige Ergebnisse.

Im vorigen Beispiele wurden auf dem Rückwege die beiden Punkte (4) und (1) wieder aufgesucht. Nach Reduktion der Feld-

barometerablesungen und (graphischer) Verteilung der Änderung von 1,76 mm erhält man mit dem Rechenschieber und Fig. 176 die folgende Rechnung:

Punkt n	Feldbarometer B_n	Verbesserung wegen Änderung des Luftdrucks v	Lufttemperatur t	$\frac{B_n + B_{n-1}}{2}$	$B_n - B_{n-1} + v_n - v_{n-1}$	$dh \cdot (B_{n-1} - B_n)$ Verbesserung	Höhe	Bemerkungen
1	739,40	− 1,76	12,2				287,8	
2	720,62	− 1,58	11,2	730	− 18,60	+ 213,5 + 1,1	502,4	
3	721,64	− 1,50	11,4	721	+ 1,10	− 12,7 + 0,1	489,8	
4	711,43	− 1,36	10,8	716	− 10,07	+ 117,2 + 0,6	(607,6)	Mittel 607,9
5	701,00	− 1,28	9,3	706	− 10,35	+ 122,0 + 0,6	730,2	
6	689,10	− 1,23	9,2	695	− 11,85	+ 141,5 + 0,7	872,4	
7	668,58	− 1,06	9,4	678	− 20,35	+ 248,9 + 1,3	1122,6	
4	710,60	− 0,48	14,8	689	+ 42,60	− 517,0 + 2,6	(608,2)	Mittel 607,9
1	737,64	0,00	15,5	724	+ 27,52	− 322,0 + 1,6	287,8	
Diff.	− 1,76	− 1,76		Σ	+ 71,22 − 71,22 0,00	+ 843,1 − 851,7 − 8,6		

C. Die besten barometrischen Höhenmessungen erzielt man durch Einschalten der zu bestimmenden Punkte zwischen gegebene Höhenpunkte.

Man begibt sich zunächst auf einen gegebenen Punkt A, liest daselbst das Barometer und die Instrumenttemperatur ab, besucht dann der Reihe nach die einzumessenden Punkte $1, 2 \ldots n$ und liest auf jedem den Barometerstand und die Instrumenttemperatur ab und macht zum Schlusse auf einem zweiten gegebenen Punkte B die entspr. Beobachtungen. Die zwischen der Messung in A und B liegende Zeit soll 1 bis 2 Stunden nicht überschreiten, damit in der Zwischenzeit eingetretene ungleichmäßige allgemeine Luftdruckänderungen die Messungsergebnisse nicht zu sehr fälschen können.

Vor der Höhenberechnung werden alle Barometerablesungen auf die gleiche Instrumenttemperatur reduziert; die Berücksichtigung der Teilungskorrektion ist unnötig, wenn diese annähernd eine lineare Funktion der Ablesung ist.

Sind H_A, H_B die bekannten Höhen der Punkte A und B,

B_A, B_B, B_1, $B_2 \ldots B_n$ die reduzierten Barometerablesungen und

H_1, $H_2 \ldots H_n$ die Höhen der Punkte $1, 2 \ldots n$,

so gilt hinreichend genau die Proportion

$$\frac{H_B - H_A}{B_B - B_A} = \frac{H_n - H_{n-1}}{B_n - B_{n-1}} \text{ oder } H_n - H_{n-1} = \frac{H_B - H_A}{B_B - B_A} \cdot (B_n - B_{n-1}) \quad (1)$$

Den konstanten Faktor vor der Klammer bezeichnet man häufig als empirische Höhenstufe.

Die weitere unter Benutzung des Rechenschiebers ausgeführte Rechnung ist aus dem folgenden Zahlenbeispiele ersichtlich. Die Gleichung des verwendeten Aneroids (Nr. 411) war

$$B_0 = A_t - 0{,}022 \cdot t + 0{,}00533\,(750 - A) + S,$$

so daß die Teilungskorrektion nicht berücksichtigt zu werden brauchte.

Punkt n	Barometerablesung A_t ; t	Reduzierter Barometerstand B_{23^0}	$B_n - B_{n-1}$	$H_n - H_{n-1}$ (Verbesserung)	Höhe H	Bemerkungen
$A = \cdots$	756,8 ; +23,0	756,80			73,6	
$1 = \cdots$	756,55 ; +23,5	756,54	− 0,26	+ 2,9	76,5	
$2 = \cdots$	756,1 ; +23,6	756,09	− 0,45	+ 5,1	81,6	
$3 = \cdots$	755,6 ; +24,0	755,58	− 0,51	+ 5,7	87,3	
$B = \cdots$	755,1 ; +24,6	755,06	− 0,52	+ 5,8	93,1	
Diff. bzw. Summe		− 1,74	− 1,74	+ 19,5	+ 19,5	
Höhenstufe $\frac{93{,}1 - 73{,}6}{1{,}74}$		= 11,20				

Die Verbesserungen der Höhen der Zwischenpunkte um die nivellierten Zahlen zu erhalten sind $v_1 = -0{,}7$, $v_2 = -0{,}1$, $v_3 = +0{,}2$, so daß daraus der mittlere Fehler eines bestimmten Punktes zu $m = \sqrt{\frac{0{,}54}{3}} = \pm 0{,}4$ m folgt.

§ 112. Genauigkeit der barometrischen Höhenmessung.

Wenn der gemessene Höhenunterschied etwa 200 m nicht übersteigt, dann kann der mittlere Höhenfehler eines mit guten Naudetschen oder Goldschmidschen Instrumenten nach den Methoden *A* und *C* des § 111 bestimmten Punktes nach vielfachen Versuchen zu $\pm$ 0,6 bis $\pm$ 2 m angenommen werden. Bei der Messung großer Höhenunterschiede beträgt deren mittlerer Fehler etwa 1%, und die Formel (13) des § 110 liefert im allgemeinen in den Sommermonaten um annähernd 1% zu kleine Höhenunterschiede.

Zu verschiedenen Tageszeiten und auch in verschiedenen Monaten findet man mit dem Barometer für denselben Höhenunterschied wegen des veränderlichen Zustandes der Atmosphäre verschiedene Werte. Die günstigste Tageszeit für barometrische Messungen ist (nach v. Bauernfeind) vormittags 10^h und nachmittags 4^h.

X. Abschnitt.

Gleichzeitige Lage- und Höhenmessung, Tachymetrie (Schnellmessung).

§ 113. Übersicht.

Bei der tachymetrischen Aufnahme werden durch denselben Vorgang vom Instrumentenstandorte als dem Koordinatenursprunge aus durch Ablesung auf einer im aufzunehmenden Punkte aufgestellten Abstandslatte und durch solche auf den Kreis- bzw. sonstigen Teilungen des Tachymeters die drei unabhängigen räumlichen Koordinaten umliegender Geländepunkte bestimmt. Es müssen deshalb für jeden Punkt drei unabhängige Bestimmungsstücke gemessen werden, um daraus z. B. die rechtwinklig räumlichen Koordinaten x, y, q (q = Höhe) oder die ebenen Polarkoordinaten δ, D und die Höhe q berechnen zu können. In der Regel dienen weiterhin zum Eintragen eines Punktes in den Plan

1. der Richtungswinkel δ der Horizontalprojektion der Strecke Ursprung-Zielpunkt gegen irgend eine im Plane gegebene Anfangsrichtung;
2. die Länge D der Horizontalprojektion dieser Strecke
3. und zur Berechnung der Höhe q des Punktes die Länge h der Vertikalprojektion der genannten Strecke (Höhenunterschied zwischen Ursprung und Zielpunkt).

In § 45 ist bereits erläutert, wie diese Größen D und h bei der sog. Meßtischtachymetrie aus dem zwischen den Fäden des entfernungsmessenden Fernrohres gesehenen Lattenstücke l bzw. L und dem Höhenwinkel α der Mittelzielung gefunden werden.

Bei der Zahlentachymetrie wird der Richtungswinkel δ erhalten entweder

a) als Differenz der Ablesungen auf dem Horizontalkreise des Theodolits — sog. Theodolittachymetrie.
b) als Differenz von Bussolenablesungen, bzw. von Horizontalkreisablesungen des Theodolits nach Orientierung der Kreisnullrichtung gegen den magnetischen Meridian mit Hilfe eines Magneten (Aufsatzbussole, Röhrenkompas u. dgl.) — sog. Bussolentachymetrie.

Die unter 2 und 3 genannten Stücke werden in der Regel mit Hilfe des entfernungsmessenden Fernrohres und der Abstandlatte ermittelt und dabei wird der Höhenwinkel α der Mittelzielung am Höhenkreis bzw. -bogen des tachymetrischen Theodolits abgelesen. Bei Benutzung eines selbstreduzierenden Entfernungsmessers wie z. B. des Hammer-Fennelschen (§ 41) werden D und h unmittelbar zwischen den Entfernungs- bzw. Höhenfäden des Fernrohres auf der Latte abgelesen, so daß die Ablesung des Höhenwinkels und die Berechnung von D und h wegfällt. Bei Verwendung der Projektions- oder Schiebetachymeter (§ 39) werden D und (meist sogleich) q nach der Ablesung des Lattenstückes L (auf der meist senkrecht zur Zielung stehenden Latte) und darauf folgendem Einstellen des vertikalen Maßstabes auf $E = C \cdot L$ am horizontalen und lotrechten Maßstabe des Instrumentes abgelesen. Mit allen Tachymetern wird fast ausnahmslos nur in einer Fernrohrlage gemessen, und deshalb müssen die Achsen bei der Messung richtig liegen (Umdrehachse lotrecht, Kippachse horizontal, Zielachse senkrecht zur Kippachse, siehe § 24), und da außerdem hie und da nivelliert wird, so soll auch die Achse der Nivellierlibelle (am Fernrohr) parallel zur Mittelzielung liegen und fernerhin soll bei horizontaler Mittelvisur (einspielender Nivellierlibelle) und einspielender Höhenlibelle am Höhenkreis Null bzw. 90^0 abgelesen werden (siehe § 28), damit die abgelesenen Höhenwinkel bzw. Zenitdistanzen nicht wegen fehlerhafter Lage des Höhenindex verbessert werden müssen.

§ 114. Der Tachymetertheodolit oder der Kreistachymeter. Die verschiedenen Arten der Tachymetrie mit Rücksicht auf den Zweck der Aufnahme und die Berechnung der Koordinaten.

Nach § 113 kann jeder zur Horizontal- und Vertikalwinkelmessung brauchbare Theodolit als Kreistachymeter dienen, wenn das Fernrohr mit Distanzfäden versehen ist; durch Beigabe einer Orientierbussole (§ 32) wird er weiterhin zur Bussolentachymetrie verwendbar. Da bei tachymetrischen Messungen die Kreisablesungen, der Entfernung entsprechend, meist nur bis auf eine oder einige Minuten genau gebraucht werden, um die angestrebte Schärfe von einigen oder vielen Zentimetern in der Höhe und Lage eines zu bestimmenden Punktes zu erreichen, so benutzt man zweckmäßig handliche (mittlere oder kleinere) Instrumente, etwa wie Fig. 53 und 54, die zur Ermöglichung rascher Kreisablesungen mit $^1/_6{}^0$ oder $^1/_3{}^0$ Teilungen versehen sind, auf denen mit Strichmikroskopen oder mit einem Indexstriche (ev. einem

Noniennullstrich) abgelesen wird. Zum leichten und sicheren Höhenwinkelmessen dient zweckmäßig eine Libellenalhidade (§ 28), und um die Mitführung der Vorzeichen zu sparen, können am Höhenkreis Zenitdistanzen abgelesen werden. Da mit dem tachymetrischen Theodolit häufig kleine Nivellierungen gemacht werden müssen, so muß mit dem Fernrohr eine Nivellierlibelle verbunden sein, die mit Rücksicht auf leichte Berichtigung (§ 20) eine Doppelschlifflibelle ist.

Die Fernrohrgröße richtet sich nach der Genauigkeit, mit der auf der Abstandslatte bei gegebener maximaler Entfernung noch abgelesen werden soll, die Vergrößerung schwankt meist zwischen 10 und 30 und beträgt im Durchschnitte etwa 20; die Multiplikationskonstante (§ 37) ist meist nahezu 100 für die beiden äußeren Fäden, also nahezu 200 für den Mittelfaden und einen äußeren Faden.

Als Abstandslatten werden zu möglichst scharfer Messung (Präzisionstachymetrie), wie z. B. bei der tachymetrischen Messung von Polygonzügen, meist in Zentimeter (oder Halbzentimeter) geteilte Nivellierlatten verwendet; diese tragen in der Regel eine scharfe Nullmarke, auf die der eine Faden scharf eingestellt werden kann. Die Latte wird bei der Messung mit Hilfe einer Dosenlibelle scharf lotrecht gerichtet und in dieser Lage mit einer Strebe festgehalten. Das zwischen den Abstandsfäden gesehene Lattenstück wird bei der Zugmessung häufig durch Mittelung von zwei bis vier Messungen bis auf Bruchteile des Millimeter gefunden (vgl. auch § 40).

Für ausführliche Eisenbahnvorarbeiten u. dgl. werden die mit dem Tachymeter aufgenommenen Punkte meist im Maßstabe 1 : 1000 aufgezeichnet. In diesen Fällen dient als Abstandslatte dieselbe Zentimeterlatte wie vorher, nur die Anwendung einer Nullmarke und einer Strebe unterbleibt. Mit 20fach vergrößernden guten Fernrohren kann auf diesen Latten bei gutem Lichte bis auf Entfernungen von etwa 200 m noch $1 \div 2$ mm abgeschätzt werden.

Für allgemeine Eisenbahnvorarbeiten und topographische Aufnahmen, die Pläne in Maßstäben 1 : 5000 bis 1 : 25000 erfordern, würde die Verwendung einer in Zentimeter geteilten Latte die Arbeit unverhältnismäßig erschweren. Man benutzt deshalb für diese Zwecke der sog. topographischen Tachymetrie eine durch Felder oder kräftige Striche in dm geteilte Abstandslatte mit oder ohne deutliche Beziffe-rung (vgl. auch § 45), auf der das Lattenstück bis auf Zentimeter auch mit schwachen Fernrohren noch auf mehrere 100 m Entfernung abgelesen werden kann. Häufig ist die Rückseite der Nivellierlatte mit einer Dezimeterteilung versehen, um nach Bedarf die eine oder andere Seite verwenden zu können.

Die notwendige Messungsschärfe $d\alpha$ der Höhenwinkel richtet sich nach der zugelassenen Fehlergröße dh der Höhenunterschiede und nach der Entfernung E wie das in § 101 erläutert ist. Würden z. B. mit einem gegebenen Instrumente die Höhenwinkel auf $d\alpha' = \pm 1'$ sicher gemessen und soll $dh \leqq 0{,}05$ m bleiben, dann dürfen keine größeren Entfernungen als $E = \frac{\varrho'}{d\alpha}\, dh = 172$ m angewendet werden. Ähnliche Überlegungen sind wegen der notwendigen Schärfe der horizontalen Richtungen anzustellen.

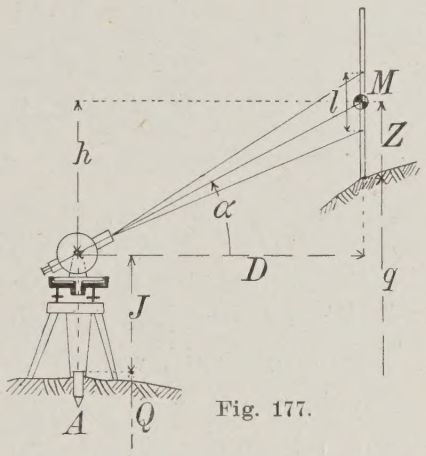


Fig. 177.

Bezeichnen: l das auf der lotrecht stehenden Abstandslatte zwischen den Distanzfäden gesehene Lattenstück; c und C die Konstanten des entfernungsmessenden Fernrohres und α den Höhenwinkel der nach dem Punkt M der Latte gerichteten Mittelzielung, dann ist nach § 39 und mit den Bezeichnungen der Fig. 177, wenn $L = l + \frac{c}{C}$:

$$E = c + C \cdot l \overset{\text{bzw.}}{=} C \cdot L. \tag{1}$$

Näherungswert: $$(D) = E \cdot \cos^2 \alpha. \tag{2}$$

Näherungswert: $$(h) = E \cdot \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha = (D) \cdot \operatorname{tg} \alpha. \tag{3}$$

$$q = Q + J - Z + h. \tag{4}$$

Die Verbesserungen der Näherungswerte betragen:

$$\left.\begin{aligned} D - (D) &= 2\, c \sin^2 \tfrac{\alpha}{2} \cdot \cos \alpha, \\ h - (h) &= 2\, c \sin^2 \tfrac{\alpha}{2} \cdot \sin \alpha. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Bei der Zahlentachymetrie werden die in den §§ 43 und 45 angegebenen graphischen Hilfsmittel zur Berechnung der Gleichungen (1) bis (4) meist nicht benutzt.

In der Präzisionstachymetrie rechnet man die Formeln (1) bis (3) meist $4 \div 5$stellig logarithmisch (indem zuvor l eventuell um $\frac{c}{C}$ vergrößert wird, um L zu erhalten). Die Korrektionsformeln (5) kommen nur bei der scharfen tachymetrischen Polygonzugmessung und in einzelnen Fällen bei der Präzisionstachymetrie in Betracht und werden dann mit dem Diagramm Fig. 82, S. 93, berücksichtigt. Z. B. wird für

$c = 0{,}48$; $C = 98{,}71$; $Q = 598{,}63$; $J = 1{,}34$; $Z = 1{,}34$;
$L = 1{,}2765$: $\alpha = -33^0\,17{,}5'$.

		$D-(D)=$	$+7$
	(D)	1.94 468	$=88{,}04$
$Q=$ 598,63	$\cos^2\alpha$	9.84 430	
$J-Z=$ 0,00	C	1.99 436	
$h=-$ 57,85	L	0.10 602	
$q=$ 540,78	$\operatorname{tg}\alpha$	$9.81\,734_n$	
$D=$ 88,11	(h)	$1.76\,202_n$	$=-57{,}81$
		$h-(h)$	$=-\quad 4$

In der sonstigen technischen und topographischen Tachymetrie berechnet man die Gleichung (1), auch wenn C nicht auf 100,0 gestellt werden kann (siehe § 37), im Kopfe oder (nach Hammer) unter Benutzung einer Zahlentafel mit dem Eingange l bzw. L. Für die Auswertung der Formeln (2) und (3) gibt es sehr viele Hilfsmittel, wie schon in § 39 angedeutet ist. Die zwei gebräuchlichsten sind Zahlentafeln, wie z. B. die Jordanschen Hilfstafeln für Tachymetrie (4. Auflage), die für jeden Wert von $E = 10, 11, \ldots$ bis 250 und $\alpha = 0^0, 1', 2' \ldots (2', 4' \ldots$ bzw. $3', 6' \ldots)$ sogleich die Werte von Gleichung (2) und (3) bis zu Höhenunterschieden von $4 \div 56$ m liefern und meist ausreichen, wenn event. E halbiert und die entsprechenden Tafelwerte verdoppelt werden[1]), und sog. logarithmische Tachymeterschieber.

Die logarithmischen Tachymeterschieber sind bequem, aber bei vielem Gebrauche etwas ermüdender als die Zahlentafeln. Es kommen verschiedene Anordnungen vor. Zweckmäßig ist die folgende, die an einem von O. Günther & Tegetmeyer (Braunschweig) bezogenen Schieber angewendet ist. Bei den beiden (von 4 bis 100 bezifferten) logarithmischen Stabteilungen ist die Länge von $\log 10 = 1$, also jeweils von 1 bis 1, zu 200 mm gewählt, demnach $\log 100 = 2$, so daß die dritte 1 400 mm von der ersten 1 entfernt ist usw. Die Logarithmen der Zahlen 2, 3, 4 ... 9 sind von links nach rechts aufgetragen. Auf der oberen Schieberteilung sind von links nach rechts die Logarithmen von $\frac{1}{2}\sin 2\alpha$ auf-

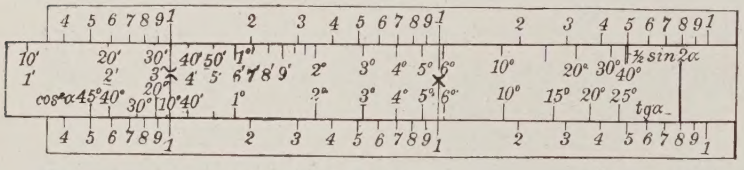


Fig. 178.

1) Dazu „Ergänzungen der Jordanschen Hilfstafeln für Tachymetrie" von Dr. Reger, Stuttgart 1910, die bis zu $E = 350$ und $\alpha = 10^0$ gehen und die bis zu $E = 100$ von $\alpha = 30^0$ bis zu $\alpha = 45^0$ erweitert wurden.

getragen und den erhaltenen Teilstrichen ist α beigeschrieben. Es ist z. B. für

$$\begin{aligned} \alpha = 0^0 \quad & \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha = 0, \\ 1^0 \quad & \text{„ „ „ } = 0{,}0175, \\ 6^0 \quad & \text{„ „ „ } = 0{,}104, \\ 45^0 \quad & \text{„ „ „ } = 0{,}500. \end{aligned}$$

Legt man dem ersten 1 der Stabteilung (von links nach rechts gezählt) den Wert 0,01 bei, dann kommt dem zweiten Einsstriche der Wert 0,1 und dem darauffolgenden Fünferstriche der Wert 0,5 zu; die diesen Strichen auf der $\frac{1}{2}\sin 2\alpha$-Teilung entsprechenden Winkel sind $\alpha = 34{,}4'$, $5^0\,46'$ und 45^0, und z. B. bei dem Striche 0,0175 der Stabteilung muß auf der Schieberteilung 1^0 stehen usw. Die beiden Winkel $34{,}4'$ und $5^0\,46'$ sind auf dem Schieber durch durchgehende Striche und mit einem Kreuze auffallend bezeichnet. Stellt man deshalb einen solchen hervorgehobenen Strich auf den Wert E auf der Stabteilung ein, dann wird auf der Stabteilung sogleich bei α des Schiebers der Wert $E \cdot \frac{1}{2}\sin 2\alpha$ abgelesen. Z. B. $E = 235$, $\alpha = +\,9^0\,44'$ liefert $h = +\,39{,}2$. Die Kommastellung bei h ermittelt man am einfachsten durch Überschlagen unter Beachtung, daß für je 1^0 und je 60 m der Höhenunterschied annähernd um je 1 m wächst. Für Winkel α kleiner als $10'$ wird hinreichend genau der Winkel verzehnfacht und der entsprechende Wert von h mit 10 dividiert; es sind deshalb unter $10'$, $20'$ usw. die zehnmal kleineren Winkel $1'$, $2'$ bis $9'$ angeschrieben.

Auf der unteren Schieberteilung ist dem ersten mit einem Kreuz bezeichneten Striche der Wert 0,01 beigelegt, dem folgenden mit einem Kreuz bezeichneten Striche demnach 0,1 usf. und die Zahlen $40'$, 1^0, 2^0 ... entsprechen den Werten von $\log \operatorname{tg} \alpha$. Bei der mit $\cos^2\alpha$ bezeichneten Teilung ist dem ersten hervorgehobenen Striche der Wert $1 = \log \cos^2 0$ beigelegt, bei dem Teilpunkte 0,5 steht deshalb 45^0, da $\log \cos^2 45^0 = 0{,}5$ usw. Nach Einstellen eines mit Kreuz versehenen Striches auf E des Stabes liefert deshalb die Ablesung bei α der $\cos^2\alpha$-Teilung sogleich $E \cdot \cos^2\alpha$ und bei α der Tangensteilung sogleich $E \cdot \operatorname{tg}\alpha$.

Die Teilung $\frac{1}{2}\sin 2\alpha$ kann auch von rechts nach links auf den Schieber aufgetragen werden, dann ist, umgekehrt wie vorher, α unter E zu stellen und $E \cdot \frac{1}{2}\sin 2\alpha$ an einem Striche mit Kreuz abzulesen.

Einzelne Werte von $h = \frac{E}{2} \cdot \sin 2\alpha$ und $D = E\cos^2\alpha = E - E \cdot \sin\alpha \cdot \sin\alpha$ können auch mit dem gewöhnlichen logarithmischen Rechenschieber, dessen Schieber eine Sinusteilung trägt, berechnet werden.

Bei Verwendung von selbstreduzierenden Entfernungsmessern, z. B. dem Hammer-Fennelschen (§ 41), werden D und h unmittelbar an der Latte abgelesen; bei Verwendung von Projektions- oder Schiebetachymetern (§ 39) werden die Stücke D und $q = (Q + J - Z) + h = Q' + h$ sogleich an dem horizontalen und vertikalen Maßstabe im Felde abgelesen, so daß jede Rechnung entfällt.

§ 115. Die tachymetrischen Aufnahmen. Aufnahme einer kleinen Fläche im offenen Gelände.

Bei den tachymetrischen Aufnahmen handelt es sich um die Vermessung entweder einer kleinen Fläche, die von einem Instrumentenstandorte aus aufgemessen werden kann, oder um die Aufnahme eines Geländestreifens von einigen 100 m Breite und beliebiger Länge oder endlich um die Aufnahme eines größeren geschlossenen Gebietes. Im Folgenden wird die Verwendung eines Kreistachymeters, an dem die Horizontal- und Vertikalkreisablesungen im allgemeinen bis auf 1′ ausgeführt werden, und eine in Zentimeter und gleichzeitig in Dezimeter geteilte Abstandslatte, auf der das Lattenstück je nach Bedarf (§ 114) bis auf Millimeter oder Zentimeter abgelesen werden kann, vorausgesetzt. Durch Beigabe einer Orientierbussole werden magnetische Orientierungen ermöglicht.

Zunächst wird ein Punkt A, von dem aus die Fläche übersehen werden kann, aufgesucht und mit einem Pflocke bezeichnet. Ist ein Punkt mit bekannter Höhe in der Nähe, dann kann die Höhe Q des Pflockes z. B. durch Nivellieren bestimmt werden; ist dies nicht möglich, dann wird Q willkürlich angenommen.

Der vollständig berichtigte Tachymeter wird sodann über A zentrisch aufgestellt, hierauf wird seine Umdrehachse scharf lotrecht gerichtet und mit der Abstandslatte die Höhe J der Kippachse über dem Pflocke gemessen.

Die umliegenden Geländepunkte kann man in verschiedener Weise aufnehmen (vgl. auch § 45); gut bewährt hat sich folgendes Verfahren:

Man bringt an der Abstandslatte eine Zielmarke z. B. ein auf der Latte verschiebbares breites schwarzes Gummiband in der Höhe $Z = 2 \div 4$ m so an (bzw. merkt den betreffenden Punkt an der Latte), daß $Q' = Q + J - Z$ eine runde Meterzahl wird. Auf diese Zielmarke wird der Mittelfaden stets vor der Ablesung des Höhenwinkels eingestellt, so daß dann nach § 114 Gleichung (4) sich ergibt: $q = Q' + h$.

Ist z. B. auf Standpunkt A die Höhe $Q = 483{,}33$ und wurde abgemessen $J = 1{,}31$, so ist $Q + J = 484{,}64$. Wählt man $Z = 3{,}64$, so

wird $Q' = 481{,}00$. Der Lattenträger wird nun auf den im Gelände ausgewählten Punkt (1) geschickt und (1) in einen Handriß eingetragen. Auf der in (1) lotrecht stehenden Latte wird der Mittelfaden zunächst genähert auf die Zielmarke gerichtet, dann nach geringem Neigen des Fernrohrs auf möglichst einfachem und sicherem Wege (etwa nach Einstellen des oberen Faden auf 3,000 bzw. $3{,}000 + \frac{c}{C}$) das Lattenstück l bzw. L oder sogleich (wenn $C = 100$) E abgelesen und unmittelbar darauf wird der Mittelfaden scharf auf die Zielmarke eingestellt, so daß die Latte abgewunken werden kann.

Nach ev. Einspielenlassen der Höhenalhidadenlibelle wird darauf der Höhenwinkel α der Mittelzielung und dann der Horizontalkreis (bzw. die Bussole) abgelesen.

Während dieser Ablesungen (und Aufschreibungen) ist der Gehilfe auf den Punkt (2) gekommen, so daß sich der Vorgang wiederholen kann.

Hinsichtlich der Auswahl der zerstreuten Geländepunkte, Eintragen in einen ganz roh geführten Handriß, Verbinden der Punkte im Handriß, Angabe der größten Flächengefälle wird auf § 100 verwiesen, dazu aber noch bemerkt, daß bei der Tachymeteraufnahme die Lage der Punkte mit gemessen wird und daß die Höhenunterschiede beliebig groß sein können. Sehr zweckmäßig ist es, wenn drei Personen zusammenarbeiten, der Leitende führt den Handriß und weist den Lattenträger an, ein gewandter Gehilfe macht die Ablesungen am Instrumente.

Die Ablesungen schreibt man tabellarisch auf, z. B. in folgender Weise:

Punkt Nr.	E bzw. l	Vertikalwinkel $\pm\ \alpha$	Horizontalwinkel (Bussole)	$D = (E \cos^2 \alpha)$	$\pm\ h$	$q = Q' \pm h$	Bemerkungen
		Standpunkt A.			$Q = 483{,}33$		
		$J = 1{,}31$; $Q + J =$		484,64;	$Z = 3{,}64$; $Q' =$		481,00
1	186,0	+ 2° 30′	35°30′	*185,7*	+ *7,19*	*488,19*	Festpunkt: soll 488,20
2	132,5	+ 19 33	19 45	*117,7*	+ *41,78*	*522,78*	
3	92,0	− 1 37	83 04	*92,0*	− *2,60*	*479,40*	$Z' = 2{,}64$
4	136,0	0	87 22	*136,0*	− 3,10	*481,54*	Nivelliert

Anmerkungen: Ist ausnahmsweise die Zielmarke durch Gesträuch u. dgl. verdeckt, wie z. B. bei Punkt (3), dann wird der Mittelfaden auf einen anderen passenden Wert Z' eingestellt und dieser Wert in den Bemerkungen aufgeschrieben. Kann auf der Abstandslatte am Mittelfaden bei horizontaler Mittelvisur (Blick auf die Nivellierlibelle) abgelesen werden ($\alpha = 0$), dann wird diese Ablesung sogleich unter h eingetragen. Die Berechnung der Höhen q ist aus dem Beispiele ersichtlich.

§ 116. Aufnahme eines beliebig langen Geländestreifens.

Die Grundlage der Vermessung bildet ein den Geländestreifen durchziehender Polygonzug I, II, III, IV, ... der Fig. 179, dessen Seiten in der Regel 300 m nicht überschreiten.

Die Lage der Polygonpunkte wird, wenn große Genauigkeit erforderlich ist und der Polygonzug auch zur Aufnahme von Eigentumsgrenzen dienen soll, durch eine Polygonzugmessung mit Hilfe des Theodolits und Meßlatten (wenn möglich unter Anschluß an gegebene Dreieckspunkte) nach den im 8. und 12. Kapitel behandelten Grundsätzen gefunden und die Höhen dieser Punkte werden dann durch ein Festpunktnivellement nach § 95 bestimmt.

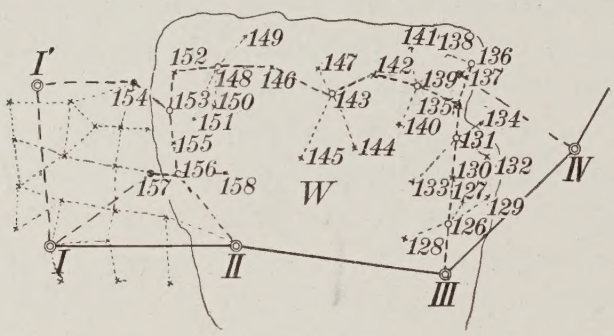


Fig. 179.

Sind aber große Geländehindernisse längs des Polygonzuges vorhanden oder genügt die durch Präzisionstachymetrie erzielbare Genauigkeit von einigen Zentimetern, dann wird der Polygonzug entweder nach Lage und Höhe tachymetrisch möglichst scharf gemessen oder es wird nur die Lagemessung tachymetrisch und die Höhenbestimmung nivellitisch gemacht. Nach den Erörterungen am Schlusse des § 40 wird bei der tachymetrischen Messung die Meßschärfe sowohl in den horizontalen als auch in den vertikalen Strecken erhöht, wenn die Abstandlatte nahezu in der Mitte der etwa bis 300 m langen Polygonseite aufgestellt und auf ihr von den beiden Endpunkten der Strecke aus mehrmals das zwischen den Entfernungsfäden gesehene Lattenstück abgelesen wird. Zweckmäßig stellt man hierbei den Mittelfaden vor jeder Ablesung des Höhenkreises stets auf die gleiche Zielmarke an der Latte ein.

Zur Berechnung der Lagekoordinaten der Polygonpunkte (ev. nach Annahme eines günstig gelegenen Koordinatensystems) reichen 4- bis 5stellige Logarithmen aus.

Die auf diese Weise erhaltenen Polygonpunkte werden bei der tachymetrischen Geländeaufnahme als Instrumentenstandpunkte verwendet und nur wenn sie eine ungünstige Lage besitzen sollten oder wenn für einzelne Teile ein weiter abliegender Standort z. B. I′ der Fig. 179 günstiger liegt, dienen diesem Zwecke auch solche in der Nähe liegende Punkte, die dann gegen die benachbarten Polygonpunkte z. B. tachymetrisch eingemessen werden.

Unter der Annahme, daß der in Fig. 179 mit *W* bezeichnete Teil von unübersichtlichem Walde u. dgl. bedeckt ist, wird zweckmäßig zuerst der übersichtliche Teil des Geländes nach § 115 aufgenommen und dadurch werden an den Waldgrenzen u. dgl. ev. zum späteren Anschlusse von tachymetrischen Bussolenzügen, durch die die bewaldeten Teile aufgenommen werden, brauchbare Geländepunkte, wie z. B. die Nummern 137, 154, 157, erhalten.

A. Tachymetrie im übersichtlichen Gelände.

Die Höhen der Punkte I, II . . . werden als bekannt (aus den vorhergehenden Messungen) vorausgesetzt. Nach richtiger Aufstellung des Tachymeters in Punkt I wird wie in § 115 mit der Abstandlatte die Instrumentenhöhe *J* bis zur Kippachse gemessen und dann die Zielmarke (z. B. ein breites schwarzes Gummiband) bei *Z* befestigt. Durch Anzielen des Punktes II und darauffolgendes Ablesen eines Indexstriches auf dem Horizontalkreise wird dessen Nullrichtung gegen die Anschlußrichtung I, II orientiert. Zur Kontrolle sollte stets ein bekannter Punkt, hier also der Punkt II, vor Beginn der eigentlichen Tachymeteraufnahme tachymetrisch aufgenommen werden.

Bei dieser Aufnahme werden dann die um I in einem Umkreise bis zu etwa 300 m zerstreut liegenden Geländepunkte 1, 2, . . . dem Zwecke der Aufnahmen entspr. genau (§ 114) aufgemessen wie in § 115 gezeigt ist. Diese Punkte müssen mit Rücksicht auf die Geländeform ausgewählt werden, so daß sie also dem Zuge etwaiger Rücken- und Tallinien folgen und daß durch sie einige Längenschnitte in der Richtung der größten Flächengefälle bestimmt werden. Die Punkte werden auf dem Felde in einen Handriß mit ihren Nummern eingetragen, der weiterhin durch Einzeichnen der Straßen, Wege, Wasserläufe, Kulturgrenzen usw. und durch Angaben über die Geländeformen (Verbinden der Punkte, zwischen denen die Geländeneigung gleichmäßig, Hervorheben der Rücken- und Tallinien, der Längenschnitte, ev. Einzeichnen einiger Leitlinien für die Konstruktion der Höhenlinien) vervollständigt wird. Damit die im Feldbuche und

im Handrisse eingetragene Nummer übereinstimmend demselben Geländepunkt entsprechen, empfiehlt es sich, etwa bei jedem fünften Punkt diese Übereinstimmung durch ein vereinbartes Zeichen zwischen dem Instrumente und der Latte (2mal Pfeifen) zu prüfen. Der Verkehr zwischen dem Instrumente und der Latte erfolgt auf größere Entfernungen zweckmäßig durch Pfeifen- oder Hornsignale, z. B. 1Pfiff — Latte ab; 2 Pfiffe — Fünferprobe; 3 Pfiffe — die Latte kann nicht abgelesen werden

Ist man genötigt, mit nur einem Gehilfen zu arbeiten, dem die Auswahl der Punkte nicht überlassen werden kann, dann wählt man mit diesem zuvor etwa 20 Geländepunkte aus, bezeichnet sie mit Nummernspachteln und trägt sie in den Handriß ein. Der Gehilfe wird dann mit der Latte und ev. unter Mitgabe des Handrisses zwecks Aufnahme der Punkte von Nummer zu Nummer herumgeschickt.

Die Arbeit wird aber durch Zusammenarbeiten von 3 Personen sehr gefördert. Der Leitende führt den Handriß und weist den Lattenträger an, wobei er Sorge trägt, diesem keine unnötige Arbeit zu machen; die Ablesungen am Instrumente besorgt der Dritte. Bei größerer Gewandtheit können auch zwei Lattenträger und 2 Schreiber am Instrumente, die abwechselnd ablesen und aufschreiben, verwendet werden.

Wenn die Entfernungen etwa 300 m wesentlich überschreiten, dann wird die Verständigung schwieriger und auch die Höhenfehler wachsen, so daß sie bei $\pm$ 1′ Genauigkeit der Höhenwinkel und etwa 700 m Entfernung bereits $\pm$ 0,2 m erreichen.

Nach Beendigung der Messung auf I wird diese auf Punkt IV in der gleichen Weise fortgesetzt, wobei die Geländepunkte zweckmäßig fortlaufend im Anschlusse an die letzte Nummer numeriert werden, um später Verwechslungen zu vermeiden.

B. Tachymetrie mit Bussolenzügen.

Da im Walde u. dgl. von einem Instrumentenstandorte aus im allgemeinen nur wenige Punkte aufgenommen werden können, so müssen dort viele Standorte bestimmt werden. Dies geschieht durch Zugmessung mit verhältnismäßig kurzen Seiten (in der Regel bis zu 100 m Länge), deren Richtungswinkel mit Hilfe einer Bussole bzw. einer Orientierbussole und deren Längen mit dem entfernungsmessenden Fernrohr ermittelt werden. (Sog. Tachymeterbussolenzüge; fällt die Richtungsmessung weg, dann bezeichnet man die verbleibende Höhenmeßart häufig als tachymetrisches Nivellement.)

Zur Messung von Tachymeterbussolenzügen eignen sich am besten kleine, leichte Tachymeter, die entweder eine Vollkreisbussole, wie z. B. Fig. 53, Seite 47, oder eine Orientierbussole besitzen und die mit einer in Zentimeter geteilten Abstandslatte verwendet werden. In der Regel wird nur das Nordende des Magneten, und zwar bei kurzen Visuren auf ganze Grade, bei längeren Zielungen auf $0{,}1^0$ abgelesen; das zwischen den Abstandsfäden gesehene Lattenstück wird bis auf mm und die Höhenwinkel bis auf einige Minuten (ev. auch nur bis auf $0{,}1^0$) bestimmt. In denjenigen Fällen, in denen das Instrument nicht mit einer drehbaren Höhenalhidadenlibelle ausgerüstet ist, bestimmt man zweckmäßig die (wenigen) Höhenwinkel als Differenzen der Höhenbogenablesungen bei geneigter und bei horizontaler (einspielender Nivellierlibelle) Zielung.

Wenn ausnahmsweise die Bussolenzüge nicht zwischen zwei verschiedenen, nach Lage und Höhe gegebenen Endpunkten verlaufen, muß die Korrektion k der den einzelnen Seiten entspr. Magnetablesungen bestimmt werden, um die entspr. Richtungswinkel zu finden (siehe § 31), mit welchen solche sog. freie Züge (die aber möglichst zu vermeiden sind) später in den Plan eingetragen werden können. Die Korrektion k bestimmt man durch Aufstellen des Bussolentachymeters auf einem gegebenen Punkte, z. B. II der Fig. 179, Anzielen eines anderen gegebenen Punktes, z. B. III, und Ablesen am Magneten.

Die Messung der Tachymeterbussolenzüge erfolgt mit Sprungständen (vgl. § 44) und es wird zweckmäßig vor jeder Höhenwinkelablesung der Mittelfaden auf eine an der Latte in mittlerer Instrumentenhöhe von etwa 1,3 m angebrachte Zielmarke gerichtet. Die einzelnen Punkte werden in einen Handriß eingezeichnet. Die Messung ist aus den Aufschreibungen auf Seite 284 und 285 zu dem zwischen III und II der Fig. 179 verlaufenden Zuge ersichtlich, wozu noch bemerkt wird, daß die mittlere Instrumentenhöhe auf der benutzten Zentimeterlatte bei $J = 5{,}0$ lag und daß dieser Punkt stets mit dem Mittelfaden angezielt wurde. Da die Konstanten des entfernungsmessenden Fernrohrs $c = 0{,}2$ und $C = 100{,}0$ waren, so konnte sogleich E abgelesen werden. Am Höhenkreis konnte nur bis auf $0{,}1^0$ abgelesen werden, weshalb zur Erzielung günstiger Fehlerfortpflanzung (bei Berechnung der Höhen) verhältnismäßig kurze Zielweiten angewendet werden mußten (Ablesung bis auf einzelne Minuten wäre besser). Da nur eine unempfindliche Dosenlibelle zur Lotrechtrichtung der Umdrehachse diente, wurde die auf dem Fernrohr vorhandene Nivellierlibelle bei der Höhenwinkelmessung verwendet.

Punkt Nr.	E bzw. l	Vertikalwinkel $\pm\ \alpha$	Bussole	D	$\pm\ h$	$q = Q' \pm h$	Bemerkungen
		Standpunkt 126.			$Q =$	*213,07*	*+ 5*
		$J = 5{,}0$;	$Q + J = 218{,}07$;		$Z = 5{,}0$;		$Q' = Q$.
P. III	44,9	$\frac{88{,}8}{90{,}3}$ + 1,5°	135°	*44,9*	*+ 1,17*	214,24	
127	27,7	$\frac{86{,}5}{90{,}5}$ + 4,0	309	*27,5*	*+ 1,9*	*215,0*	
128	37,2	$\frac{94{,}3}{90{,}5}$ − 3,8	277	*37,0*	*− 2,5*	*210,6*	
129	47,0	$\frac{84{,}9}{90{,}4}$ + 5,5	309	*46,5*	*+ 4,5*	*217,6*	
130	43,7	$\frac{86{,}6}{90{,}4}$ + 3,8	301	*43,5*	*+ 2,90*	*215,97*	*+ 5* Wechselpunkt
		Standpunkt 131.				*214,67*	*+ 10 = 214,77*
130	34,0	$\frac{88{,}2}{90{,}4}$ + 2,2	116	*34,0*	*+ 1,30*	*(216,07)*	
132	18,1	$\frac{88{,}0}{90{,}4}$ + 2,4	32	*18,1*	*+ 0,8*	*215,6*	
133	38,0	$\frac{96{,}5}{90{,}5}$ − 6,0	175	*37,5*	*− 4,0*	*210,8*	
134	22,1	$\frac{68{,}4}{90{,}4}$ + 22,0	334	*19,0*	*+ 7,7*	*222,5*	
135	28,9	$\frac{83{,}0}{90{,}4}$ + 7,4	305	*28,4*	*+ 3,70*	*218,37*	*+ 10* Wechselpunkt
		Standpunkt 136.				*224,57*	*+ 15 = 224,72*
135	37,7	$\frac{100{,}0}{90{,}4}$ − 9,6	137	*36,7*	*− 6,20*	*(218,52)*	
137	16,9	$\frac{98{,}1}{90{,}4}$ − 7,7	143	*16,6*	*− 2,25*	*(222,32)*	*+ 15* (Festpunkt = 222,47)
138	19,8	$\frac{99{,}9}{90{,}4}$ − 9,5	198	*19,2*	*− 3,2*	*221,5*	
		Standpunkt 139.				*210,47*	
135	39,0	$\frac{78{,}4}{90{,}5}$ + 12,1	71	*37,2*	*+ 8,00*	*218,47*	
140	30,0	$\frac{99{,}4}{90{,}4}$ − 9,0	171	*29,2*	*− 4,6*	*205,9*	
141	34,8	$\frac{90{,}7}{90{,}4}$ − 9,3	287	*33,9*	*− 5,5*	*205,0*	
142	46,0	$\frac{111{,}5}{90{,}4}$ − 21,1	253	*40,0*	*− 15,22*	*195,25*	Wechselpunkt

Punkt Nr.	E bzw. l	Vertikalwinkel $\pm\ \alpha$	Bussole	D	$\pm\ h$	$q = Q' \pm h$	Bemerkungen
		Standpunkt 143.				*186,63*	*+ 1 = 186,64*
142	40,0	77,6 / 90,4 } +12,8°	1°	*38,0*	*+ 8,62*	*(195,26)*	
144	29,8	90,3 / 90,4 } + 0,1	109	*29,8*	*+ 0,1*	*186,7*	
145	31,0	104,1 / 90,4 } − 13,7	155	*29,2*	*− 7,1*	*179,5*	
146	29,5	109,3 / 90,4 } − 18,9	237	*26,4*	*− 9,04*	*177,59*	*+ 1* Wechselpunkt
147	19,3	118,8 / 90,4 } − 28,4	241	*14,9*	*− 8,1*	*178,5*	
		Standpunkt 148.				*170,72*	*+ 2 = 170,74*
146	48,5	82,2 / 90,4 } + 8,2	46	*47,4*	*+ 6,87*	*(177,61)*	
149	37,0	70,8 / 90,4 } +19,6	348	*32,8*	*+ 11,7*	*182,4*	
150	48,0	101,5 / 90,4 } − 11,1	104	*45,6*	*− 9,1*	*161,6*	
151	43,0	107,0 / 90,4 } − 16,6	195	*39,5*	*− 11,8*	*158,9*	
152	57,0	98,4 / 90,4 } − 8,0	142	*55,8*	*− 7,87*	*162,85*	*+ 2* Wechselpunkt
		Standpunkt 153.				*155,64*	*+ 3 = 155,67*
152	32,0	77,0 / 90,4 } +13,4	353	*30,2*	*+ 7,21*	*(162,88)*	
154	30,2	86,7 / 90,4 } + 3,7	285	*30,0*	*+ 1,9*	*157,6*	
155	30,0	95,7 / 90,4 } − 5,3	152	*29,7*	*− 2,76*	*152,88*	*+ 3* Wechselpunkt
		Standpunkt 156.				*148,10*	*+ 3 = 148,13*
155	52,9	85,2 / 90,4 } + 5,2	284	*52,4*	*+ 4,78*	*(152,91)*	
157	34,2	88,1 / 90,4 } + 2,3	245	*34,2*	*+ 1,37*	*(149,47)*	*+ 3* (Festpunkt 149,50)
158	36,4	85,3 / 90,4 } + 5,1	20	*36,1*	*+ 3,2*	*151,3*	
P. II	100,5	84,3 / 90,5 } + 6,2	76	*99,0*	*+ 10,79*	*(158,89)*	Festpunkt 158,56

Die horizontalen Entfernungen $D = E\cos^2\alpha$ und die Höhen $h = E \cdot \frac{1}{2}\sin 2\alpha$ sind mit einem tachymetrischen Rechenschieber berechnet und die sich bei den Festpunkten zeigenden Höhenwidersprüche (von wenigen Dezimetern) wurden jeweils auf die einzelnen Standpunkte gleichmäßig verteilt, wie dies aus der Spalte Bemerkungen ersichtlich ist. (Die Höhen wurden wegen der langen Zielung von 156 nach P. II, deren Vertikalwinkel nur auf 0,1° gemessen ist, nicht auf diejenige von P. II abgeglichen.)

Der Zug wird z. B. mit Hilfe eines Transporteurs (vgl. § 118) zuerst zweckmäßig auf Pauspapier aufgetragen und dann zwischen die im Plane gegebenen Endpunkte III und 157 bzw. II der Fig. 179 eingepaßt.

§ 117. Aufnahme größerer Gebiete. Anordnung der einzelnen Messungen.

A. Wenn von einer kleineren Fläche wie z. B. von einem Stadtgebiete, einer Gemarkung u. dgl. in verhältnismäßig großem Maßstabe von etwa 1 : 500 bis 1 : 5000 ein Lage- und Höhenplan gefertigt werden soll, dann bildet fast stets ein Polygonnetz, das über die Fläche verteilt ist und, wenn möglich, an eine Triangulierung angeschlossen wird, die Grundlage für die Tachymeteraufnahme. Je nach dem Zwecke der Aufnahmen und der Geländebeschaffenheit wird dieses Netz entweder in der Lage mit Theodolit und Meßlatten und in der Höhe durch Nivellieren festgelegt oder es wird durch scharfe tachymetrische Zugmessung, wie in § 116 besprochen, nach Lage und Höhe bestimmt. Können die Polygonzüge nicht in ein vorhandenes Dreiecksnetz eingerechnet werden, dann nimmt man ein beliebiges rechtwinkliges Koordinatensystem an und berechnet in diesem die Koordinaten aller Polygonpunkte. Mit diesen können die Punkte auf die einzelnen Blätter des Planes aufgetragen werden.

In denjenigen Fällen, wo lediglich für den Lageplan sehr viele Punkte bestimmt werden müssen, trennt man zweckmäßig die Lage- und Höhenmessung; man nimmt zuerst den Lageplan je nach der verlangten Genauigkeit nach der Zahlenmethode (IV. Abschn.) oder von den Polygonpunkten und weiteren Hilfspunkten aus tachymetrisch (und durch kleine direkte Messungen ergänzt) auf, und bestimmt nach dessen Fertigstellung die verhältnismäßig kleine Zahl der über die Fläche zerstreuten Geländepunkte nach Lage und Höhe teils tachymetrisch, teils durch Flächennivellement (§ 100), um danach die Höhenlinien zeichnen zu können.

Wird bei den tachymetrisch aufgenommenen Punkten in den hori-

zontalen Entfernungen der Fehler $\pm dD$ (der sich meist nach dem Planmaßstabe richtet) und in den Höhen der Fehler $\pm dh$ zugelassen, so ist dadurch die Schärfe dL des zwischen den beiden Fäden gesehenen Stückes der Abstandlatte und die bei der möglichen Meßschärfe $d\alpha$ des Höhenwinkels noch zulässige Entfernung gegeben. Die einschlägigen Fragen werden durch die Differentialformeln der in § 39 gefundenen Gleichungen $E = C \cdot L$, $D = E \cos^2 \alpha$ und $h = \frac{E}{2} \sin 2\alpha$, nämlich:

$$dD = C \cos^2 \alpha \cdot dL - E \sin 2\alpha \cdot d\alpha \qquad (1)$$

$$dh = \frac{C}{2} \sin 2\alpha \cdot dL + E \cos 2\alpha \cdot d\alpha \qquad (2)$$

beantwortet.

Z. B. für ein Instrument mit $C \approx 100$; $d\alpha = \pm \frac{d\alpha'}{\varrho'}$ wird bei einem durchschnittlichen Neigungswinkel $\alpha = \pm 10^0$

$$dD = 97 \cdot dL \pm \frac{d\alpha'}{10000} \cdot E \text{ und } dh = \pm 17 \cdot dL + \frac{d\alpha'}{3660} \cdot E.$$

Der Fehler $dL = \pm 2$ mm verursacht demnach einen Entfernungsfehler von $\pm 0{,}19$ und einen Höhenfehler von $\pm 0{,}03$ m, während ein Höhenwinkelfehler von $d\alpha' = \pm 2'$ einen Entfernungsfehler von $\pm 0{,}02\,\%$ und einen Höhenfehler von $\pm 0{,}05\,\%$ der Entfernung verursacht. Für die Lagevermessung braucht deshalb α und für die Höhenmessung L im allgemeinen nicht scharf abgelesen zu werden.

B. Bei der Vermessung großer Flächen, z. B. von Ländern, liefert für die Lagevermessung eine Haupttriangulierung und für die Höhenangaben ein Feinnivellement die Grundlagen. Durch anschließende Triangulierungen bzw. auch durch Polygonierung werden weitere Punkte in der Lage bestimmt und deren Höhen entweder durch Nivellieren oder auf trigonometrischem Wege (Kapitel 16) gefunden.

Wird die Geländeaufnahme in sehr kleinem Maßstabe (1 : 10000, 1 : 25000) ausgeführt (topographische Aufnahme), dann werden diese Punkte mit ihren Koordinaten zuerst auf das entsprechende Blatt der Karte aufgetragen. Nach Verkleinern etwa vorhandener Grundpläne (Katasterkarten), in die vorher die Dreieckspunkte eingezeichnet sind, auf den Maßstab der Karte und Eintragen dieser Verkleinerungen zwischen die passenden Dreieckspunkte usw. kann ein großer Teil der für die Lage wichtigen Gegenstände (Straßen, Wege, Häuser, Wasserläufe, Wald, Wiesen u. dgl.) erhalten werden. Die eigentliche topographische Aufnahme erfolgt dann mit dem Meßtischapparate in der im III. Abschnitt (und im 15. Kapitel) geschilderten Weise; die vorhandenen Punkte dienen hierbei als Meßtischstandorte und als Aus-

gangs- und Anschlußpunkte von Tachymeter- bzw. Tachymeterbussolenzügen. Weitere Tachymeterstandorte werden durch Einschneiden nach bekannten (Lage-)Punkten und durch Höhenwinkelmessung bzw. auch durch Nivellieren nach gegebenen Punkten gefunden. Das Barometer kann zur Einschaltung von untergeordneten Punkten an steilen bewaldeten Hängen u. dgl., deren Lage etwa durch Einschreiten bestimmt wird, dienen.

In Ländern, in denen die Katasterkarten (sog. Steuerblätter, Flurkarten, die sich auf eine scharfe Triangulierung gründen) in großem Maßstabe (z. B. 1:5000, 1:2500) durch Druck vervielfältigt werden, ergänzt man diese den Grundriß liefernde Karten durch eine passende Anzahl nach Lage und Höhe bestimmter Punkte und erhält dadurch zugleich eine in großem Maßstabe gezeichnete topographische Landeskarte, die dann für besondere Zwecke (nach geeigneten Auslassungen) photographisch z. B. auf 1:25000 verkleinert werden kann. Diese Ergänzungsmessungen gehen in der Weise vor sich, daß zuerst durch Nivellieren längs einiger Wege usw. mehrere über die Karte verteilte sichere Höhenfestpunkte geschaffen werden; im Anschluß daran liefert in den ebenen Lagen ein Flächennivellement (§ 100) Lage und Höhe von Geländepunkten. Die tachymetrische Aufnahme weiterer Punkte kann hier statt mit dem im allgemeinen schweren Meßtischapparate mit kleinen leichten Kreistachymetern (mit Bussole) geschehen, deren Anwendung aber weiterhin das Auftragen der tachymetrisch bestimmten Punkte mit Hilfe des Transporteurs (siehe § 118) notwendig macht.

§ 118. Auftragen der Tachymeteraufnahmen.

Zuerst werden alle Punkte, deren rechtwinklige Koordinaten gegeben bzw. berechnet sind, wie z. B. die Punkte I, II, III . . . des § 116 Fig. 179, mit diesen in den mit einem Dezimeterquadratnetz überzogenen Plan eingetragen. Die weiteren Tachymeterstandpunkte werden in der Regel mit den nach diesen bekannten Punkten gemessenen Entfernungen und Richtungen auf dem Plane durch Zirkelschnitte, Einpassen von auf Pauspapier gezeichneten Visierstrahlen zwischen die entsprechenden Punkte des Planes u. dgl. konstruiert.

Die übrigen tachymetrisch aufgenommenen Punkte werden entweder mit Hilfe eines Winkeltransporteurs mit Maßstab (Strahlenzieher, Fig. 180) Punkt für Punkt in den Plan eingetragen durch Antragen des Richtungsunterschiedes gegen eine gezeichnete Orientierungsrichtung und Auftragen der horizontalen Entfernung vom Standorte, oder dadurch, daß zunächst alle von einem Standort aus aufgenommenen Punkte auf ein Pauspapier, das zu diesem Zwecke auf

eine mit Winkel- und Längenteilung versehene Rosette (Fig. 181) gelegt wird, aufgetragen werden, so daß nach Auflegen des Pauspapiers und Orientieren nach einer im Plane gezeichneten Richtung sogleich alle Punkte durchgestochen werden können.

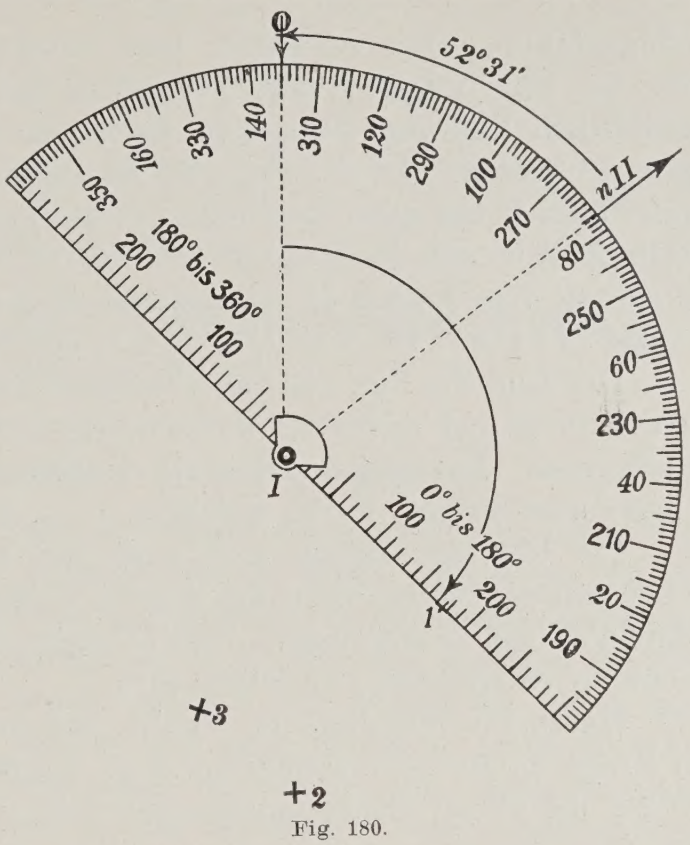


Fig. 180.

Der etwa 30 cm Durchmesser besitzende, häufig aus Horn (oder Zellhorn) oder Papier gefertigte Winkeltransporteur besitzt $^1/_2$ bis $^1/_4{}^0$ Teilung in der aus der Fig. 180 ersichtlichen Bezifferung von 0^0 bis 360^0 (von 0^0 bis 180^0 mit schwarzen, von 180^0 bis 360^0 mit roten Ziffern). Der Durchmesser ist vom Mittelpunkte aus mit einer

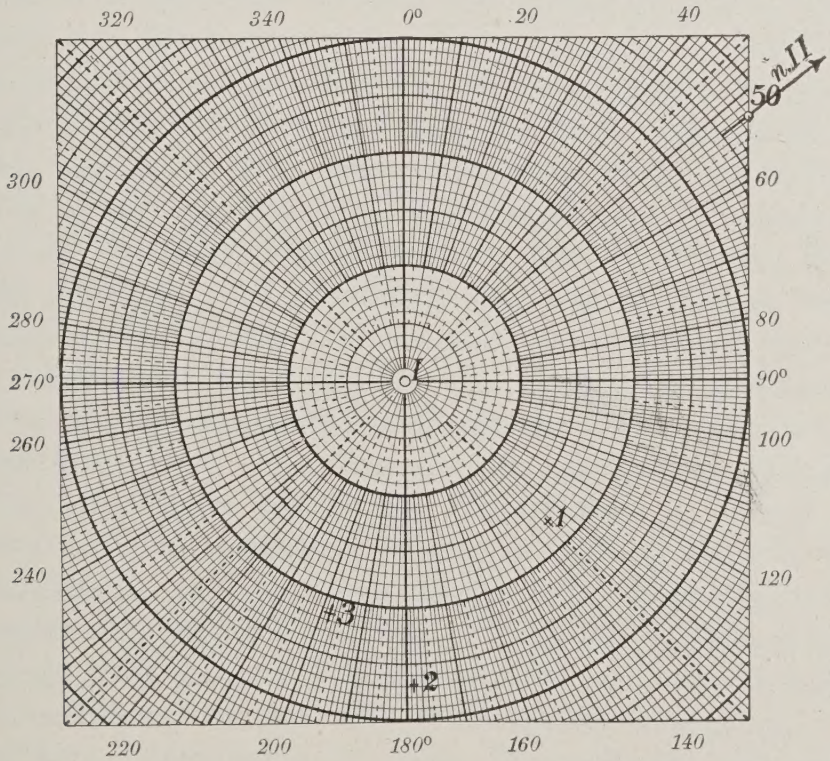


Fig. 181.

Längenteilung (mit schwarzer bzw. roter Bezifferung) im Maßstabe des zu zeichnenden Planes versehen und durch Anbringen einer metallenen Führung kann dem Erweitern des Mittelpunktloches vorgebeugt werden. In der Fig. 180 ist angenommen, daß nach Anzielen von Punkt II auf dem Theodolithorizontalkreis $52^0\,31'$ abgelesen wurde; nach Angabe des Nullpunktes auf Grund der im Plane vorhandenen Richtung von I nach II ist gezeigt, wie mit dem Transporteur der Punkt (1) [$135^0\,10'$ und $D = 176{,}0$] aufgetragen wird.

Die Rosette, Fig. 181, auf Zeichen- oder auf Pauspapier, ist mit Gradteilung und mehreren konzentrischen Kreisen bis zu etwa 15 cm Halbmesser (Entfernungskreisen) versehen; sie wird zweckmäßig mit blauer oder grüner Farbe gedruckt.

Die Rosetten eignen sich auch gut zum Auftragen von Tachymeterbussolenzügen, wenn das hierzu verwendete, auf die Rosette gelegte Pauspapier mit einigen Parallellinien, die der magnetischen Nordrichtung entsprechen, versehen wird.

Durch Interpolation der Punkte mit runden Höhen zwischen den in Frage kommenden Geländepunkten werden in derselben Weise wie früher die entspr. Höhenlinien gefunden.

XI. Abschnitt.

Wassermengen- und Wasserkraftmessungen in Wasserläufen.

§ 119. Allgemeines über Wasserläufe.

Infolge der zeitlichen Veränderlichkeit der im Einzugsgebiete der Wasserläufe niederfallenden atmosphärischen Niederschläge muß auch die von dem einzelnen Wasserlaufe abgeführte Wassermenge variieren. Da die Ufer den Wasserwirkungen nicht überall den gleichen Widerstand entgegensetzten und -setzen, mußten und müssen im Laufe der Zeit tiefere und seichtere Stellen und auch ungleich große Durchflußquerschnitte für die Wassermenge entstehen. Bei Beharrungszustand des Wasserspiegels fließt in der Zeiteinheit durch aufeinanderfolgende Querschnitte dieselbe Wassermenge hindurch, und da die Querschnitte verschieden groß sind, so muß auch die in diesen vorhandene Geschwindigkeit des Wassers verschieden groß sein. Da letztere hauptsächlich von der Neigung des Wasserspiegels — dem Gefälle — abhängt, so muß auch dieses wechseln. Bei wechselnder Wasserführung fällt oder steigt der Wasserspiegel aber durchaus nicht gleichmäßig an allen Stellen, weil ja die Durchflußquerschnitte wieder verschieden groß werden. Die Folge ist, daß auch das Gefälle des Wasserlaufes sich ändert, und die jeweilige Wassergeschwindigkeit in einem Durchflußquerschnitte hängt fast ausschließlich von dem jeweiligen Gefälle bei diesem Querschnitte ab. Es wird deshalb durch dieselbe Querschnittsfläche bei steigendem Wasserspiegel eine größere Wassermenge abgeführt werden als bei Beharrungszustand, und bei fallendem Wasser eine kleinere als diese. Soll deshalb die sekundliche Wassermenge, die an einer gegebenen Stelle des Wasserlaufes z. B. bei Niedrigwasser hindurchfließt, gemessen werden, so muß an einer in der Nähe der Messungsstelle angebrachten Marke die Veränderlichkeit des Wasserspiegels vor, während und nach der Messung beobachtet werden und außerdem wird man die Messungsstelle in einer möglichst geraden (gleichmäßigen) Strecke des Wasserlaufes auswählen.

Die nähere Untersuchung eines Wasserlaufes für technische Zwecke erfordert:

1. die Beschaffung eines Lageplanes, aus dem die Krümmungen, der Talweg, die Längen, Breiten usw. des Wasserlaufes ersichtlich sind;
2. die Aufnahme des Längenprofiles des Wasserspiegels und der Sohle des Wasserlaufes zur Bestimmung der Gefälle auf den einzelnen Strecken des Wasserlaufes;
3. die Aufnahme einiger Durchflußquerschnitte des Wasserlaufes;
4. Wassergeschwindigkeitsmessungen und dazugehörige Berechnungen der sekundlichen Abflußmenge an einigen Stellen.

Zeigt sich dann z. B., daß zwischen zwei Punkten A und B des Wasserspiegels ein Höhenunterschied H besteht, und kann durch Anlegen eines kurzen Verbindungskanals zwischen den beiden Punkten eine Fallhöhe h (der Teil $H - h$ geht infolge von Reibungsverlusten in den Kanälen oder Röhren verloren) in einer Kraftmaschine ausgenutzt werden, so ist die damit zu gewinnende Wasserkraft in Pferdestärken

$$\eta \cdot \frac{Qh}{75},$$

worin η der Wirkungsgrad der Kraftmaschine (z. B. bei guten Turbinen $0{,}75 \div 0{,}85$ bei günstigster Beanspruchung), Q die in 1 Sekunde durch den Querschnitt beim oberen Punkte hindurchfließende Wassermenge in cdm (Liter) und h die Gefällhöhe in Metereinheiten ist. Die Höhen H werden stets am zuverlässigsten durch Nivellieren, die Mengen Q durch direkte Messungen der Wassergeschwindigkeiten und Durchflußquerschnitte ermittelt (siehe die folgenden Paragraphen).

§ 120. Anfertigung des Lageplanes und des Längenprofiles.

Wenn kein brauchbarer Lageplan für die in Frage kommende Strecke des Wasserlaufes vorhanden ist, dann wird von diesem Gebiete entweder mit dem Meßtisch (nach § 44) oder nach dem 8. oder 12. Kapitel ein Plan aufgenommen. In diesen Plan werden außer den bei einem bestimmten Wasserstande vorhandenen Uferlinien auch etwa vorhandene Pegel, sowie sonstige an den Ufern bezeichnete Punkte (Pflöcke, von denen aus leicht die Wasserspiegelhöhe bestimmt werden kann) und auch die Begrenzung eines etwaigen Überschwemmungsgebietes eingezeichnet.

Das Längenprofil sollte der Verbindungslinie der tiefsten Stellen des Flußbettes — dem sog. Talweg oder der Stromrinne — folgen. Liefert der Lageplan keine genügenden Unterlagen für die Längen, so mißt man zur Aufnahme des Längenprofiles die Längen am Ufer ab

und bezeichnet die einzelnen in Abständen von 100 oder 200 m liegenden Punkte mit Pflöcken, die in kleine am Ufer hergestellte Buchten derart eingeschlagen werden, daß das jeweilige Stichmaß von der Pflockoberfläche bis zum Wasserspiegel leicht gemessen werden kann. An breiten gekrümmten Wasserläufen müssen solche Pflöcke an gegenüberliegenden Uferstellen eingeschlagen werden; als Wasserspiegelhöhe im Stromstriche wird dann meist das Mittel aus den beiden Höhen an gegenüberliegenden Punkten genommen.

Die Höhe dieser Pflöcke wird durch ein Festpunktnivellement bestimmt (nach § 95). Um die einem bestimmten Zeitpunkte entsprechenden Wasserspiegelhöhen zu erhalten, müssen die Stichmaße von den Pflöcken zum Wasserspiegel zu gleicher Zeit gemessen werden. Wenn nicht die genügende Beobachteranzahl vorhanden ist, um die nötigen Ablesungen zu einem vereinbarten Zeitpunkte ausführen zu können, dann können diese Stichmaße näherungsweise auch von einem Beobachter ermittelt werden. Dieser liest zunächst, flußaufwärts gehend, alle Stichmaße ab, dann führt er diese Messungen flußabwärtsgehend aus; die Mittel aus den bei jedem Punkte gemachten Ablesungen können als gleichzeitige Stichmaße gelten.

Nach Annahme eines passenden Längen- und Höhenmaßstabes werden die Längenschnitte für (das linke und rechte Ufer) den Wasserspiegel aufgetragen, wodurch das Gefälle (Neigung des Wasserspiegels) gefunden wird. Mißt man an einigen Stellen die größten Wassertiefen und trägt diese in den entsprechenden Punkten des Lageplanes und des Längenprofiles ein, so erhält man damit die Lage und das Längenprofil des Talweges.

§ 121. Querprofilaufnahme.

Genaue Querprofile werden meist nur an wenigen Stellen des Wasserlaufes aufgenommen.

Über schmale, langsam fließende Wasserläufe spannt man zu diesem Zwecke senkrecht zur Richtung des Stromstriches ein Meßband, eine Meßleine u. dgl. und nimmt das Querprofil in derselben Weise wie in § 99 mit dem Nivellierinstrumente auf, indem alle $\frac{1}{2}$ bis 2 m auf der Nivellierlatte bis auf cm abgelesen wird. In Ermangelung eines Nivellierinstrumentes kann man mit einem lotrechten Maßstabe von $3 \div 4$ m Länge — der Peilstange — die Wassertiefe an den einzelnen Punkten messen. Kräftige Peilstangen sollten zur Verminderung größeren Wasseraufstaues möglichst ovalen Querschnitt besitzen. Zur Messung grosser Wassertiefen benutzt man einen Lot-

draht, der durch ein schweres, bei der Messung auf der Sohle aufruhendes Gewicht gespannt wird.

Diese Tiefenmessungen können von einem Stege, einer passenden Brücke, oder auch von einem Flosse aus, das durch zwei Seile etwa von den Ufern aus an die einzelnen Meßpunkte gebracht wird, ausgeführt werden.

Die Querschnitte werden häufig im Maßstabe 1 : 20 bis 1 : 200 aufgetragen.

§ 122. Wassergeschwindigkeitsmessungen mit Schwimmkörpern.

Als Wassergeschwindigkeit bezeichnet man den Weg eines Wasserteilchens in 1 Sekunde. Hätte das Wasser in allen Punkten eines Durchflußquerschnittes die zu dessen Ebene senkrecht gerichtete Geschwindigkeit v_m, so wäre die durch den Querschnitt von der Größe F in 1 Sekunde hindurchfließende Wassermenge

$$Q = F \cdot v_m. \tag{1}$$

Nach den Erörterungen in § 119 ist leicht zu ersehen, daß wegen der Reibung des Wassers an den Wänden die Geschwindigkeit der Wasserteilchen an verschiedenen Stellen des Durchflußquerschnittes sehr verschieden ist. Im allgemeinen erreicht die Wassergeschwindigkeit in einem Punkte des Querschnittes ein Maximum. Dieser Punkt liegt in regelmäßigen Profilen nahezu in der Mitte in oder nahe an der Wasseroberfläche und die Verbindungslinie aufeinanderfolgender Punkte größter Geschwindigkeit wird als Stromstrich bezeichnet. In der vertikalen Ebene durch den Stromstrich ist im allgemeinen die größte Oberflächengeschwindigkeit v_{max} vorhanden und diese kann man mit in den Stromstrich geworfenen Schwimmkörpern, die lediglich vom Wasser getragen werden, und dem Einflusse des Winddruckes und der Schwere möglichst wenig unterliegen, leicht messen. Bezeichnet v_m die nach Gleichung (1) definierte mittlere Wassergeschwindigkeit, v_{max} die gemessene maximale Geschwindigkeit an der Wasseroberfläche, so findet man (nach Wagner) bis auf einige % genau die mittlere Geschwindigkeit durch

$$v_m = 0{,}705 \cdot v_{max} + 0{,}01 \cdot v_{max}^2. \tag{2}$$

Zu Oberflächenschwimmern verwendet man metallene Hohlkugeln, Flaschen, kleinere Holzstückchen u. dgl., die durch teilweises Füllen mit Wasser, Anbinden eines Steines usw. derart beschwert sind, daß sie bis auf einen kleinen Teil in das Wasser eintauchen, und die weiterhin durch ein kleines Fähnchen besser sichtbar gemacht werden können.

Zur Messung der maximalen Oberflächengeschwindigkeit wählt man eine möglichst gleichmäßige und gerade Strecke, $\overline{AB}$ (Fig. 182) des Wasserlaufes von etwa 50 ÷ 100 m Länge aus, mißt ihre Länge s und bezeichnet die beiden Enden mit Hilfe eines Winkelspiegels mit je zwei an den Ufern aufgestellten Fluchtstäben. Der Schwimmer wird etwa 20 m oberhalb A in der Nähe des Stromstriches eingeworfen. Der bei A stehende Beobachter notiert die Zeit des Schwimmerdurchganges durch AA', geht dann nach B und beobachtet den Durchgang durch BB' mit einer Sekundenuhr. Aus mehreren Beobachtungen erhält man dann den Mittelwert der zum Durchfließen der Wegstrecke s nötigen Zeit t und damit

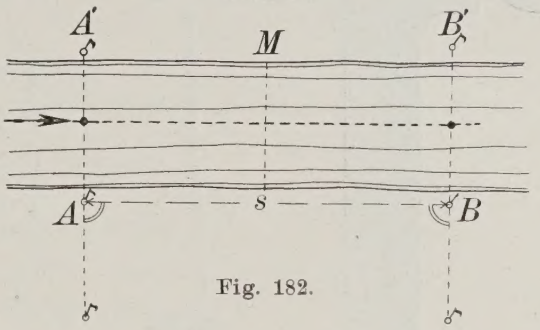


Fig. 182.

$$v_{max} = \frac{s}{t}. \qquad (3)$$

Diese Beobachtungsmethode kann von einem Beobachter bis zu Geschwindigkeiten von etwa 3 $\frac{m}{Sek.}$ angewendet werden. An einer im Wasserlaufe angebrachten Marke bzw. an einem Pegel wird der Wasserstand vor und nach der Messung und ev. im Laufe des Tages abgelesen. Die Messung des Durchflußquerschnittes F wird entweder bei A und B oder auch nur in der Mitte M zwischen diesen beiden Profilen ausgeführt.

§ 123. Der hydrometrische Flügel.

Die zuverlässigsten Geschwindigkeitsmessungen an beliebigen Punkten eines Durchflußquerschnittes (deren Lage innerhalb des Querschnittes nur durch die Dimensionen des hydrometrischen Flügels beschränkt ist) werden mit hydrometrischen Flügeln ausgeführt. Ein solcher besteht aus einer in der Regel horizontal gelagerten Welle, auf der ein aus 2 bis 5 Schaufeln bestehendes Schaufelrad sitzt, das vom fließenden Wasser gedreht wird. Die Anzahl der in einer bestimmten Zeit, z. B. 100 oder 200 Sekunden, ausgeführten Umdrehungen wird entweder mit Hilfe eines Zählwerkes, etwa irgend eines Räderzählwerkes, das mit einer Ein- und Ausrückvorrichtung versehen ist, gemessen, oder es wird die Zeitdauer beobachtet, die während einer runden, z. B. durch elektrische Klingelzeichen gemeldeten, Anzahl von Radumdrehungen (25, 50, 100) verfließt. Während im ersten Falle

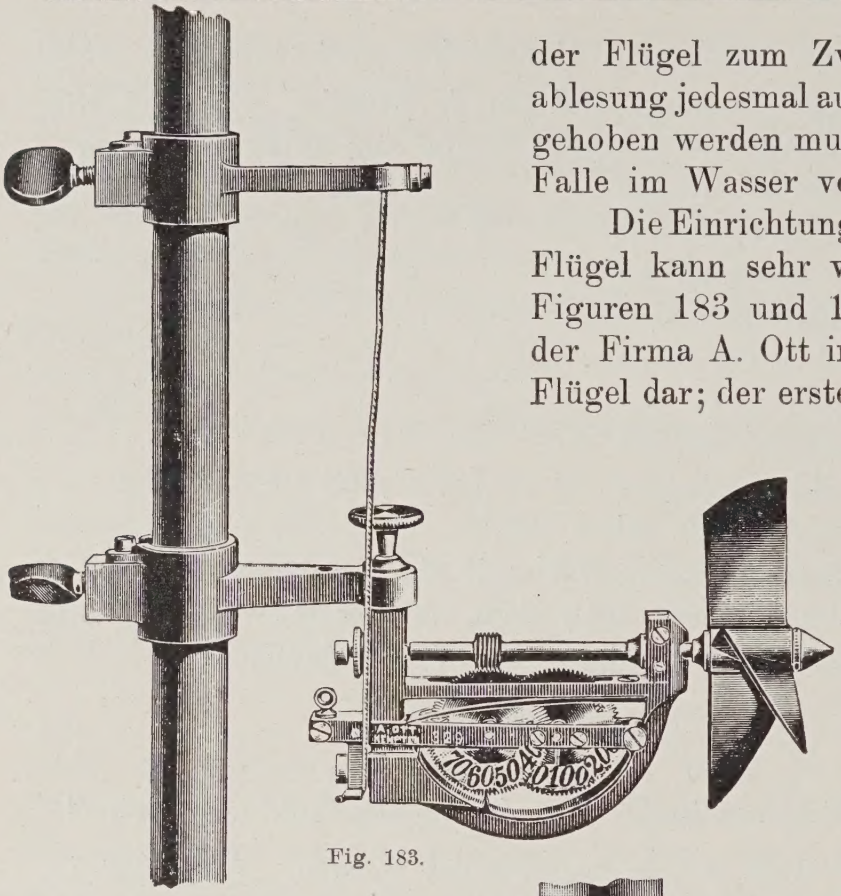


Fig. 183.

der Flügel zum Zwecke der Zählwerkablesung jedesmal aus dem Wasser herausgehoben werden muß, kann er im zweiten Falle im Wasser verbleiben.

Die Einrichtung der hydrometrischen Flügel kann sehr verschieden sein. Die Figuren 183 und 184 stellen zwei von der Firma A. Ott in Kempten gefertigte Flügel dar; der erste ist mit einem Räderzählwerk, dessen Wirkungsweise aus der Figur ersichtlich ist, der zweite mit mehreren elektrischen Kontaktanordnungen (nach Dr. Epper) versehen, die je nachdem die 4 drehbaren Kontaktstifte *c* gestellt werden, die sich auf dem von der Schnecke getriebenen, 100 Zähne besitzenden, Zählrade *Z* befinden, nach $\frac{1}{4}$ Umdrehung (25

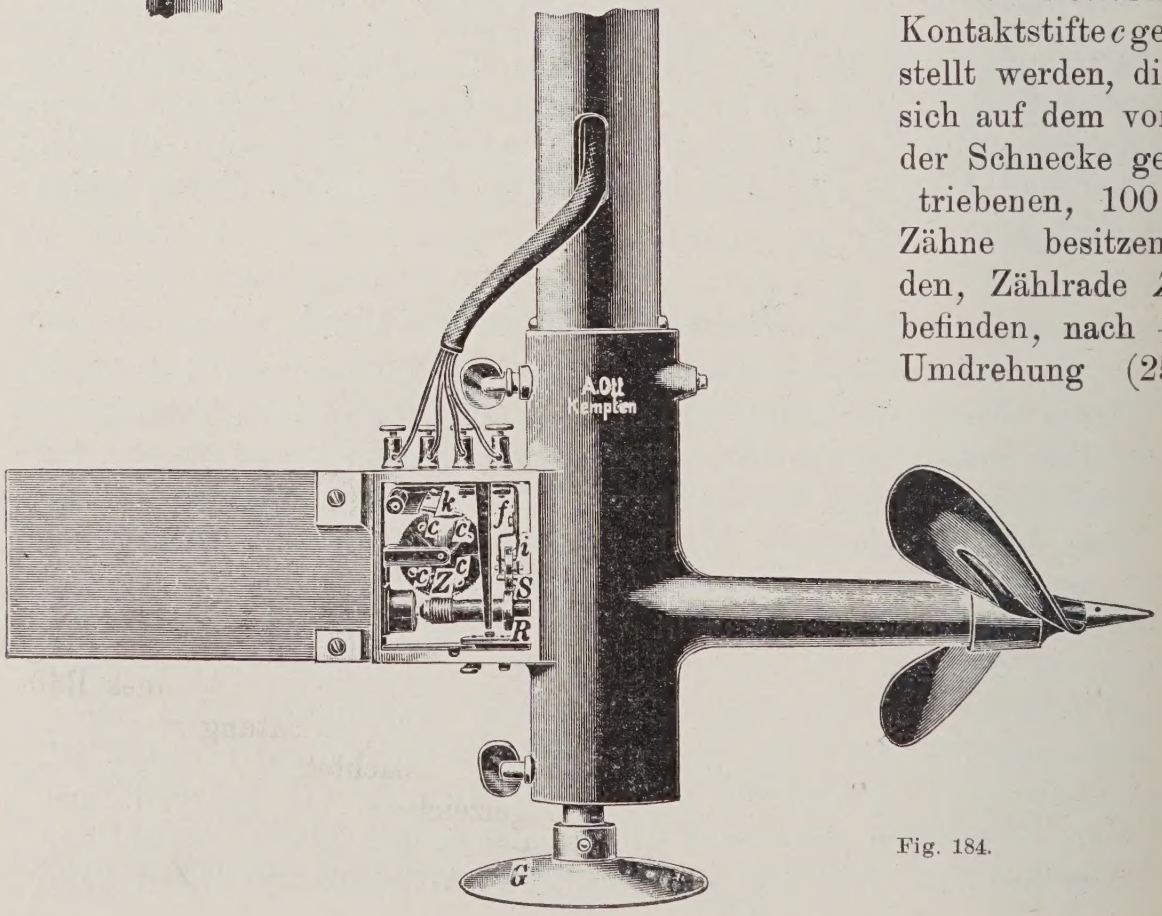


Fig. 184.

Schaufelumdrehungen), $\frac{1}{2}$ Umdrehung oder 1 Umdrehung des Zählrades (100 Schaufelumdrehungen) durch Berühren des Kontakthebels *k* den elektrischen Strom schließen und dadurch ein Klingelzeichen geben.

Damit die hydrometrischen Flügel zu Messungen kleiner Wassergeschwindigkeiten bis zu etwa 5 $\frac{\text{cm}}{\text{Sek.}}$ verwendet werden können, wird die Flügelwelle entweder zwischen Spitzen (Achatlager) oder auf Kugeln gelagert. Die Flügelschaufeln sind meist nach Schraubenflächen gekrümmt, deren Erzeugende entweder senkrecht oder schief zur Flügelwelle liegt und deren Steigung meist zwischen 12 und 100 cm schwankt.

Bei der Messung werden die hydrometrischen Flügel entweder an einer auf der Sohle des Wasserlaufes aufstehenden und lotrecht gehaltenen Stange in der Regel von 3 — 4 m Länge, oder an einer in den Wasserlauf von einem Stege aus lotrecht eingehängten Stange verwendet. Bei kleineren Flügeln besitzen diese häufig aus Gasrohren hergestellte Stangen meist runden Querschnitt und sind, um das Einsinken in den weichen Flußboden zu verhindern, mit einer Grundscheibe oder einem Kreuz versehen. Damit diese Stange auch als Peilstange dienen kann, trägt sie meist eine $\frac{1}{2}$ dm-Teilung, und um zu vermeiden, daß sich der hydrometrische Flügel auf der runden Stange dreht, ist auf ihr eine vierkantige Führungsleiste aufgeschraubt. Die Flügelachse muß bei der Messung stets senkrecht zum Querschnitt gerichtet werden. Dies wird durch den etwa $\frac{1}{2}$ m langen Richt- und Haltestab *d* an der Stange ermöglicht (Fig. 185). Der Zweck der Schrauben *a* und *c*, sowie des Seils und der Rolle *b* ist unmittelbar ersichtlich.

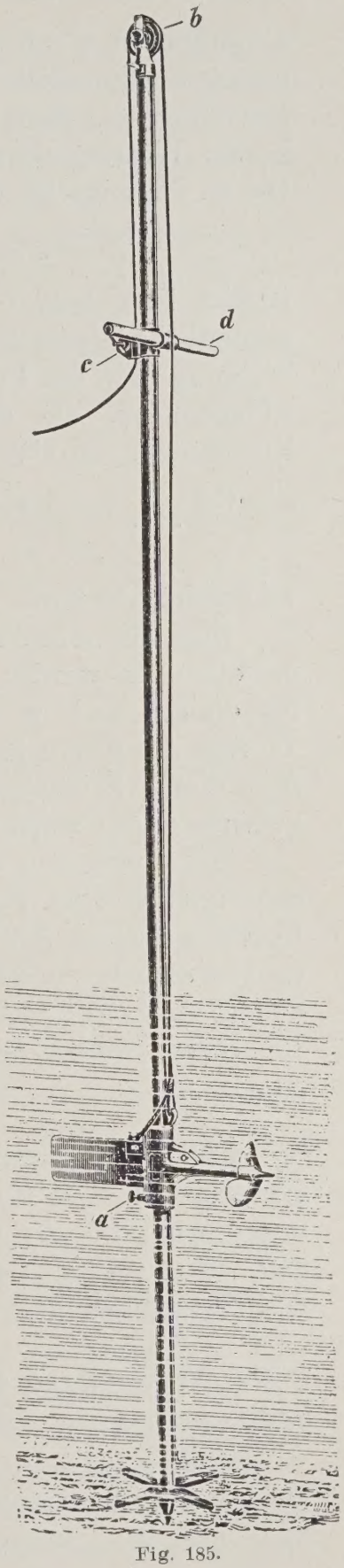


Fig. 185.

Kennt man die Beziehung zwischen der

sekundlichen Umdrehungszahl n der Flügelschaufeln und der entsprechenden sekundlichen Wassergeschwindigkeit v — die sog. Flügelgleichung —, dann kann für jedes einzelne beobachtete n die zugehörige Wassergeschwindigkeit leicht berechnet werden. Nach Prof. Dr. M. Schmidt ist die allgemeine Form der Flügelgleichung

$$v = k(1 - \beta) \cdot n + \sqrt{(k\beta)^2 \cdot n^2 + {v_0}^2}. \qquad (1)$$

Hierin bedeuten: v die sekundliche Wassergeschwindigkeit, n die sekundliche Umdrehungszahl des Flügelrades, k, β und v_0 von der Steigung bzw. der Form der Flügelschaufeln, sowie von den Reibungswiderständen, die der Flügeldrehung entgegenwirken, herrührende Konstanten. In vielen Fällen und bei größeren Geschwindigkeiten als $v > 0{,}4 \frac{\text{m}}{\text{Sek.}}$ kann statt der Gleichung (1) häufig die Gleichung

$$v = a + b \cdot n \qquad (1')$$

verwendet werden.

Sind für einen Flügel die Konstanten k, β, v_0 bzw. a und b ermittelt, dann werden in der Regel aus den Gleichungen (1) bzw. (1') für einige runde n die zugehörigen v berechnet, so daß mit diesen Werten die Kurve in ein Koordinatensystem eingetragen werden kann. Aus dieser Zeichnung entnimmt man weiterhin für ein jeweils gegebenes n das zugehörige v.

Die Konstanten werden am schärfsten aus beobachteten zusammengehörigen Werten von v und n berechnet. Diese Werte werden in hydrometrischen Prüfungsanstalten beobachtet, in denen die Flügel (mit verschiedenen, beim einzelnen Versuch gleichmäßigen, Geschwindigkeiten) um die Strecke s durch ruhendes Wasser bewegt werden. Die hierzu nötige Zeit t und die während dieser gemachten Flügelumdrehungen u werden beobachtet, so daß sich durch $v = \frac{s}{t}$ und $n = \frac{u}{t}$ die zusammengehörigen Werte ergeben. Derartige Einrichtungen befinden sich z. B. an der Kgl. Techn. Hochschule in München (Prüfungsgebühr 50 ℳ) und an der Kgl. Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau in Berlin (Schleuseninsel im Tiergarten) (Prüfungs- und Stempelgebühr 51,50 ℳ).

§ 124. Verwendung des hydrometrischen Flügels zu Geschwindigkeitsmessungen. Berechnung der sekundlichen Wassermenge.

Mißt man mit dem hydrometrischen Flügel die in demselben Punkte des Durchflußquerschnittes eines im Beharrungszustande befindlichen Wasserlaufes in aufeinanderfolgenden Zeiten vorhandene

Wassergeschwindigkeit, dann zeigt sich, daß diese Geschwindigkeit wegen der inneren, wirbelnden Bewegung des Wassers sich beständig ändert. Es ist deshalb notwendig, daß die Beobachtungen auf einen längeren Zeitraum verteilt werden, damit durch die Messung die in einem Punkte des Querschnitts herrschende durchschnittliche Geschwindigkeit gefunden wird. Es genügt erfahrungsgemäß für praktische Zwecke, aus Beobachtungen, die sich über 3 bis 6 Minuten erstrecken, den Mittelwert zu nehmen. (Man macht meist 2 bis 3 Messungen von je etwa 100 Sekunden Dauer, bzw. man beobachtet

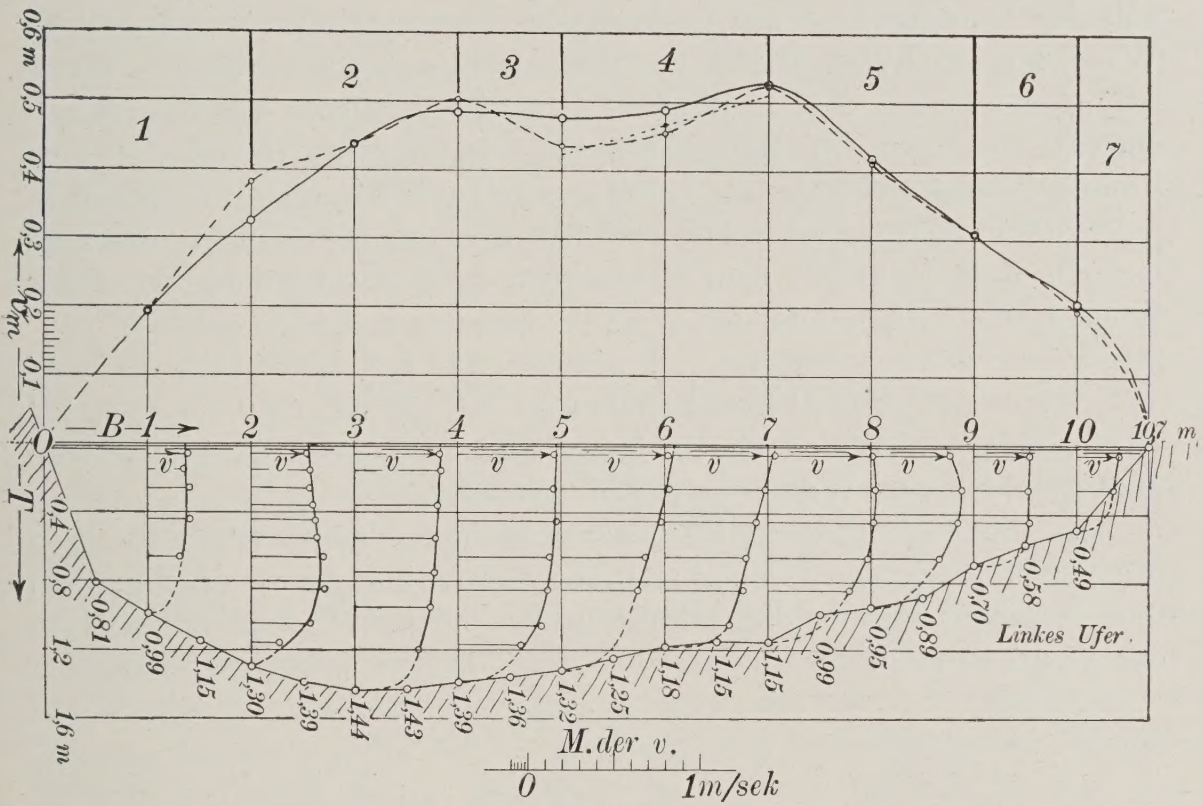


Fig. 186.

die aufeinanderfolgenden (z. B. elektrischen) Klingelzeichen während etwa 5 Minuten.)

Mißt man in dieser Weise die (durchschnittlichen) Geschwindigkeiten in allen Punkten einer Vertikalen vom Wasserspiegel bis zur Sohle und trägt die Wassertiefen T als Abszissen und die zugehörigen Wassergeschwindigkeiten v als Ordinaten in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein, dann bekommt man durch Verbinden der erhaltenen Punkte durch eine ausgleichende Linie in den verschiedenen Vertikalen des gleichen Querschnittes Kurven von den in Fig. 186 dargestellten Formen. (Die durchschnittliche Wassergeschwindigkeit in jedem Punkte wurde hierbei durch Beobachtung der Flügel-

umdrehungen während 3 Minuten gefunden.) Das Gesetz dieser Kurven ist schon von mehreren Forschern zu ergründen versucht worden.

Zur Berechnung der in 1 Sekunde durch den Durchflußquerschnitt fließenden Wassermenge Q denkt man sich in jedem einzelnen Punkte dieses Querschnittes die entsprechende, senkrecht zum Querschnitte gerichtete Geschwindigkeit angetragen. Verbindet man alle auf diese Weise erhaltenen Punkte durch eine Fläche, dann stellt der Inhalt des Körpers, der von dieser Fläche auf der einen Seite, von der lotrechten Querschnittebene auf der anderen Seite und auf den Seiten von der Umfangfläche des Querschnitts begrenzt ist, die sekundliche Wassermenge Q vor. Dieser Kubikinhalt kann auf verschiedene Weise gefunden werden. Am häufigsten wird dieser Körper durch Vertikalebenen senkrecht zur Querschnittebene in einzelne (meist $1 \div 3$ m breite) Zonen zerlegt. Ist v_m die mittlere Geschwindigkeit in jeder dieser Zonen senkrecht zum Querschnitt (die Flügelwelle muß deshalb stets senkrecht zum Querschnitt gerichtet werden) und f der Zonenquerschnitt, dann ist

$$Q = f_1 \cdot v_{m_1} + f_2 \cdot v_{m_2} + \cdots = \sum f \cdot v_m. \qquad (2)$$

Die einzelnen mittleren Geschwindigkeiten v_m können näherungsweise auf verschiedenen Wegen gefunden werden.

a) Man mißt in der Mitte jeder einzelnen Zone an vielen Punkten der Vertikalen T die durchschnittliche Geschwindigkeit v (s. Fig. 186) und berechnet daraus die entsprechende mittlere Geschwindigkeit in der Vertikalen durch

$$v_m = \frac{\int_0^T v \cdot dT}{T}, \qquad (3)$$

d. h. als Breite des flächengleichen Rechtecks mit der Tiefe T. Kann der Flügel während der Geschwindigkeitsmessung gleichmäßig durch die Vertikale T ab und auf bewegt werden, so wird dadurch unmittelbar v_m erhalten.

b) Man mißt in der Mitte jeder Zone die durchschnittliche Geschwindigkeit (nach Schmidt) in $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{6}$ und $\frac{5}{6}$ der Tiefe T und betrachtet den Mittelwert aus diesen 3 Geschwindigkeiten näherungsweise als v_m.

c) Man mißt in 0,67 ($\approx \frac{2}{3}$) der Tiefe T unter dem Wasserspiegel in der Mitte jeder Zone unmittelbar v_m. (Dieser Wert $0{,}67 \cdot T$ wurde empirisch aus vielen Wassermessungen an verschiedenen kleineren Flüssen mit einem mittleren Fehler von $\pm$ 0,026 berechnet.) In der Fig. 186 z. B. sind in den einzelnen Vertikalen die genauen Werte v_m

nach Gleichung (3) oberhalb des Wasserspiegels durch eine ausgezogene Kurve, die in 0,67 der Tiefe gemessenen Werte mit einer gestrichelten Linie eingezeichnet.

d) Man mißt die mittlere Geschwindigkeit v_m nach a), b) oder c) nur in einigen Vertikalen, trägt diese senkrecht zum Wasserspiegel in den betreffenden Punkten des Querschnitts vom Wasserspiegel aus auf und verbindet die erhaltenen Punkte durch eine ausgleichende Kurve. Die vom Wasserspiegel bis zu dieser Kurve in der Mitte jeder einzelnen angenommenen Zone abgemessene Strecke entspricht dann der mittleren Geschwindigkeit in der Zonenmitte. Es ist hierbei nicht notwendig, daß die Geschwindigkeit in vielen Vertikalen gemessen wird, es genügt häufig sie in etwa 1 m Abstand von den Ufern und dann etwa alle $2 \div 5$ m zu messen.

Die Kurve der mittleren Geschwindigkeit v_m in einzelnen Vertikalen ist in Fig. 186 auf Grund eingehender Messungen an vielen Punkten der Vertikalen und auf Grund der Messungen in 0,67 der Tiefe eingezeichnet.

Die Zuverlässigkeit der für Q nach (2) erhaltenen Ergebnisse entspricht angenähert der aufgeführten Reihenfolge a, b, c; bei großen Flüssen wird sehr häufig das unter d) angegebene Verfahren verwendet.

Um einen Überblick über die nach den beschriebenen Messungsarten gefundenen mittleren Geschwindigkeiten in den Vertikalen an einem Zahlenbeispiele zu geben, wurde an einer gleichförmigen, geraden Bachstrecke aus zwei senkrecht über den Bach gelegten Baumstämmen und mit einigen Brettern ein Messungssteg gebaut. Die Ergebnisse der Querschnittmessung sind in Fig. 186 eingeschrieben. Der Wasserspiegel veränderte sich während der Messung nicht. Mit einem hydrometrischen Flügel, der nach je 50 Schaufelumdrehungen ein elektrisches Klingelzeichen gibt und dessen Gleichung $v = 0{,}01 + 0{,}273\sqrt{0{,}10 + n^2}$ ist, wurden in jedem einzelnen bezeichneten Punkte der bei 1, 2, . . . 10 m liegenden Vertikalen während etwa 3 Minuten die aufeinanderfolgenden Klingelzeichen mit einer Sekundenuhr beobachtet und aus den entspr. n ergaben sich dann die graphisch dargestellten Geschwindigkeiten v. Verbindet man die entsprechenden Punkte durch ausgleichende Linienzüge, so erhält man die in der Fig. 186 eingezeichneten Kurven. Mit einem Polarplanimeter wurde damit in den einzelnen Vertikalen die mittlere Geschwindigkeit v_m nach Gleichung (3) gefunden (vgl. § 59), wie sie in Spalte a) angegeben ist (siehe Seite 302).

Die in den Spalten b) und c) angegebenen mittleren Geschwindigkeiten würden voraussichtlich durch Messung und Rechnung nach Lit. b) bzw. c) zu den angegebenen Beträgen gefunden werden; sie

wurden hier aus der graphischen Darstellung entnommen. Die Differenzen $\Delta_1 = v_m^{(a)} - v_m^{(b)}$ und $\Delta_2 = v_m^{(a)} - v_m^{(c)}$ geben die jeweiligen mittleren Fehler einer Bestimmung der mittleren Geschwindigkeit zu

Vertikale	a) v_m in $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$	b) v_{m_1}	c) v_{m_2}	Δ_1	Δ_2	Δ_1^2	Δ_2^2
				mm	mm		
1	0,193	0,200	0,195	− 7	− 2	49	4
2	0,325	0,341	0,382	− 16	− 57	256	3249
3	0,438	0,449	0,438	− 11	0	121	0
4	0,485	0,503	0,503	− 18	− 18	324	324
5	0,477	0,487	0,435	− 10	+ 42	100	1764
6	0,488	0,493	0,455	− 5	+ 33	25	1089
7	0,528	0,536	0,525	− 8	+ 3	64	9
8	0,418	0,427	0,412	− 9	+ 6	81	36
9	0,308	0,313	0,308	− 5	0	25	0
10	0,207	0,205	0,195	+ 2	+ 12	4	144
			Σ	− 87	+ 19	1049	6619

$m_1 = \sqrt{\frac{1049}{10}} = \pm 10{,}5$ mm; $m_2 = \sqrt{\frac{6619}{10}} = \pm 25{,}8$ mm. Man sieht aber, daß die Messungsart b) fast stets etwas zu große mittlere Geschwindigkeiten liefert; die algebraische Summe der Abweichungen $[\Delta_2]$ wird viel kleiner als $[\Delta_1]$, so daß bei einer Wassermengenbestimmung die Messungsart c) im allgemeinen bessere Ergebnisse für die sekundliche Wassermenge liefern wird als b). Aus vielen Messungen in anderen Wasserläufen bis 2,5 m Tiefe und 1,7 $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ Geschwindigkeit wurden sehr nahezu dieselben Zahlenwerte erhalten ($m_2 = \pm 28$ mm und $[\Delta_2]$ stets nur einige cm zu groß).

§ 125. Zahlenbeispiele zur Bestimmung der sekundlichen Wassermenge.

a) Trägt man zunächst die nach § 124, c) in den 1, 2, 3, ... 9 und 10 m vom rechten Ufer entfernten Vertikalen gemessenen mittleren Geschwindigkeiten v_m vom Wasserspiegel aus senkrecht dazu auf und verbindet diese Punkte durch die in Fig. 186 gestrichelt gezeichnete Kurve, so kann an dieser die in jeder beliebigen Vertikalen vorhandene mittlere Geschwindigkeit abgelesen werden. Zerlegt man den Durchflußquerschnitt in die angedeuteten 7 Zonen, deren Breite (1 ÷ 3 m) sich nach der Form der Kurve der mittleren Geschwindigkeit v_m und dem Querprofile richtet, so erhält man die einzelnen Zonenquerschnitte:

$$f_1 = 0{,}5(0{,}40 + 0{,}90 + 1{,}07 + 1{,}22) = 1{,}795 \text{ qm}$$
$$f_2 = 0{,}5(1{,}34 + 1{,}42 + 1{,}44 + 1{,}41) = 2{,}805 \text{ „}$$
$$f_3 = 0{,}5(1{,}38 + 1{,}34) = 1{,}360 \text{ „}$$
$$f_4 = 0{,}5(1{,}28 + 1{,}22 + 1{,}16 + 1{,}15) = 2{,}405 \text{ „}$$
$$f_5 = 0{,}5(1{,}07 + 0{,}97 + 0{,}92 + 0{,}80) = 1{,}880 \text{ „}$$
$$f_6 = 0{,}5(0{,}64 + 0{,}54) = 0{,}590 \text{ „}$$
$$f_7 = 0{,}7 \cdot 0{,}24 = 0{,}168 \text{ „}$$

Die zugehörigen mittleren Geschwindigkeiten folgen als mittlere Höhen (vgl. § 59) aus der Zeichnung der v_m-Kurve zu

$$v_1 = 0{,}19; \quad v_2 = 0{,}44; \quad v_3 = 0{,}47; \quad v_4 = 0{,}47; \quad v_5 = 0{,}42; \quad v_6 = 0{,}25;$$
$$v_7 = 0{,}12 \frac{\text{m}}{\text{sec}},$$

und demnach

$$Q = 1{,}795 \cdot 0{,}19 + 2{,}805 \cdot 0{,}44 + 1{,}360 \cdot 0{,}47 + 2{,}405 \cdot 0{,}47 + 1{,}880 \cdot 0{,}42 + 0{,}590 \cdot 0{,}25 + 0{,}168 \cdot 0{,}12 =$$
$$= 0{,}341 + 1{,}234 + 0{,}639 + 1{,}130 + 0{,}790 + 0{,}148 + 0{,}028 = 4{,}302 \text{ cbm}.$$

b) Trägt man die in den vorhin benutzten Vertikalen nach § 124 a berechneten mittleren Geschwindigkeiten v_m in derselben Weise wie vorhin auf, dann erhält man die in Fig. 186 ausgezogene Kurve v_m. Nimmt man zur Berechnung der Wassermenge 21 Zonen von meist 0,5 m Breite an, dann findet man in derselben Weise wie vorher:

$$Q = 0{,}5 \cdot 0{,}405 \cdot 0{,}05 + 0{,}5 \cdot 0{,}90 \cdot 0{,}14 + 0{,}5 \cdot 1{,}07 \cdot 0{,}23 + 0{,}5 \cdot 1{,}225 \cdot 0{,}30 + 0{,}5 \cdot 1{,}345 \cdot 0{,}35 + 0{,}5 \cdot 1{,}415 \cdot 0{,}41 + 0{,}5 \cdot 1{,}435 \cdot 0{,}46 + 0{,}5 \cdot 1{,}41 \cdot 0{,}48 + 0{,}5 \cdot 1{,}375 \cdot 0{,}48 + 0{,}5 \cdot 1{,}34 \cdot 0{,}48 + 0{,}5 \cdot 1{,}285 \cdot 0{,}48 + 0{,}5 \cdot 1{,}215 \cdot 0{,}48 + 0{,}5 \cdot 1{,}165 \cdot 0{,}50 + 0{,}5 \cdot 1{,}15 \cdot 0{,}52 + 0{,}5 \cdot 1{,}07 \cdot 0{,}51 + 0{,}5 \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}46 + 0{,}5 \cdot 0{,}92 \cdot 0{,}39 + 0{,}5 \cdot 0{,}795 \cdot 0{,}33 + 0{,}5 \cdot 0{,}64 \cdot 0{,}28 + 0{,}5 \cdot 0{,}535 \cdot 0{,}24 + 0{,}7 \cdot 0{,}245 \cdot 0{,}14 =$$
$$= 0{,}0101 + 0{,}0630 + 0{,}1230 + 0{,}1837 + 0{,}2354 + 0{,}2901 + 0{,}3300 + 0{,}3384 + 0{,}3300 + 0{,}3216 + 0{,}3084 + 0{,}2916 + 0{,}2912 + 0{,}2990 + 0{,}2728 + 0{,}2231 + 0{,}1794 + 0{,}1312 + 0{,}0896 + 0{,}0642 + 0{,}0240 =$$
$$= 4{,}3998 \text{ cbm}.$$

Die beiden Werte nach a) und b) weichen demnach um $98 \frac{l}{sec}$ oder 2,2% der gesamten Wassermenge voneinander ab.

Würde zwischen dem Ober- und Unterwasserspiegel nach passendem Einbau einer Wasserkraftmaschine z. B. der Höhenunterschied $h = 2{,}56$ m bestehen, so wäre die vorhandene Wasserkraft $\frac{Q \cdot h}{75}$ $= \frac{4400 \cdot 2{,}56}{75} = 150{,}2$ Pferdestärken, von der je nach der Güte der Wasserkraftmaschine und deren günstigster Beanspruchung im allgemeinen $0{,}6 \div 0{,}85$ ausgenützt wird.

XII. Abschnitt.

Direkte (astronomische) Bestimmung der geographischen Koordinaten eines Punktes der Erdoberfläche und des Azimuts einer von diesem ausgehenden terrestrischen Richtung.

§ 126. Zweck und Genauigkeit. Instrumente. Stand und Gang der Beobachtungsuhr.

Damit unter der Voraussetzung bekannter Erddimensionen die geographischen Koordinaten z. B. aller Punkte einer Landestriangulierung berechnet werden können, muß die geographische Breite (Polhöhe) sowie die Länge *eines* Dreieckspunktes und das Azimut einer Dreieckseite direkt gemessen werden. Durch sehr feine direkte Messungen können die Polhöhen und Azimute auf ungefähr $\frac{1}{20}''$ und die Längenunterschiede auf etwa $\frac{1}{100}^s$ (Zeitsekunde) bestimmt werden.

Im folgenden sollen nur einige Verfahren zur Bestimmung von Zeit, Polhöhe und Azimut mit mittleren Theodoliten, d. h. mit Universalinstrumenten mit etwa 13 $\div$ 20 cm großen Kreisen behandelt werden, auf denen mit Schrauben- oder Skalenmikroskopen oder auch mit Nonien abgelesen wird. Bei den Zeitbestimmungen wird die Genauigkeit von $\frac{1}{2} \div 1$ Sekunde und bei den anderen Messungen die Schärfe von wenigen Bogensekunden angestrebt.

Bei den Messungen nach Gestirnen kommen häufig steile Zielungen vor und es wird deshalb vor das Okular des Theodolitfernrohrs in der Regel ein kleines gleichschenklig rechtwinkliges Okularprisma von etwa 10 mm Kathetenlänge gesteckt, wie dies Fig. 187 andeutet. In solchen Okularprismen sieht man durch das astronomische Fernrohr alle Gegenstände aufrecht, aber links und rechts vertauscht. Verwendet man an Stelle des gleichschenklig rechtwinkligen Okularprismas mit belegter Hypotenusenfläche ein solches Prisma, dessen Hypotenusenfläche dachförmig angeschliffen und dann nicht

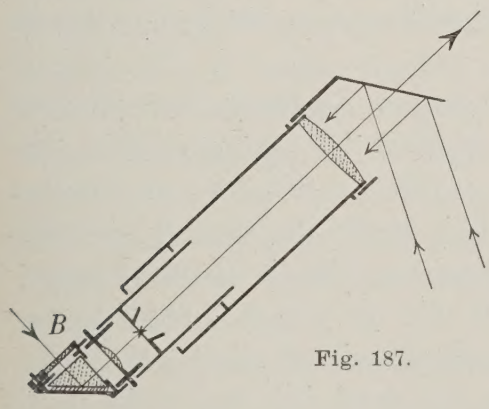


Fig. 187.

mit Spiegelbelag versehen ist (ein solches Prisma hat die Firma Hensoldt u. Söhne in Wetzlar auf meine Veranlassung angefertigt), so sieht man darin durch das astronomische Fernrohr alle Gegenstände in der gleichen Lage wie mit dem freien Auge. Bei Sonnenbeobachtungen müssen zwischen das Auge und das Okular gefärbte Gläser — sog. Blenden *B* der Fig. 187 — eingeschaltet und bei Sternbeobachtungen muß das Fadenkreuz künstlich beleuchtet werden, da das von den Sternen ausgehende Licht hierzu meist nicht ausreicht. Die Fadenkreuzbeleuchtungsvorrichtungen können in sehr verschiedener Weise angeordnet werden. Häufig wird vor das Objektiv ein kleines helles Scheibchen (Spiegelchen), ein breitgeklopfter weißer Draht oder auch eine in der Mitte durchbohrte Scheibe gesteckt, die durch eine etwa in der Hand gehaltene kleine Lampe (ev. auch ein kleines elektrisches Glühlämpchen) derart beleuchtet wird, daß das von der Blende ins Fernrohr hinein reflektierte Licht hinreicht, das Fadenkreuz in schwarzen Linien auf hellem Grunde erscheinen zu lassen (bei Fig. 56 Seite 49 ist die Beleuchtungsblende nahezu in der Fernrohrmitte angeordnet.)

Da, wie schon bemerkt, mitunter sehr steile Zielungen vorkommen, so werden die Kreisablesungen nach § 25 durch die Theodolitachsenfehler stark gefälscht. Die Berücksichtigung der Achsenfehlereinflüsse kann teilweise vermieden werden, wenn die Achsenfehler stets möglichst gut beseitigt werden; die Einflüsse werden dann bei den meisten Höhenwinkelmessungen verschwindend klein. Außerdem richtet man das Messungsverfahren aber derart ein, daß nach Mittelbildung entsprechender Beobachtungen die verbleibenden kleinen Achsenfehlereinflüsse in der Regel vernachlässigt werden können, und nur bei Horizontalwinkelmessungen zwischen sehr hoch stehenden Gestirnen (und terrestrischen Richtungen) müssen meistens die Kreisablesungen wegen der jeweiligen Kippachsenneigung verbessert werden. Zur Messung der Kippachsenneigung dient die Kippachsenlibelle, und auch zur Berichtigung der Theodoliten sollte zweckmäßig eine solche Libelle verwendet werden (s. § 24).

Die Winkelmessungsverfahren sind dieselben wie die in den §§ 26 und 28 angegebenen.

Als Beobachtungsuhr reicht ein in gutem Zustande befindliches (alle drei Jahre gereinigtes und frisch geöltes) Taschenchronometer oder eine feinere Taschenuhr (im Preise von 50 $\div$ 200 ℳ) aus, wenn deren mittlere tägliche Gangvariation bei stets gleicher Lage des Zifferblattes $\pm$ 1^s nicht wesentlich überschreitet. Da die Beobachtungsuhren nur in den seltensten Fällen durch die jeweilige Ablesung sogleich die jeweilige richtige Zeit (z. B. Greenwicher Zeit, M. E. Z., d. h. Mitteleuropäische Zeit, usf.) liefern, so muß im allgemeinen zu

der Uhrablesung noch der sog. Uhrstand Δu hinzugefügt werden, um diese Sollzeiten zu erhalten. Dieser Uhrstand ist für längere Zeit meist nicht konstant. Bildet man deshalb den Unterschied zwischen einem folgenden und dem vorhergehenden Uhrstande und teilt diesen durch die Anzahl der zwischenliegenden Tage, so wird der erhaltene Wert du, den man als täglichen Gang bezeichnet, je nachdem die Uhr vor- oder nachgeht, eine negative oder positive Zahl werden. Der mittlere Fehler des täglichen Ganges ist die tägliche Gangvariation.

Der Uhrgang wird von vielen Faktoren beeinflußt, wie z. B. von der Benutzungsweise der Uhr (ob sie getragen wird oder ob sie ruhig liegen bleibt), von der Lage der Uhr (Zifferblatt stets oben oder Uhr aufgehängt), von der Temperatur, der Zeit des Aufziehens (die Uhr soll ein- bis zweimal täglich zur gleichen Zeit aufgezogen werden), dem Luftdruck. Die Beobachtungsuhr soll deshalb immer bei möglichst gleicher Temperatur gehalten und stets in derselben Weise verwandt werden, um den Gang möglichst gleichmäßig zu erhalten.

Die Bestimmung des Uhrstandes erfolgt entweder durch Vergleichen mit einer Normaluhr, deren Stand bekannt ist, oder durch eine Zeitbestimmung mit Hilfe von Gestirnen. Zur Ermittlung des täglichen Uhrganges müssen solche Vergleichungen in passenden Zeiträumen ausgeführt werden. Durch mehrmaliges Vergleichen der Beobachtungsuhr mit einer zuverlässigen Pendeluhr im Laufe eines Tages findet man, ob jene auch während eines Tages gleichmäßig geht.

§ 127. Koordinaten an der Himmelskugel.

Im folgenden kommen nur geozentrische Koordinaten zur Anwendung, das sind im Erdmittelpunkt zwischen bestimmten Richtungen enthaltene Winkel bzw. die zwischen den Schnittpunkten dieser Richtungen mit der gedachten Himmelskugel liegenden Großkreisbögen. Die in einem Punkte A der Erdoberfläche zwischen irgend welchen Richtungen, z. B. nach Gestirnen und der Lotrichtung des Punktes, gemessenen Winkel müssen deshalb auf den Erdmittelpunkt umgerechnet werden.

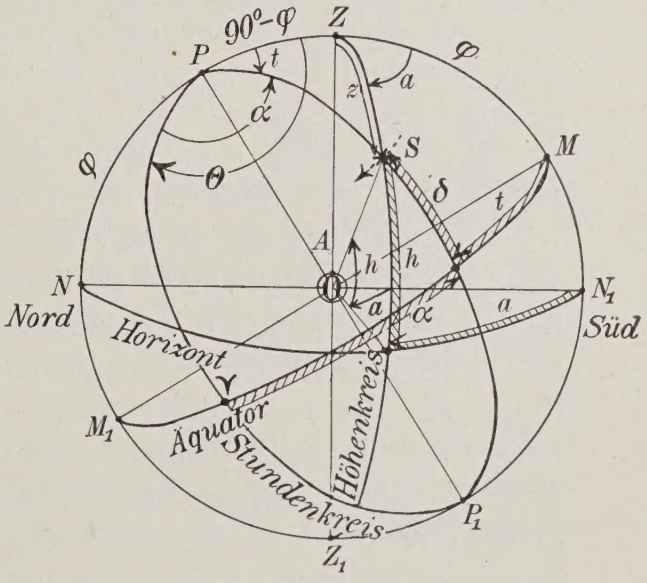


Fig. 188.

Die um den Erdmittelpunkt O (Fig. 188) gedachte Himmelskugel

dreht sich scheinbar täglich einmal von Ost nach West gleichmäßig um die verlängerte Erdachse POP_1, weil die Erde die entgegengesetzte Drehung ausführt. Die Schnittpunkte P und P_1 der Erdachse mit der Himmelskugel (nördlicher und südlicher Weltpol) werden deshalb immer an der gleichen Stelle des Himmels gesehen. Die Himmelskugel wird vom Lote des auf der Erde liegenden Punktes A im Zenitpunkt Z und im Nadirpunkt Z_1, von der Erdäquatorebene im Himmelsäquator $M_1 \Upsilon M$, von der durch O (bzw. durch A) senkrecht zur Lotrichtung in A liegenden Horizontalebene im Horizont NN_1 und von der Erdmeridianebene durch A im Meridian $NPZMN_1$ mit dem Nordpunkte N und dem Südpunkte N_1 geschnitten. Die Ebenen durch die Weltachse PP_1 schneiden die Himmelskugel nach Stunden- oder Deklinationskreisen, z. B. $P\Upsilon P_1$, PSP_1, die durch ZZ_1 gehenden Ebenen aber nach Höhenkreisen, z. B. ZSZ_1.

Bezeichnet φ die geographische Breite des Beobachtungsortes A auf der Erde, d. h. den Winkel zwischen der Äquatorebene und der Lotrichtung in A, dann ist $\sphericalangle MOZ = \varphi$ und außerdem liefert die Fig. 187 unmittelbar $\sphericalangle MOZ = \sphericalangle NOP = \varphi$. Unter dem Winkel NOP wird der Pol über dem Horizont gesehen, es ist deshalb die Polhöhe im Beobachtungsorte gleich dessen geographischer Breite.

Der Einfachheit halber wird im folgenden angenommen, daß die Erde ruht und daß sich die Gestirne an der Himmelskugel bewegen. Die jeweilige Lage der Gestirne auf dieser Kugel wird durch verschiedene Koordinaten angegeben. Die wichtigsten Koordinatensysteme sind die folgenden:

a) Die Rektaszension α und Deklination δ (entsprechend geographischer Länge und Breite auf der Erde).

Die Rektaszension oder gerade Aufsteigung α ist der Winkel zwischen dem Stundenkreise durch den auf dem Himmelsäquator angenommenen Punkt Υ und dem Stundenkreise durch das Gestirn S. Die Rektaszension α erscheint demnach entweder als Winkel an den Polen P oder P_1 oder als Bogen auf dem Äquator (vgl. Fig. 188); sie wird entgegengesetzt der täglichen Bewegung der Gestirne in Zeitmaß von 0^h bis 24^h (oder von 0^0 bis 360^0) gezählt. Der Punkt Υ ist einer der beiden Schnittpunkte der Erdbahnebene mit dem Himmelsäquator, und zwar derjenige, in dem zur Zeit der Frühlingstag- und Nachtgleiche die Sonne am Himmel gesehen wird. Dieser im Sternbilde der Fische gelegene Punkt macht demnach die tägliche Drehung der Himmelskugel mit. Er ändert infolge der Präzession (und Nutation) seine Lage im Jahre nur um etwa $3\frac{1}{2}^s$ und deshalb ist die Rektaszension α für die einzelnen Fixsterne (mit Ausnahme der Sonne) ziemlich konstant.

Die Deklination oder Abweichung δ ist der im Stundenkreise des Gestirnes gemessene Bogen (oder Winkel) zwischen dem Aquator und dem Gestirn. Sie wird vom Äquator aus nach dem Nordpol als nördliche (+) und nach dem Südpol als südliche (−) Deklination von 0^0 bis 90^0 gezählt.

α und δ von Gestirnen sind in alljährlich mehrere Jahre im Voraus erscheinenden astronomischen Jahrbüchern je nach dem Zwecke, der mit diesen verfolgt wird, verschieden genau für bestimmte Tageszeiten voraus berechnet, z. B. das „Berliner Astronomisches Jahrbuch“ (herausgegeben vom königl. Astronom. Recheninstitut, Preis 12 $\mathcal{M}$) gibt gegenwärtig AR (ascensio recta) $= \alpha$ auf $0{,}01^s$, die Deklination auf $0{,}1''$ und $0{,}01''$; „Nautisches Jahrbuch“ (herausg. vom Reichsamte des Innern, Preis 1,50 $\mathcal{M}$) auf 1^s bzw. auf $0{,}1'$; „The Nautical Almanac“ (published by order of the Lords Commissioners of the Admirality, Edinburgh, Preis $2^1/_2$ sh), auf $0{,}01^s$ bzw. $0{,}1''$ und $0{,}01''$; „Connaissance des Temps“ (publiée par le Bureau des Longitudes, Paris, Preis 4 Fr.) auf $0{,}01^s$ bzw. $0{,}1''$; „Astronomisch-Nautische Ephemeriden“ (über Veranlassung der Marine-Sektion des k. k. Reichskriegsministeriums herausgegeben von dem k. k. maritimen Observatorium in Triest; Deutsche Ausgabe, Preis 2 $\mathcal{M}$) auf $0{,}1^s$ und $0{,}01^s$ bzw. $1''$.

b) Azimut a und Höhe h (oder Zenitdistanz z).

Das Azimut a eines Gestirnes ist der Winkel zwischen der Meridianebene des Beobachtungsortes und der jeweiligen Höhenkreisebene des Gestirnes. Es wird in der Regel vom Südpunkte N_1 aus im Uhrzeigerdrehsinne von 0^0 bis 360^0 gezählt, bei nordpolnahen Sternen auch vom Nordpunkte N aus in der gleichen Drehrichtung (oder aber von diesem Punkte aus als östliches oder westliches Azimut). Die Höhe h wird vom Horizonte aus von 0^0 bis 90^0 gezählt; die vom Zenit Z aus gezählte Zenitdistanz z ist stets $90^0 - h$.

c) Stundenwinkel t und Deklination δ (bzw. $90^0 - \delta$).

Der Stundenwinkel t ist der Winkel zwischen der Meridianebene des Beobachtungsortes und dem Stundenkreise der Gestirne. Er wird vom Südzweige des Meridians aus im Drehsinne des Gestirnes, also nach Westen, von 0^h bis 24^h oder von 0^0 bis 360^0 (mitunter auch nach Osten als östlicher oder negativer Stundenwinkel) gezählt. Deklination δ siehe unter a).

Man findet leicht, daß sich bei einem Gestirne, das im Laufe eines Tages einen Parallelkreis zum Äquator durchläuft, während dieser Zeit der Stundenwinkel t, das Azimut a und die Höhe h beständig verändern.

§ 128. Sternzeit, Sonnenzeit, Zeitgleichung; Zeitumwandlung.

Die Sternzeit (oder Widderpunktszeit) Θ ist der jeweilige westliche Stundenwinkel des Punktes Υ (siehe Fig. 188). Dieser Punkt, in dem die Sonne in der Frühlingstag- und Nachtgleiche steht, lag früher im Sternbilde des Widders und heißt deshalb auch jetzt noch Widderpunkt. Aus der Definition der Sternzeit liest man nach Fig. 188 die Beziehung ab:

$$\Theta = t + \alpha. \tag{1}$$

Bei $t = 0^h$ und $t = 12^h$ befindet sich ein Gestirn im Meridian des Beobachtungsortes in oberer und unterer Kulmination. Die entsprechenden Ortssternzeiten sind demnach α und $\alpha \pm 12^h$. Der Zeitraum zwischen zwei aufeinanderfolgenden oberen Kulminationen eines Fixsternes, der einer vollen Umdrehung der Erde um ihre Achse entspricht, heißt Sterntag. Diese Zeiträume sind wegen der gleichmäßigen Achsendrehung der Erde, und weil die Fixsterne so weit entfernt sind, daß dagegen die Ortsveränderung der Erde (auf ihrer Bahn) vernachlässigt werden kann, stets gleich groß. Da sich die Erde in einem Jahre um die Sonne in ost-westlicher Richtung herum bewegt, so rückt die Sonne täglich um etwa 1^0 von den benachbarten Fixsternen nach Osten weg und beschreibt deshalb in einem Jahre am Fixsternhimmel einen Kreis — die Ekiptik; es vergehen 366,242201 Sterntage, bis die Sonne die Ekliptik von Widderpunkt zu Widderpunkt durchläuft. Weil nun in diesem Zeitraume die Sonne von der Erde in der Drehrichtung der Erde (um ihre Achse) einmal (fast vollständig) umkreist wird, so muß in dieser Zeit die Sonne einmal weniger in obere Kulmination gelangen als die anderen Fixsterne. Folglich trifft auf diesen Zeitraum 1 Sonnentag weniger und es ist

$$366{,}242201 \text{ Sterntage} = 365{,}242201 \text{ (mittlere) Sonnentage.} \tag{2}$$

Die wahre Zeit oder die wahre Sonnenzeit ist der jeweilige (westliche) Stundenwinkel der Sonne; der Zeitpunkt der (oberen) Kulmination der Sonne (Stundenwinkel = 0) heißt wahrer Mittag und der Zeitraum zwischen zwei wahren Mittagen heißt wahrer Sonnentag. Weil sich die Sonne im Laufe des Jahres in der Ekliptik mit ungleichförmiger Geschwindigkeit fortbewegt (die Erdbahn ist eine Ellipse, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht), so sind die wahren Sonnentage ungleich lang. Um gleich lange Sonnentage zu erhalten, nimmt man eine gedachte mittlere Sonne an, die sich auf dem Äquator gleichförmig so bewegt, daß sie mit der Sonne ungefähr am 25. Dezember kulminieren würde. (Diese mittlere Sonne braucht dem-

nach, um von Widderpunkt zu Widderpunkt zu kommen, auch 365,242201 Sonnentage.) Den Stundenwinkel dieser mittleren Sonne nennt man mittlere Zeit, den Zeitpunkt der Kulmination der mittleren Sonne demgemäß mittleren Mittag und den stets gleichen Zeitraum zwischen zwei solchen Kulminationen den mittleren Sonnentag. Der Unterschied zwischen mittlerer Zeit = M. Z. und wahrer Zeit = W. Z. oder = $t_\odot$ heißt Zeitgleichung $\mathfrak{Z}$. Diese Zeitgleichung

$$\mathfrak{Z} = \text{M. Z.} - \text{W. Z.} = \text{M. Z.} - t_\odot \tag{3}$$

ist zu bestimmten Tageszeiten in den astronomischen Jahrbüchern voraus berechnet.

Die im bürgerlichen Leben verwendeten Uhren gehen nach mittlerer Zeit. Wenn die Uhr im Augenblicke der Kulmination der mittleren Sonne 12^h (Mittag) zeigt, dann gibt sie die mittlere Ortszeit des Beobachtungsortes. Alle Punkte des gleichen Meridians haben also gleiche Ortszeit. Die Sonne kulminiert, wenn $\text{W. Z.} = t_\odot = 0$ ist, die mittlere Ortszeit im Augenblick der Kulmination (die die Uhr zeigen sollte) beträgt demnach wegen Gl. (3)

$$\text{M. Z.} = 12^h + \mathfrak{Z}. \tag{4}$$

Durch Reichsgesetz vom 12. März 1893 wurde in Deutschland für die öffentlichen Uhren die mittlere Sonnenzeit des 15. Längengrades ($= 1^h$) östlich von Greenwich (dieser Meridian geht z. B. durch Stargard, Görlitz) als Mitteleuropäische Zeit (M. E. Z.) eingeführt. Diese M. E. Z. unterscheidet sich von der mittleren Ortszeit M. O. Z. um den Längenunterschied λ des Beobachtungsortes gegen den genannten, 15^0 östlich Greenwich liegenden, Meridian. Z. B. Braunschweig (Technische Hochschule) liegt westlich von Stargard um $\lambda = 17^m\,52{,}76^s$. Folglich geht die Braunschweiger mittlere Ortszeit (M. O. Z.) gegen die M. E. Z. um $17^m\,52{,}76^s$ nach, und es gilt allgemein

$$\text{M. E. Z.} = \text{M. O. Z.} \pm \lambda \left\{ \begin{matrix} \text{westlich} \\ \text{östlich} \end{matrix} \right\} \text{von Stargard.} \tag{5}$$

Aus dem über die verschiedenen Zeiten Gesagten folgt unmittelbar, daß der Unterschied der im gleichen Augenblicke an zwei verschiedenen Orten der Erde vorhandenen Zeiten (Sternzeit, wahre Ortszeit oder mittlere Ortszeit) dem Unterschiede der geographischen Längen der beiden Orte entspricht. Geht also eine Uhr z. B. genau nach mittlerer Greenwicher Zeit und man liest auf dieser Uhr an einem Orte $4^h\,40^m\,13^s$ ab in dem Augenblicke, in welchem die irgendwie bestimmte mittlere Ortszeit $5^h\,23^m\,20^s$ beträgt, so ist der Beobachtungsort östlich von Greenwich um $\lambda = 5^h\,23^m\,20^s - 4^h\,40^m\,13^s = 0^h\,43^m\,07^s$.

Zu Messungen mit der Sonne benutzt man, um viele Umrechnungen zu ersparen, in der Regel nach mittlerer Zeit regulierte Uhren, zu Messungen mit Sternen aber meist nach Sternzeit gehende Uhren.

Aus Gleichung (2) folgt

$$1 \text{ Sterntag} = \frac{365{,}242201}{366{,}242201} = (1 - 0{,}00273043) \text{ mittlere Sonnentage}$$
$$= (24^h - 3^m\,55{,}909^s) \text{ mittlerer Zeit.}$$

$$\text{und } 1 \text{ mittl. Sonnentag} = \frac{366{,}242201}{365{,}242201} \text{ Sterntage} = (1 + 0{,}00273791) \text{ Sterntage}$$
$$= (24^h + 3^m\,56{,}555^s) \text{ Sternzeit.}$$

Demnach ist auch

1 Stunde Sternzeit = 1 Stunde mittlere Zeit − 9,82956 mittlere Zeitsekunden

und 1 Stunde mittl. Zeit = 1 Stunde Sternzeit + 9,85648 Sternzeitsekunden.

Mit diesen Beziehungen können leicht Sternzeitintervalle in solche mittlerer Zeit, und umgekehrt, verwandelt werden. In den astronomischen Jahrbüchern sind auch zu diesem Zwecke dienende Tafeln enthalten.

Z. B.: Was ist das in mittlerer Zeit gegebene Intervall $21^h 12^m 13{,}7^s$ in Sternzeit?

a) Das gegebene Intervall ist nach Gl. (6) mit (1 + 0,00273791) zu erweitern, also zu ihm hinzuzufügen:

$$0{,}002738 . 21^h + 0{,}002738 . 12^m + 0{,}002738 . 13{,}7^s =$$
$$= 9{,}8565^s . 21 + 0{,}16427^s . 12 + 0{,}002738^s . 13{,}7 =$$
$$= 206{,}99^s + 1{,}97^s + 0{,}04^s = 209{,}00^s = 3^m\,29{,}00^s.$$

Oder man drückt das Intervall in Dezimalteilen der Stunde aus, dann wird der Zuschlag $21{,}2038 . 9{,}8565 = 208{,}995^s$.

b) Mit den Tabellen z. B. im Berliner astronomischen Jahrbuch für 1909, S. 464, wird:

$20^h\,17^m\,28^s$ entspricht dem Zuschlage $+ 3^m\,20^s$,

verbleibt	54	45,7				
	$54^m\,11^s$		„	„	„	+ 8,9
verbleibt		34,7	„	„	„	+ 0,09
					Summe:	$+ 3^m\,28{,}99^s$.

§ 129. Verwandlung von Zeitpunkten.

Bei der Verwandlung von Zeitpunkten ist zunächst zu beachten, daß der bürgerliche Tag um Mitternacht beginnt und endet und zweimal von 0^h bis 12^h gezählt wird, während der gleiche astronomisch gezählte Tag am Mittag des entsprechenden bürgerlichen Tages beginnt, am Mittag des nächsten bürgerlichen Tages endet und von 0 bis 24^h gezählt wird. Das Datum des astronomischen Tages entspricht also stets dem Datum des Nachmittages des auf ihn fallenden bürgerlichen Tages. Die astronomischen Jahrbücher zählen das Datum astronomisch.

Es ist z. B.

24. März 1907 nachm. 4^h bürgerlich = 1907 März 24. 4^h astron.
und 24. „ „ vorm. 10^h „ = „ „ 23. 22^h „

Da Sternzeit und mittlere Zeit zwei gleichmäßige Zeitmaße sind, so kann z. B. die der gegebenen M. O. Z. entsprechende Ortssternzeit leicht bestimmt werden, wenn nur Sternzeit und mittlere Zeit irgendeines Augenblicks bekannt sind. Zur Vereinfachung der Rechnung sind aber in den astronomischen Jahrbüchern von Tag zu Tag solche entsprechende Zeiten vorherberechnet, z. B. durch Angabe der Sternzeit Θ_0 im mittleren Mittag des Nullmeridians des betreffenden Jahrbuches.

Sind Θ und M. Z. die demselben Augenblicke entsprechende Ortssternzeit und mittlere Ortszeit, Θ_0' die Sternzeit im mittleren Mittage des betreffenden Tages am Beobachtungsorte, so ist seit dem mittleren Mittage der Zeitabschnitt $\Theta - \Theta_0'$ verflossen und dieser ins mittlere Zeitmaß verwandelt gibt deshalb die gesuchte mittlere Ortszeit M. Z. Mit den Gleichungen (6) wird deshalb:

$$\left.\begin{aligned} \text{M. Z.} &= (\Theta - \Theta_0') \cdot 0{,}99726957 \\ \text{und} \qquad \Theta &= \Theta_0' + \text{M. Z.} \cdot 1{,}00273791 \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Die astronomischen Jahrbücher geben aber im allgemeinen nicht Θ_0' sondern die Sternzeit Θ_0 im mittleren Mittag des betreffenden Tages im Jahrbuchmeridian und diese Sternzeit wächst in einem mittleren Sonnentage um $3^m\,56{,}555^s$, also in der Stunde um $9{,}8565^s$ (siehe Gleichung (6)). Liegt deshalb der Beobachtungsort um λ^h $\left\{\begin{matrix}\text{westlich}\\ \text{östlich}\end{matrix}\right\}$ vom Jahrbuchmeridian, so ist auch die Sternzeit Θ_0' im mittleren Mittage des betreffenden Ortes um $(\lambda^h) \cdot 9{,}8565^s$ $\left\{\begin{matrix}\text{größer}\\ \text{kleiner}\end{matrix}\right\}$ als die Sternzeit Θ_0 im mittleren Mittage des Jahrbuchmeridians, also

$$\Theta_0' = \Theta_0 \pm 9{,}8565^s \cdot (\lambda^h) \left\{\begin{matrix}\text{westl.}\\ \text{östl.}\end{matrix}\right\} \text{ vom Jahrbuchmeridian.} \qquad (8)$$

Setzt man (8) in (7) ein, so wird

$$\text{M. O. Z.} = (\Theta - \Theta_0 \mp 9{,}8565 \cdot \lambda) \cdot 0{,}99726957$$

oder:

$$\left.\begin{aligned} &\underline{\text{M. O. Z.} = (\Theta - \Theta_0) \cdot 0{,}99727 \mp 9{,}8296^{s} \cdot (\lambda^{h})} \left\{\begin{matrix}\text{westl.}\\ \text{östl.}\end{matrix}\right\} \text{ vom Jahrbuchmeridian} \\ &\text{und:} \\ &\underline{\Theta = \Theta_0 + \text{M. O. Z. } 1{,}002738 \pm 9{,}8565^{s} \cdot (\lambda^{h})} \left\{\begin{matrix}\text{westl.}\\ \text{östl.}\end{matrix}\right\} \text{ v. Jahrbuchmeridian.} \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Man sieht, daß die Glieder $(\Theta - \Theta_0) \cdot 0{,}99727$ und M. O. Z. $\cdot$ 1,002738 die Umwandlung der Sternzeit- bzw. mittleren Zeit-Intervalle in die entsprechenden Intervalle der mittleren bzw. Sternzeit vorstellen.

Zahlenbeispiele: 1. Am 9. Mai 1907 Nachmittag (bürgerlich) wurde der westliche Stundenwinkel der Sonne (wahre Zeit) zu W. Z. $= t_\odot = 4^h\,23^m\,12^s$ in Braunschweig mit $\lambda = 0^h\,11^m\,27{,}56^s$ westlich vom Meridian des Berliner Astronomischen Jahrbuches gemessen. Was ist in diesem Augenblick die entsprechende M. E. Z. und die Ortssternzeit Θ, wenn der Beobachtungsort $0^h\,17^m\,52{,}76^s$ westlich vom M. E. Z.-Meridian liegt?

Nach Gleichung (3) ist für den Beobachtungsort: M. O. Z. = W. Z. + $\mathfrak{Z}$,
$\mathfrak{Z}$ ist die Zeitgleichung im Augenblicke der Messung,
nach Gleichung (5) ist: M. E. Z. = M. O. Z. + $0^h\,17^m\,52{,}76^s$,
„ „ (9) „ $\Theta = \Theta_0 + \text{M. O. Z.} \cdot 1{,}002738 +$
$+ 9{,}8565^s \,.\, 0{,}191$,

wobei Θ_0 die Sternzeit im mittleren Berliner Mittage des 9. Mai.

α) Mit dem Berliner Jahrbuche für 1907 findet man im mittleren Berliner Mittage am Mai 9 die Zeitgleichung zu $\mathfrak{Z}_0 = -3^m\,38{,}34^s$
„ 10 „ „ „ $\mathfrak{Z}_0 \quad -3^m\,41{,}54^s$
also Änderung in 1 Tage $3{,}20^s$. Der Beobachtungsort liegt westlich von Berlin um $0^h\,11^m\,27{,}56^s$ ($= 0{,}191^h$) und deshalb ist der Stundenwinkel der Sonne (wahre Zeit) im Augenblicke der Messung in Berlin um $11^m\,28^s$ größer als $t_\odot$, also $4^h\,34^m\,40^s$. Das ist die seit dem wahren Berliner Mittage verflossene Zeit; seit dem mittleren Berliner Mittage ist deshalb verflossen M. Z. $= 4^h\,34^m\,40^s - 3^m\,38^s = 4^h\,31^m\,02^s = 0{,}1882^d$ (mit den Tafeln auf Seite 466 des Jahrbuches zur Umwandlung von Stunden, Minuten und Sekunden in Dezimalteile des Tages). In dieser Zeit hat sich die Zeitgleichung geändert um $3{,}20^s \cdot 0{,}1882 = 0{,}60^s$, so daß also wird

$$\mathfrak{Z} = -3^m\,38{,}34^s - 0{,}60^s = -3^m\,38{,}94^s$$

und deshalb

$$\text{M. O. Z.} = 4^h\,23^m\,12^s - 3^m\,38{,}94^s = 4^h\,19^m\,33{,}06^s$$

$$\text{M. E. Z.} = 4^h\,19^m\,33.06^s + 17^m\,52{,}76^s = 4^h\,37^m\,25{,}82^s.$$

Die Verwandlung der M. O. Z. in das entsprechende Sternzeitintervall mit der Hilfstafel zur Verwandlung der mittleren Zeit in Sternzeit auf Seite 464 des Jahrbuches erfordert den Zusatz von $+ 42{,}64^s$. Das Jahrbuch liefert die Sternzeit im mittleren Berliner Mittage am Mai 9. zu $\Theta_0 = 3^h\,04^m\,27{,}15^s$, folglich wird

$$\Theta = 3^h\,04^m\,27{,}15^s + (4^h\,19^m\,33{,}06^s + 42{,}64^s) + 1{,}88^s = 7^h\,24^m\,44{,}73^s.$$

β) Mit dem Nautischen Jahrbuche für 1907, das auf den Greenwicher Meridian als Nullmeridian bezogen ist (Braunschweig östlich Greenwich $0^h\,42^m\,07{,}24^s$), findet man im mittleren Greenwicher Mittag für 1907 Mai 9 die Zeitgleichung $\mathfrak{Z}_0 = - 3^m\,39^s$, deren stündliche Änderung $0{,}1^s$ und die Sternzeit $\Theta_0 = 3^h\,04^m\,36^s$. $42^m\,07^s$ vor und hierauf ($4^h\,23^m\,12^s - 3^m\,39^s$) nach dem mittleren Greenwicher Mittag, insgesamt also $3^h\,37^m\,26^s = 3{,}62^h$ nach diesem hat sich die Zeitgleichung geändert um $0{,}1^s \cdot 3{,}62 = 0{,}36^s$, demnach betrug sie zur Zeit der Messung

$$\mathfrak{Z} = - 3^m\,39{,}4^s$$

und folglich

$$\text{M. O. Z.} = 4^h\,19^m\,32{,}6^s$$

deshalb

$$\text{M. E. Z.} = 4^h\,19^m\,32{,}6^s + 17^m\,52{,}76^s = 4^h\,37^m\,25{,}4^s$$

und Ortssternzeit

$$\Theta = 3^h\,04^m\,36^s + (4^h\,19^m\,32{,}6^s + 42{,}7^s) - 9{,}8565^s \cdot 0{,}70$$
$$= 3^h\,04^m\,36^s + 4^h\,20^m\,15{,}3^s - 6{,}9^s = 7^h\,24^m\,44{,}4^s.$$

Die Umwandlung des mittleren Zeitintervalls in das Sternzeitintervall ist mit der Tafel 12 des Nautischen Jahrbuches (Seite 236) ausgeführt.

2. Am gleichen Orte wie vorher sei gegeben 9. Mai 1907 Nachmittag $\text{M. E Z.} = 5^h\,23^m\,12{,}1^s$; gesucht ist die entsprechende Ortssternzeit Θ.

Nach den Gleichungen (5) und (9) ergibt sich die folgende Rechnung:

$M.O.Z. = M.E.Z. - \lambda = 5^h\ 23^m\ 12{,}1^s - 17^m\ 52{,}76^s = 5^h\ 05^m\ 19{,}34^s$

zur Umwandlung in Sternzeit ist hinzuzufügen $+ 50{,}15$

Sternzeit im mittleren Berliner Mittag $\Theta_0 = 3\ 04\ 27{,}15$

Reduktion auf den Beobachtungsort: $9{,}86^s \cdot \lambda =$ $+ 1{,}88$

Ortssternzeit $\Theta = 8^h\ 10^m\ 38{,}52^s$

3. Gegeben: 1907 Mai 17. Ortssternzeit $\Theta = 20^h\ 17^m\ 18{,}1^s$ (am gleichen Orte wie oben). Gesucht: die entsprechende M.E.Z.

$M.O.Z. = (\Theta - \Theta_0) \cdot 0{,}99727 - 1{,}88^s$ (Gleichung (9) des Beobachtungsortes für den Berliner Meridian)

$M.E.Z. = M.O.Z. + 17^m\ 52{,}76^s$ (Gleichung (5) für den Beobachtungsort)

$\Theta =$	20^h	17^m	$18{,}1^s$	
$\Theta_0 =$	3	35	59,60	(Sternzeit im mittl. Berliner Mittag am Mai 17.)
$\Theta - \Theta_0 =$	16	41	18,50	
	—	2	44,04	(Reduktion auf mittlere Zeit)
	—		1,88	(Reduktion auf den Beobachtungsort)
$M.O.Z. =$	16	38	32,58	
oder	4	38	32,58	am 18. Mai 1907 Vormittag (bürgerlich)
	+ 17	52	76	
$M.E.Z. =$	4^h	56^m	$25{,}34^s$	am 18. Mai 1907 „ „

§ 130. Umwandlung auf der Erdoberfläche nach Gestirnen gemessener Zenitdistanzen (Höhenwinkel) auf den Erdmittelpunkt als Beobachtungsort.

Jede von einem Punkte der Erdoberfläche nach dem oberen oder unteren Rande eines Gestirnes gemessene Zenitdistanz wird auf die Mitte der Erde als Standort (geozentrische Zenitdistanz) umgewandelt durch Anbringen der Verbesserungen wegen

1. der Parallaxe
2. des Halbmessers des angezielten Gestirnes und
3. der Brechung des Lichtstrahles beim Durchdringen der Erdatmosphäre (astronomische Strahlenbrechung oder Refraktion).

1. Parallaxe.

Mit Parallaxe bezeichnet man allgemein den Winkel, unter dem vom Gestirne aus die Strecke (Beobachtungsort – Erdmittelpunkt)

gesehen wird. Dieser Winkel ist bei Fixsternen wegen deren sehr großen Entfernung genügend genau Null; bei Mond, Sonne und Planeten darf er aber im allgemeinen nicht vernachlässigt werden.

Nimmt man zunächst die Erde als Kugel mit dem Halbmesser r an (was bei der Sonne und den Planeten zulässig ist, nicht aber beim Monde, wo die Abplattung der Erde schon merklich wird), so erscheint dieser Halbmesser von dem im Horizonte stehenden Gestirne aus, dessen Entfernung von der Erde E ist, unter der sog. Horizontalparallaxe

$$\pi'' = \frac{r}{E} \cdot \varrho'' . \qquad (1)$$

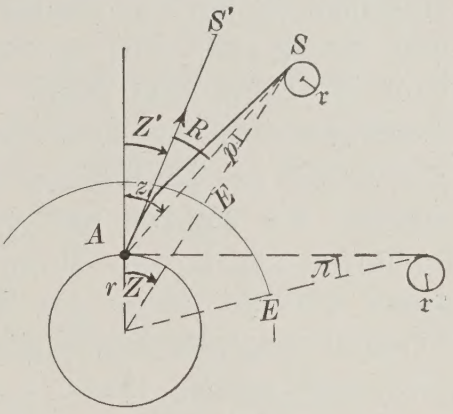


Fig. 189.

Wird das Gestirn unter der Zenitdistanz z gesehen, so wird nach Andeutung der Fig. 189

$$\sin p = \sin z \cdot \frac{r}{E} ,$$

und da die Höhenparallaxe p'' klein ist, so wird

$$p'' = \pi'' \cdot \sin z . \qquad (2)$$

Die Äquatorial-Horizontalparallaxe der Sonne beträgt im Mittel etwa 8,8″ (der Halbmesser des Erdäquators erscheint wegen der Veränderlichkeit der Entfernung: Erde — Sonne unter etwas veränderlichem Winkel), die des Mondes etwa 1°, die der beiden Planeten Venus und Mars sind sehr verschieden und betragen etwa bei der Venus 5 ÷ 33″, Mars 3 ÷ 17″, Jupiter 2″, Saturn 1″. Im Nautischen Jahrbuche sind diese Horizontalparallaxen zu einzelnen Zeiten des Jahres angegeben und aus einer Tafel (2 und 3) kann die entsprechende Höhenparallaxe nach Gleichung (2) für Sonne und Planeten auf 1″ leicht entnommen werden. Bei der Berechnung der Höhenparallaxe des Mondes muß die von der Abplattung der Erde herrührende Veränderlichkeit der Strecke (Beobachtungspunkt — Erdmittelpunkt) berücksichtigt werden (Tafel 6 des genannten Jahrbuches).

Die wegen der Höhenparallaxe berichtigte Zenitdistanz folgt demnach zu

$$Z = z - p. \qquad (3)$$

2. Halbmesserverbesserung.

Wenn das Gestirn als größere Scheibe erscheint, so kann deren Mittelpunkt nicht scharf angezielt werden. Man zielt dann den oberen

oder unteren Rand der Scheibe an und verbessert die nach diesen Punkten gemessenen Zenitdistanzen um den Winkel r, unter dem der Scheibenhalbmesser vom Erdmittelpunkt aus erscheinen würde, also

$$Z = z \pm \mathrm{r} \begin{Bmatrix} \text{oberer} \\ \text{unterer} \end{Bmatrix} \text{Rand.} \qquad (4)$$

Die Gestirnhalbmesser sind in den astronomischen Jahrbüchern zu einzelnen Zeiten des Jahres angegeben und betragen z. B. bei Sonne und Mond etwa 16′, bei der Venus 5″ bis 32″. Rückt das Gestirn vom Horizont zum Zenit, so wird damit auch die Entfernung des Gestirnes vom Beobachter kleiner. Beim Monde verursacht diese Verkleinerung der Entfernung eine Vergrößerung des scheinbaren Durchmessers bis zu 18″ und es muß deshalb der den Jahrbüchern entnommene und auf die Erdmitte bezogene Mondhalbmesser noch wegen dieser von der Höhe des Mondes über dem Horizonte herrührenden Vergrößerung des Halbmessers vor der Anwendung in Gleichung (4) verbessert werden (Tafel 4 des Nautischen Jahrbuches).

3. Verbesserung wegen der Strahlenbrechung.

Jeder von einem Gestirne ausgehende Lichtstrahl, der nach einem Punkte der Erdoberfläche gelangt, wird durch die Lufthülle der Erde aus seiner Bahn abgelenkt. Ein in A (Fig. 189) befindlicher Beobachter sieht deshalb das Gestirn anstatt in S in der Richtung S' und mißt infolgedessen die scheinbare Zenitdistanz Z' statt der richtigen z. Der Unterschied beider sei R, dann ist stets

$$z = Z' + R \qquad (5)$$

und R bezeichnet man als astronomische Refraktion. R ist von der optischen Dichte der Luft am Beobachtungsorte A abhängig, also vom Luftdruck (Barometerstand), der Lufttemperatur und der Luftfeuchtigkeit in A. Zur Berechnung von R nimmt man zunächst einen Normalzustand der Atmosphäre an und bezeichnet dann den diesem entsprechenden Winkel als mittlere Refraktion. Diese bedarf mithin noch einer Verbesserung wegen der Abweichung des Barometer- und Thermometerstandes vom Mittelwerte, um schließlich die wahre Refraktion R zu erhalten.

Zur Berechnung der Refraktion sind von verschiedenen Autoren Formeln aufgestellt worden (vgl. hierzu die von Bemborad [Besondere Behandlung des Einflusses der Atmosphäre] in Band IV. 2. Heft 2 der „Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften“ Leipzig 1908, angegebene Literatur). Einen ganz rohen Überblick über die Größe der Refraktion gewährt die a. a. O. entnommene folgende Tabelle.

Scheinbare Zenitdistanz Z'	Mittl. Refraktion bei $+10^\circ$ C und 760 mm Druck	Änderung der mittl. Refraktion für 1° C über $+10^\circ$ C	Änderung der mittl. Refraktion für 1 cm Luftdruck unter 76,0 cm
0°	$0'\ 0''$	$-\ 0{,}00''$	$-\ 0{,}00''$
20°	$0\ 21$	$-\ 0{,}07$	$-\ 0{,}26$
40°	$0\ 49$	$-\ 0{,}17$	$-\ 0{,}64$
60°	$1\ 41$	$-\ 0{,}33$	$-\ 1{,}16$
80°	$5\ 19$	$-\ 1{,}06$	$-\ 3{,}78$

Z. B. bei beobachtetem $Z' = 80^\circ$; $t = +20^\circ$; $B_0 = 74{,}0$ cm (auf 0° reduziert) folgt: $R = 5'19'' - 1{,}06'' \cdot (+10) - 3{,}78 \cdot 2{,}0 = 5'0''$.

Bessel brachte den Ausdruck für R in die Form

$$\left.\begin{aligned} R &= \alpha \cdot \operatorname{tg} Z' \cdot B^A \cdot \gamma^\lambda \\ \text{oder } \log R &= \log(\alpha \operatorname{tg} Z') + A \log B + \lambda \log \gamma. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Darin bedeuten Z' die scheinbare (gemessene) Zenitdistanz, α, A und λ von dieser abhängige Koeffizienten, B einen vom (auf 0° reduzierten) Barometerstande und γ einen von der Lufttemperatur abhängigen Koeffizienten. Das erste Glied in (6) stellt die sog. mittlere Refraktion vor und bis zu etwa $Z' = 45^\circ$ genügt unter mittleren Verhältnissen bei der Rechnung von R bis auf mehrere Bogensekunden der Wert $\alpha = 58''$.

Zur Berechnung der Refraktion sind viele Tafeln vorhanden, z. B. auf wenige Sekunden im Nautischen Jahrbuche, bis auf etwa $0{,}1''$ in Ambronn-Domke, Astronomisch-geodätische Hilfstafeln. Berlin 1909 (*M* 10,00), bis auf $0{,}01''$ in Albrecht, Formeln und Hilfstafeln für geographische Ortsbestimmungen. 4. Aufl. Leipzig 1908 (*M* 22,00), bis auf $1''$ bzw. $0{,}01''$ in Bidschof-Vital, fünfstellige mathematische und astronomische Tafeln. Wien und Leipzig 1905 (*M* 7,50).

Wegen fortwährender Gleichgewichtsstörungen entspricht der wirkliche Zustand der Atmosphäre nicht den bei der Ableitung der Refraktionsformeln gemachten Annahmen. Bei kleineren Zenitdistanzen bis zu etwa 60° kann der Refraktionsfehler bis zu etwa $\pm 0{,}5''$ betragen, bei größeren Zenitdistanzen wird er aber größer.

Faßt man die Gleichungen (3), (4) und (5) zusammen, so ergibt sich die auf den Mittelpunkt der Erde umgerechnete Zenitdistanz aus der beobachteten Z' durch

$$Z = Z' - p \pm \mathfrak{r} + R. \qquad (7)$$

Bei allen Fixsternen (mit Ausnahme der Sonne) werden p und $\mathfrak{r}$ zu Null.

18. Kapitel.

Messungen mit der Sonne.

Die Messungen mit der Sonne geben etwas ungenauere Ergebnisse als die mit Sternen, aber man braucht zum Anzielen und beim Ablesen auf den Kreisen keine besonderen Beleuchtungsvorrichtungen; lediglich vor das Okular wird ein Okularprisma, entweder ein gewöhnliches gleichschenklig rechtwinkliges Glasprisma oder ein solches mit dachförmig geschliffener Hypotenuse und mit Sonnenglas angebracht (vgl. § 126). Um größere Störungen der Röhrenlibellen durch die Wärmestrahlung der Sonne zu vermeiden, beschattet man jene mit hellem Papiere, das man nach Anbringen eines passenden Ausschnittes auch an geeigneten Stellen des Theodolitaufbaues befestigen kann.

§ 131. Bestimmung der geographischen Breite φ aus der gemessenen kleinsten Zenitdistanz der Sonne mit Zahlenbeispiel.

Die Sonne befindet sich im wahren Mittage hinreichend genau im höchsten Punkte ihrer täglichen Bahn. Ist demnach $\delta_\odot$ die zu dieser Zeit vorhandene Deklination der Sonne und z_m die auf den Erdmittelpunkt reduzierte gemessene Zenitdistanz, so folgt die geographische Breite φ des Beobachtungsortes zu

$$\varphi = z_m + \delta_\odot. \tag{1}$$

Zur Bestimmung von z_m kann man um die Mittagszeit dem Laufe der Sonne durch beständiges Anzielen des unteren oder oberen Randes der Sonne mit dem Theodolitfernrohr folgen. Wenn die Sonne sich am Horizontalfaden einige Sekunden lang wagerecht fortbewegt, befindet sie sich im höchsten Punkte ihrer Bahn; aus der dann am Höhenkreise gemachten Ablesung ergibt sich demnach z_m.

Besser ist es aber, die kleinste Zenitdistanz aus einigen kurz vor und nach dem wahren Mittage gemessenen Zenitdistanzen etwa durch eine graphische Ausgleichung zu finden. Zu diesem Zwecke mißt man dann abwechselnd nach dem oberen und unteren Sonnenrande die Zenitdistanzen in beiden Fernrohrlagen und notiert die Uhrablesung bei jeder Anzielung.

In Ermangelung der Kenntnis der Kulminationszeit kann man die angenäherte Meridianrichtung mit einer Magnetnadel bestimmen.

Zahlenbeispiel. Am 7. Juli 1905 wurden an einem Theodoliten mit 10″ Nonienangabe (Höhenkreis) zunächst mit zwei terrestrischen Zielpunkten die Lage des Zenitpunktes Z_0 (vgl. § 28, A.) bestimmt und dann nach den Sonnenrändern mehrmals Zenitdistanzen gemessen. Die Sonnenscheibe muß hiebei stets den Horizontalfaden in dem Augenblick berühren, in welchem sie vom Vertikalfaden halbiert wird. Die bei der Messung erhaltenen Zahlen sind aus folgender Tabelle ersichtlich:

Zielpunkt. Anblick im Fernrohr	Kreislage	Nonius A ° ′ ″	Non. B ′ ″	Mittel ° ′ ″	$z = \begin{cases} l - Z_0 \\ Z_0 - r \end{cases}$ ° ′ ″	Uhrablesung	Bemerkungen
⊕	r	274 40 00	40 25	274 40 12	$2Z_0 = 0^0 23' 52''$	$Z_0 = 360^0 11' 55''$	Barometerstand 738,2 mm (auf 0° reduz.)
	l	85 43 30	43 50	85 43 40			
⊕	l	86 48 30	48 50	86 48 40	$2Z_0 = 0^0 23' 50''$		
	r	273 35 10	35 10	273 35 10			
☉	l	26 45 00	45 30	26 45 15	26 33 20	$12^h\ 11^m\ 51^s$	Luft: + 26,5° C (Schleuderthermometer)
☉	r	334 14 00	14 30	334 14 15	25 57 40	15 49	
☉	r	334 16 30	16 40	334 16 35	25 55 20	18 53	
☉	l	26 35 30	35 30	26 35 30	26 23 35	27 28	→ Wolken!
☉	l	26 05 30	05 20	26 05 25	25 53 30	31 55	
☉	r	333 45 00	46 00	333 45 30	26 26 25	34 55	
☉	r	333 43 30	43 40	333 43 35	26 28 20	36 55	
☉	l	26 11 00	11 00	26 11 00	25 59 05	39 21	

Berechnung:

Uhrablesung	⊙	Beobachtete Zenitdistanz	Refrakt. $+ R$	Parall. $- p$	Halbmesser $\pm$ r	Reduzierte Zenitdistanz
$12^h\ 11^m\ 51^s$	☉	26 33 20	+ 26″	− 4″	− 15′ 44″	26 17 58
15 49	☉	25 57 40	+ 25	− 4	+ 15 44	26 13 45
18 53	☉	25 55 20	+ 25	− 4	+ 15 44	26 11 25
27 28	☉	26 23 35	+ 26	− 4	− 15 44	26 08 13
31 55	☉	25 53 30	+ 25	− 4	+ 15 44	26 09 35
34 55	☉	26 26 25	+ 26	− 4	− 15 44	26 11 03
36 55	☉	26 28 20	+ 26	− 4	− 15 44	26 12 58
39 21	☉	25 59 05	+ 25	− 4	+ 15 44	26 15 10

Refraktion R und Parallaxe p wurden den Tafeln im Nautischen Jahrbuche, der Sonnenhalbmesser r dem Berliner astronomischen Jahrbuche entnommen. Trägt man zu den Uhrablesungen als Abszissen

die entsprechenden reduzierten Zenitdistanzen als Ordinaten in passendem Maßstabe in ein rechtwinkliges Koordinatensystem (mm-Papier) ein und zeichnet durch die erhaltenen Punkte die ausgleichende Linie, dann kann man mit dieser $z_m = 26^0 08' 12''$ (bei der Uhrablesung $12^h 27^m$) ablesen.

Zur Interpolation der diesem Zeitpunkte entsprechenden Sonnendeklination zwischen den Angaben der astronomischen Jahrbücher ist folgendes zu beachten: a) der Beobachtungsort liegt (nach einer Karte) $16^m 54^s$ westlich vom Meridian des Berliner Jahrbuches, folglich ist der mittlere Mittag am Beobachtungsorte $16^m 54^s$ später als in Berlin; b) das Berliner Jahrbuch gibt für Juli 7. im mittleren Berliner Mittage die Zeitgleichung $+ 4^m 34^s$ und $\delta = + 22^0 38' 43{,}2''$ und für Juli 8. $\delta = + 22^0 32' 17{,}6''$ (Änderung $385{,}6''$). Da demnach am Beobachtungsorte der wahre Mittag $4^m 34^s$ nach dem mittleren Mittage stattfindet (die kleine Änderung der Zeitgleichung in 17^m darf hier vernachlässigt werden), so kulminiert die Sonne am Beobachtungsorte $16^m 54^s + 4^m 34^s = 21^m 28^s = 0{,}0149^d$ nach dem mittleren Berliner Mittage. Diesem Zeitraume entspricht die Deklinationsänderung $0{,}0149 \cdot 385{,}6'' = 5{,}7''$, folglich $\delta_\odot = 22^0 38' 43{,}2'' - 5{,}7'' = + 22^0 38' 37''$ und deshalb nach Gleichung (1)

$$\varphi = 26^0 08' 12'' + 22^0 38' 37'' = 48^0 46' 49''.$$

§ 132. Bestimmung der geographischen Breite aus gemessenen Zirkummeridianzenitdistanzen der Sonne und den zugehörigen wahren Zeiten nebst Zahlenbeispiel.

Als bekannt wird hier vorausgesetzt 1) die Breite des Beobachtungsortes auf einige Minuten genau und 2) irgendeine genaue Zeit z. B. M. O. Z. (oder auch M. E. Z. oder Greenwicher M. Z. mit den zugehörigen Längenunterschieden des Beobachtungsortes gegen die betreffenden Meridiane) der einzelnen Beobachtungen.

Die Zeitpunkte, in denen die Zenitdistanzmessungen erfolgen, sollen von der Kulminationszeit höchstens etwa $\pm 15^m$ abweichen, so daß also nur kleine Stundenwinkel vor und nach dem wahren Mittage in Frage kommen.

Sind u die Uhrablesungen bei den einzelnen Beobachtungen, Δu die jeweiligen Verbesserungen der Uhrangabe, um die mittlere Ortszeit (M. O. Z.) zu erhalten, dann sind die mittleren Ortszeiten der Beobachtungen gegeben durch

$$\text{M. O. Z.} = u + \Delta u. \qquad (1)$$

Wenn der tägliche Gang der Uhr hinreichend klein ist, darf Δu konstant genommen werden.

Die wahren Ortszeiten (Stundenwinkel der Sonne) sind deshalb nach § 128

$$\text{W. O. Z.} = t_\odot = \text{M. O. Z.} - \mathfrak{Z}. \tag{2}$$

Zweckmäßig zählt man in dieser Gleichung die Stundenwinkel t auf der Ostseite negativ; die Zeitgleichung $\mathfrak{Z}$ muß für jede Beobachtung zwischen die Jahrbuchangaben eingeschaltet werden.

So lange t klein ist, ist die Meridianzenitdistanz z_m nur wenig von der gemessenen (reduzierten) Zirkummeridianzenitdistanz z verschieden. Setzt man deshalb

$$z_m = z - x, \tag{3}$$

so wird nach Gleichung (1), § 131

$$\varphi = z - x + \delta, \tag{4}$$

worin δ für die einzelnen Messungen zwischen die Jahrbuchangaben einzuschalten ist.

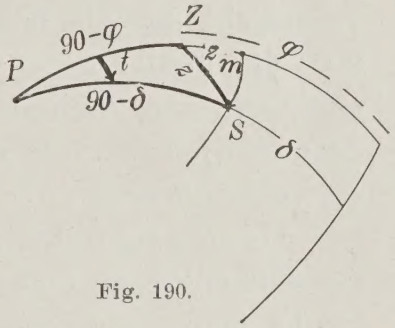


Fig. 190.

Zur Berechnung der Größe x für gegebene t, z, δ liest man aus dem Dreieck Pol-Zenit-Stern (Fig. 190) ab:

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t. \tag{5}$$

Beachtet man, daß

$$\cos t = 1 - 2\sin^2\frac{t}{2} \quad \text{und} \quad z = \varphi - \delta + x,$$

so wird aus (5)

$$\cos(\varphi - \delta + x) = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta - 2\cos\varphi \cos\delta \sin^2\frac{t}{2}$$

$$= \cos(\varphi - \delta) - 2\cos\varphi \cos\delta \sin^2\frac{t}{2}$$

oder

$$\cos(\varphi - \delta)\cos x - \sin(\varphi - \delta)\sin x = \cos(\varphi - \delta) - 2\cos\varphi \cos\delta \sin^2\frac{t}{2}$$

woraus durch eine kleine Umformung folgt

$$\sin x = \frac{2\cos\varphi \cos\delta}{\sin(\varphi - \delta)} \sin^2\frac{t}{2} - \operatorname{ctg}(\varphi - \delta) 2\sin^2\frac{x}{2}. \tag{6}$$

Da x klein ist, so wird aus (6) bei Vernachlässigung des zweiten Gliedes hier hinreichend genau

$$x'' = \frac{2\cos\varphi \cos\delta}{\sin(\varphi - \delta)} \varrho'' \left(\frac{t''}{2\varrho''}\right)^2 = \frac{15^2}{2\varrho''} \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin(\varphi - \delta)} (t^s)^2,$$

oder:

$$x'' = [6.7367 - 10] \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin(\varphi - \delta)} (t^s)^2. \qquad (7)$$

Die in (7) in eckige Klammer geschriebene Zahl stellt den Logarithmus der Zahl vor.

Das in Gleichung (7) vernachlässigte Glied $\operatorname{ctg}(\varphi - \delta)\, 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ beträgt z. B. bei $\varphi = 45^0$, $\delta = 0$, $t = 10^m$ $(x'' \approx 196'')$; $dx = 0{,}09''$

15^m (441); $0{,}47''$

20^m (787); $1{,}50''$.

Der kleine Zeitfehler dt^s verursacht, wie die Differentiation von Gleichung (7) zeigt, einen Fehler $dx'' = \frac{2x}{t^s} dt$. Der Fehler $dt = 1^s$ verursacht deshalb bei den vorigen Annahmen bei $t = 10^m$; 15^m und 20^m die Fehler $dx = 0{,}7''$; $1{,}0''$ und $1{,}3''$. Für die angestrebte Genauigkeit von wenigen Sekunden darf deshalb Gleichung (7) bis zu Stundenwinkeln von etwa $\pm 15^m$ zur Berechnung der Reduktion x verwendet werden.

Um etwaige kleine Fehler in der Bestimmung des Zenitpunktes Z_0 am Höhenkreise und im Sonnenhalbmesser unschädlich zu machen, macht man gleich viele Messungen in der ersten und in der zweiten Fernrohrlage nach beiden Sonnenrändern (z. B. $\underline{\odot}$ bei Kreis links bis zur Kulmination; nach dem Durchschlagen $\overline{\odot}$) und mittelt je zwei solcher Messungen.

Die Uhrablesungen auf Taschenuhren werden von einem einzigen Beobachter unmittelbar nachdem die Sonnenscheibe den Horizontalfaden (im Schnittpunkt mit dem Vertikalfaden) berührt hat, durch einen Blick zuerst auf den Sekundenzeiger der Uhr (dies geht sehr leicht, wenn über dem Zifferblatt eine passende Konvexlinse angebracht wird) oder durch Mitzählen der $^1/_2$- bis $^1/_5$-Sekundenschläge ermittelt. Für kleine Stundenwinkel reicht zur Berechnung von Gleichung (7) der gewöhnliche Rechenschieber aus.

Zahlenbeispiel. Durch eine Zeitbestimmung mit der Sonne (ev. nach § 131 und 133) wurde für die benutzte, nach mittlerer Zeit ohne nennenswerten Gang gehende, Glashütter Taschenuhr mehrere Stunden vor dem Mittage des 13. Mai 1907 gefunden.

$$\text{M. E. Z.} = u + 9{,}6^s \pm 0{,}6^s. \qquad (1)$$

Der Beobachtungsort liegt $\lambda = 17^m\,52{,}0^s$ westlich vom mitteleuropäischen Zeit-Meridian und deshalb ist M. O. Z. = M. E. Z. $- 17^m\,52{,}0^s$, so daß nach Gleichung (2) wird

$$t_\odot = \text{M. E. Z.} - 17^m\,52{,}0^s - \mathfrak{Z}. \qquad (2)$$

Der benutzte Theodolit, ähnlich Fig. 54, besitzt einen Höhenkreis mit zwei Nonien von 20″ Angabe und einer Libellenalhidade. Vor jeder Höhenkreisablesung wurde die Höhenalhidadenalibelle zum scharfen Einspielen gebracht. Durch eine Messung nach einem terrestrischen Zielpunkte wurde die Lage des Zenitpunktes am Höhenkreis genähert zu $Z_0 = 0^0 03' 15''$ gefunden. Sämtliche bei der Messung mit der Sonne ermittelten Zahlen sind in der folgenden Tabelle gegeben. Die genäherte Breite ist $52^0\,16'\,24''$; Temperatur $+ 27{,}0^0$ C; $B_0 = 753{,}0$ mm.

Uhrangabe (genähert M. E. Z.)	Kreis	Zielpunkt	Nonius A ° ′ ″	Non. B ′ ″	Mittel ′ ″	$z = r - Z_0$ od. $= Z_0 - l$	Refrakt. $+ R$	Parall. $- p$	Halbmesser $\pm$ r	$z_\odot$
$12^h\,08^m\,12^s$	r	⊙	33 55 20	54 40	55 00	33 51 45	+ 36″	− 5″	+ 15′ 51″	34 08 07
10 25	r	⊙	33 54 20	54 00	54 10	33 50 55	+ 36	− 5	+ 15 51	34 07 17
13 10	r	⊙	34 26 20	26 20	26 20	34 23 05	+ 35	− 5	− 15 51	34 07 44
14 45	l	⊙	335 41 20	40 50	41 05	34 22 10	+ 35	− 5	− 15 51	34 06 49
16 00	l	⊙	326 12 20	11 40	12 00	33 51 15	+ 36	− 5	+ 15 51	34 07 37
18 15	l	⊙	326 12 00	11 20	11 40	33 51 35	+ 36	− 5	+ 15 51	34 07 57

Aus Gleichung (7) folgt

$$x'' = [6.7367 - 10]\,\frac{\cos 52^0 16' 24'' \cdot \cos 18^0 9' 20''}{\sin 34^0 7' 4''}\,(t^s)^2 = 0{,}0005651\,(t^s)^2.$$

M. E. Z.	$\mathfrak{Z}$ [1]	$\delta_\odot$ [1]	$t_\odot$	t^s	x'' [2]	z_m	$\varphi = z_m + \delta_\odot$
$12^h\,08^m\,22^s$	$-3^m\,48^s$	$+ 18^0\,09'\,18''$	$11^h\,54^m\,18^s$	− 342	− 66″	$34^0\,07'\,01''$	$52^0\,16'\,19''$
10 35	− 3 48	20	56 31	− 209	− 25	06 52	16 12
13 20	− 3 48	21	59 16	− 44	− 1	07 43	17 04
14 55	− 3 48	22	12 00 51	+ 51	− 1	06 48	16 13
16 10	− 3 48	23	02 06	+ 126	− 9	07 28	16 53
18 25	− 3 48	24	04 21	+ 261	− 39	07 18	16 43

Mittelt man eine Messung in Fernrohrlage links mit einer in Fernrohrlage rechts (zur Eliminierung der Unsicherheit in der Bestimmung von Z^0) von der Mitte aus gerechnet, so wird

1) Bei Verwendung z. B. des Berliner Jahrbuches zur Entnahme von $\mathfrak{Z}$ und $\delta_\odot$ ist zu beachten, daß die mittlere Berliner Zeit = M. E. Z. $- 6^m\,25^s$.

2) Berechnung mit dem Rechenschieber.

$$\varphi = 52^0\,16'\,40''$$
$$33$$
$$31$$
$$\underline{\varphi = 52^0\,16'\,35'' \pm 3''}.$$

§ 133. Zeitbestimmung unter Voraussetzung bekannter Breite φ des Beobachtungsortes durch Messen von Zenitdistanzen.

Man mißt bei günstiger Stellung der Sonne nach den beiden Sonnenrändern gleich oft in beiden Fernrohrlagen Zenitdistanzen und notiert die entsprechenden Uhrablesungen. Die Sonne befindet sich in günstigster Stellung, wenn sie im ersten Vertikal, d. h. in der durch den Beobachtungsort gelegten Ost-West-Ebene steht, weil sie in dieser Ebene ihre Höhe am schnellsten verändert. Die Breite des Beobachtungsortes kann bis auf einige Sekunden z. B. nach § 131 bestimmt worden sein (oder auch aus einer geeigneten Karte entnommen werden).

Wenn zwischen zwei aufeinanderfolgenden Messungen nur wenige Minuten Zeit verstrichen sind, dann darf man je zwei solcher Messungen zu einem Mittelwerte vereinigen und es kann dadurch die Halbmesserkorrektion der Sonne beseitigt werden, wenn stets abwechselnd der untere und obere Rand angezielt wird. Dieses Mittelungsverfahren setzt voraus, daß die Höhenänderung der Sonne sehr nahezu proportional der Zeit erfolgt und daß die Refraktionsänderung für wenige Grade gleichmäßig ist. Um die Unsicherheit in der Refraktion klein zu halten, geht man nicht gern über Zenitdistanzen von etwa $70^0 \div 80^0$. Die beobachteten Zenitdistanzen müssen dann 1. wegen der Refraktion, 2. wegen der Höhenparallaxe der Sonne und ev. 3. wegen des Sonnenhalbmessers verbessert werden, um die auf den Erd- und Sonnenmittelpunkt reduzierten Zenitdistanzen z zu finden.

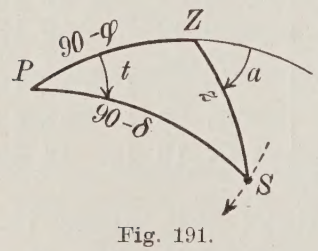


Fig. 191.

Ist in Fig. 191 z eine solche Zenitdistanz, dann ergibt sich aus dem astronomischen Dreieck PZS mit den eingeschriebenen Bezeichnungen nach dem Kosinussatze

$$\cos t = \frac{\cos z - \sin \delta \sin \varphi}{\cos \delta \cos \varphi}. \qquad (1)$$

Da diese Gleichung logarithmisch wenig bequem ist (und bei kleinen Winkeln t unsichere Werte t liefern würde), so formt man sie meist um. Bildet man $\frac{1 - \cos t}{1 + \cos t} = \mathrm{tg}^2 \frac{t}{2}$ und setzt zur Vereinfachung

$$\frac{\varphi + \delta + z}{2} = s, \tag{2}$$

so wird

$$\operatorname{tg} \frac{t}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-\varphi)\sin(s-\delta)}{\cos s \cos(s-z)}}. \tag{3}$$

Für Vormittagsbeobachtungen rechnet man zweckmäßig mit östlichen (negativen) Stundenwinkeln t.

Durch Hinzufügen der jeweiligen Zeitgleichung $\mathfrak{Z}$ zur wahren Zeit t aus Gleichung (1) oder (3) findet man die mittlere Ortszeit

$$\text{M. O. Z.} = t + \mathfrak{Z}. \tag{4}$$

Durch Hinzufügen des Längenunterschiedes λ gegen den Meridian z. B. der mitteleuropäischen Zeit erhält man

$$\text{M. E. Z.} = \text{M. O. Z.} + \lambda. \tag{5}$$

Der Vergleich dieser Zeiten nach Gleichung (4) oder (5) mit den jeweiligen Uhrangaben liefert die jeweilige Standkorrektion Δu der Uhr.

Differenziert man Gleichung (1) nach t und z, so wird

$$dt = \frac{\sin z}{\cos\delta \cos\varphi \sin t}\, dz.$$

Berücksichtigt man in dieser Gleichung die Beziehung (vgl. Fig. 191): $\frac{\sin z}{\cos\delta} = \frac{\sin t}{\sin a}$, so wird, wenn dt in Zeit- und dz in Bogensekunden genommen wird,

$$dt^s = \frac{1}{15} \frac{1}{\cos\varphi \sin a}\, dz''. \tag{6}$$

Der von dem Messungsfehler dz verursachte Zeitfehler dt wird demnach für $a = 90^0$ (270^0), d. h. im ersten Vertikal ein Minimum. Aus (6) folgt z. B. für $\varphi = 52^0\,16'$, $a = 90^0$, $dz = \pm 20''$; $dt^s = \pm 2{,}2^s$. Da die Sonne den ersten Vertikal nicht immer über dem Horizont schneidet, so mißt man die Zenitdistanzen in der Regel $3 \div 5$ Stunden vor oder nach dem Mittage.

Differenziert man (1) nach t und φ, so wird (unter Berücksichtigung von Gleichung (1))

$$dt = \frac{1}{\sin t}(\operatorname{tg}\delta - \cos t \operatorname{tg}\varphi)\, d\varphi.$$

Schreibt man diese Gleichung (nach Anwendung von (1) für $\cos t$ und sofort ersichtlicher goniometrischer Umwandlung) in der Form $\sin t \cos\delta\, dt = \frac{\sin\delta - \sin\varphi\cos z}{\cos^2\varphi} \cdot d\varphi$ und beachtet, daß nach der Fig. 191

$$\sin t \cos\delta = \sin a \sin z$$

und

$$\sin\delta = \cos z \sin\varphi - \sin z \cos\varphi \cos a$$

oder

$$\sin\delta - \cos z \sin\varphi = -\sin z \cos\varphi \cos a$$

ist, so folgt

$$dt = -\frac{\operatorname{ctg} a}{\cos\varphi} \cdot d\varphi$$

oder:

$$dt^s = -\frac{1}{15}\frac{\operatorname{ctg} a}{\cos\varphi} d\varphi'', \tag{7}$$

z. B. für $d\varphi = \pm 10''$, $\varphi = 52^0\,16'$, $a = 90^0$ wird $dt = 0$ und für $a = 45^0$ wird $dt = \pm 1{,}1^s$.

Die Deklination δ wird beim Beginne der Berechnung nach (1) oder (3) für einen genäherten Stundenwinkel t aus den astronomischen Jahrbüchern interpoliert, ist also fehlerhaft. Durch Differenzieren von (1) nach t und δ wird

$$dt = (\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\delta\cos t)\frac{d\delta}{\sin t} \text{ oder } dt^s = (\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\delta\cos t)\frac{d\delta''}{15\sin t}. \tag{8}$$

Die Deklination ändert sich zur Zeit der Tag- und Nachtgleichen am stärksten und zwar stündlich etwa um $60''$. Einem Zeitfehler von etwa $\pm 2^m$ entspricht demnach $d\delta = \pm 2''$ und dies würde nach (8) einen Fehler im Stundenwinkel bei $\varphi = 52^0$, $t = 4^h = 60^0$, $\delta = 0$, von $dt^s = \pm 0{,}2^s$ verursachen. Anstatt mit der Gleichung (8) nachträglich die Verbesserungen der einzelnen aus (1) oder (3) gefundenen Stundenwinkel zu berechnen, zieht man vor, zunächst für eine Messung etwa mit vierstelligen Logarithmen die Zeit und damit die Standkorrektion Δ_u der Beobachtungsuhr auf etwa $\pm \frac{1}{2}^m$ zu bestimmen. Die dadurch bekannten Zeiten reichen hin, um die einzelnen δ und β für die scharfen Rechnungen (5-, seltener 6-stellig) scharf interpolieren zu können.

§ 134. **Zahlenbeispiel.**

Mit dem in § 132 benutzten Theodoliten mit Okularprisma wurden an einem Orte mit der Breite $\varphi = 52^0\,16'\,24''$, der Länge $\lambda = 17^m\,52{,}0^s$ westlich vom M. E. Z.-Meridian und mit einer nahezu (auf etwa 10^s) nach M. E. Z. gehenden Taschenuhr am 13. Mai 1907 (Vormittag) die folgenden Messungen ausgeführt. Der Horizontalfaden wurde stets zunächst sehr nahe an den entsprechenden Sonnen-

rand gebracht und dann der Zeitpunkt der Berührung beobachtet (so, daß der Vertikalfaden die Sonnenscheibe jedesmal halbierte).

Uhrablesung u (genähert M.E.Z.)	Kreislage	Zielpunkt	Nonius A ° ′ ″	Non. B ′ ″	Mittel ° ′ ″	$2z_\odot$ / $z_\odot$ ° ′ ″	Bemerkungen
$10^h\ 04^m\ 33{,}5^s$	l	☉	317 51 00	50 40	317 50 50	84 38 10	Luft: + 25,0° C
07 10,5	r	☉	42 29 20	28 40	42 29 00	42 19 05	$B_0 = 754{,}0$ mm
08 59	r	☉	41 46 00	45 20	41 45 40	83 43 00	
10 56	l	☉	318 03 00	02 20	318 02 40	41 51 30	
13 35	r	☉	41 15 00	14 00	41 14 30	82 44 50	
15 04	l	☉	318 30 00	29 20	318 29 40	41 22 25	

Da die zwischen den einzelnen Messungen verflossenen Zeiten etwa 3^m nicht überschreiten, so wurden je zwei Messungen, wie durch die Klammern angedeutet, zusammen gezogen, so daß die Lage des Zenitpunktes am Höhenkreise nicht bestimmt zu werden brauchte. Führt man die Reduktion der Zenitdistanzen etwa mit den Hilfstafeln im Nautischen Jahrbuche aus, so wird

Beobachtete Zenitdistanz	42° 19′ 05″	41° 51′ 30″	41° 22′ 25″
Refraktion	+ 50	+ 49	+ 48
Höhenparallaxe	− 6	− 6	− 6
Halbmesser	0	0	0
Reduzierte Zenitdistanz .	42° 19′ 49″	41° 52 13″	41° 23′ 07″

Entnimmt man die Deklination und Zeitgleichung z. B. dem Nautical Almanac for the Year 1907, so ist zu beachten, daß dessen Meridian 1^h westlich vom M. E. Z.-Meridian liegt, also sind alle obigen Uhrablesungen um 1^h zu verkleinern, um die jeweilige mittlere Greenwicher Zeit zu erhalten. Man findet z. B. für

$$10^h\,05^m\,52^s - 1^h = 9{,}10^h = -2{,}90^h \text{ Vorm.}$$

$$\delta_\odot = +(18^0\,09'\,50{,}5'' - 37{,}69''.\,2{,}90) = +18^0\,08'\,01''$$

$$\mathfrak{Z} = -(3^m\,47{,}71^s - 0{,}049\,.\,2{,}90) = -3^m\,47{,}6^s$$

für $9{,}17^h$: $\delta = +18^0\,08'\,04''$; $\mathfrak{Z} = -3^m\,47{,}6^s$

und für 9,24: $\delta \quad +18^0\,08'\,06''$; $\mathfrak{Z} = -3^m\,47{,}6^s$.

Nach Formel (2) bis (5) gestaltet sich die Rechnung

Nr.	1	2	3
$\varphi =$	$52^0\ 16'\ 24''$	$52^0\ 16'\ 24''$	$52^0\ 16'\ 24''$
$\delta =$	$18\ 08\ 01$	$18\ 08\ 04$	$18\ 08\ 06$
$z =$	$42\ 19\ 49$	$41\ 52\ 13$	$41\ 23\ 07$
$2s =$	$112\ 44\ 14$	$112\ 16\ 41$	$111\ 47\ 37$
$s =$	$56\ 22\ 07$	$56\ 08\ 20$	$55\ 53\ 48$
$s - \varphi =$	$4\ 05\ 43$	$3\ 51\ 56$	$3\ 37\ 24$
$s - \delta =$	$38\ 14\ 06$	$38\ 00\ 16$	$37\ 45\ 42$
$s - z =$	$14\ 02\ 18$	$14\ 16\ 07$	$14\ 30\ 41$
$\sin(s - \varphi)$	8.85 379	8.82 876	8.80 070
$\sin(s - \delta)$	9.79 162	9.78 938	9.78 702
$E \cos s$	0.25 661	0.25 400	0.25 128
$E \cos(s - z)$	0.01 317	0.01 360	0.01 408
$\operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}$	8.91 519	8.88 574	8.85 308
$\operatorname{tg} \frac{t}{2}$	9.45 759	9.44 287	9.42 654
$\frac{t}{2} =$	$16^0\ 00'\ 12''$	$15^0\ 29'\ 45''$	$14^0\ 57'\ 01''$
$t^0 =$	$32^0\ 00'\ 24''$	$30^0\ 59'\ 30''$	$29^0\ 54'\ 02''$
$t^h =$	$-2^h\ 08^m\ 01{,}6^s$	$-2^h\ 03^m\ 58{,}0^s$	$-1^h\ 59^m\ 36{,}1^s$
	$9^h\ 51^m\ 58{,}4^s$	$9^h\ 56^m\ 02{,}0^s$	$10^h\ 00^m\ 23{,}9^s$
$\mathfrak{Z} =$	$-\ 3\ 47{,}6$	$-\ 3\ 47{,}6$	$-\ 3\ 47{,}6$
M. O. Z. =	$9\ 48\ 10{,}8$	$9\ 52\ 14{,}4$	$9\ 56\ 36{,}3$
$\lambda =$	$+\ 17\ 52{,}0$	$+\ 17\ 52{,}0$	$+\ 17\ 52{,}0$
M. E. Z. =	$10^h\ 06^m\ 02{,}8^s$	$10^h\ 10^m\ 06{,}4^s$	$10^h\ 14^m\ 28{,}3^s$
$u =$	$10\ 05\ 52{,}0$	$10\ 09\ 57{,}5$	$10\ 14\ 19{,}5$
$\Delta u =$	$+\ 10{,}8$	$+\ 8{,}9$	$+\ 8{,}8$

$$\Delta u = +\ 9{,}5^s \pm 0{,}6^s$$

§ 135. Längenunterschiedbestimmung.

Nach § 128 ist die Differenz irgend zweier demselben Zeitpunkte entsprechenden Ortszeiten (mittlere, wahre oder Sternzeit) der beiden Orte A und B die Längendifferenz dieser beiden Orte. Ist also z. B in A und B je eine nach M. O. Z. gehende Uhr aufgestellt, deren Verbesserungen Δu bekannt sind, und man beobachtet auf diesen Uhren die einzelnen Zeitpunkte, in denen z. B. auf irgend einem elektrischen Wege gleichzeitig in A und B Zeichen gegeben werden, so ist die Differenz der entsprechenden berichtigten Uhrzeiten der Längenunterschied. An Stelle elektrisch gegebener Zeichen kann man auch optische Zeichen, wie z. B. das Aufleuchten von Pulverblitzen auf einem zwischen den

beiden Punkten liegenden Berge oder das Eintreten von Verfinsterungen der Jupitertrabanten u. dgl. beobachten. Die mittlere Greenwicher Zeit des Ein- und Austritts der Jupitertrabanten in den Jupiterkernschatten ist zu diesem Zwecke für hierzu geeignete Zeiten auf 1^s z. B. im Nautischen Jahrbuch voraus berechnet.

Ein häufig benutztes Verfahren zur Bestimmung des Längenunterschiedes zweier Orte A und B besteht darin, daß man mit einem Chronometer, dessen Stand und Gang z. B. gegen die M. O. Z. des Punktes A bekannt ist, in dem Punkt B eine Zeitbestimmung nach § 133 ausführt. Es sei z. B. für ein nach mittlerer Greenwicher Zeit gehendes Chronometer im Punkte A (dessen Längenunterschied gegen Greenwich bekannt sei) am 6. Juni 1907 Mittag (0^h) die Uhrverbesserung $\Delta u = +\,1^h\,3^m\,12{,}2^s$ gefunden. Der tägliche Gang der Uhr sei $du = +\,0{,}32^s$. Am 12. Juni 1907 (Nm) habe man in B die mittlere Ortszeit aus Zenitdistanzmessungen nach § 133 berechnet zu M. O. Z. $= 5^h\,26^m\,27{,}6^s$ und dabei am Chronometer abgelesen $3^h\,10^m\,18{,}1^s$.

Die mittlere Greenwicher Ortszeit dieses Augenblicks ist: $3^h\,10^m\,18{,}1^s + (1^h\,3^m\,12{,}2^s + 0{,}32^s \cdot 6{,}17) = 4^h\,13^m\,32.3^s$. Demnach liegt B westlich vom Greenwicher Meridian um $\lambda = (5^h\,26^m\,27{,}6^s - 4^h\,13^m\,32{,}3^s) = 1^h\,12^m\,55{,}3^s$. In der Regel verwendet man (z. B. auf Schiffen) drei Chronometer.

§ 136. Azimutmessung mit der auf- oder untergehenden Sonne.

Es wird vorausgesetzt, daß die Breite des Beobachtungsortes und außerdem die wahre Zeit bei jeder Anzielung der Sonne bekannt sind.

Um das Azimut einer vom Theodolitstandort nach einem weiteren Punkte Q der Erdoberfläche gehenden (terrestrischen) Richtung zu bestimmen, mißt man den jeweiligen Horizontalwinkel zwischen dieser terrestrischen Richtung und der veränderlichen Richtung nach der Sonne. Damit einerseits die Sonne im azimutalen Sinne während der Messung nur kleine Veränderungen ausführt, und um andererseits die Einflüsse der Theodolitachsenfehler auf die Ablesungen am Horizontalkreise vernachlässigbar klein zu machen (vgl. § 25), sollen die Zielungen nach der Sonne nur unter kleinen Höhenwinkeln (etwa 20^0) erfolgen, d. h. die Messungen werden kurz nach Sonnenaufgang oder kurz vor Sonnenuntergang ausgeführt. Die zur Bestimmung des Uhrstandes notwendigen Zeitbestimmungen werden zweckmäßig kurze Zeit nach bzw. kurze Zeit vor der Azimutmessung gemacht, um das gleichzeitige genaue Ablesen am Horizontal- und Höhenkreis zu vermeiden.

Die Winkelmessung wird in zwei Fernrohrlagen durchgeführt und zwar nach richtiger Aufstellung des Theodoliten in folgender Weise:

Anzielen von Q, Ablesen des Horizontalkreises; Anzielen des rechten (oder linken) Sonnenrandes ⊖, Ablesen der Beobachtungsuhr u_1 und Ablesen des Horizontalkreises; nach darauf folgendem Durchschlagen des Fernrohres: Anzielen des linken (oder rechten) Sonnenrandes ⊖, Ablesen der Uhr u_2, Ablesen des Horizontalkreises; Anzielen von Q, Ablesen des Horizontalkreises. Diese Messungen werden zur Erhöhung der Genauigkeit mehrmals wiederholt, wobei vor jeder Wiederholung der Horizontalkreis etwa um $\frac{180^0}{s}$ verdreht wird (s = Anzahl der beabsichtigten Messungen).

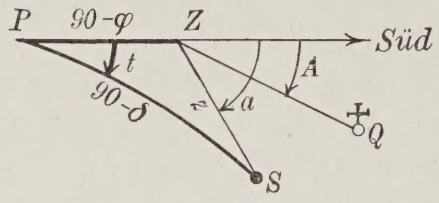


Fig. 192.

Aus dem in leicht verständlicher Weise entstehenden Dreiecke (Fig. 192) liest man mit dem ctg-Satze sogleich ab:

$$\operatorname{ctg}(90^0 - \delta)\sin(90^0 - \varphi) = \cos(90^0 - \varphi)\cos t + \sin t \operatorname{ctg}(180^0 - a)$$

oder

$$\operatorname{ctg} a = \frac{\sin\varphi\cos t - \operatorname{tg}\delta\cos\varphi}{\sin t}. \tag{1}$$

Geht die Beobachtungsuhr z. B. nach mittlerer Ortszeit und ist Δu die hierzu notwendige Verbesserung der Uhrablesung u, so ist

$$\text{M. O. Z.} = u + \Delta u \tag{2}$$

und folglich:

$$t = \text{M. O. Z.} - \mathfrak{Z}. \tag{3}$$

Deklination δ und Zeitgleichung $\mathfrak{Z}$ sind für die einzelnen Messungen aus den astronomischen Jahrbüchern zu interpolieren. Da sich die Sonnenhöhe während der Messung in den beiden Fernrohrlagen etwas ändert, so wird der Sonnenhalbmesser durch Mittelbildung der beiden Kreisablesungen, die den Zielungen nach den beiden Sonnenrändern entsprechen, nicht vollständig eliminiert; es muß deshalb jede einer Zielung nach einem Sonnenrande entsprechende Ablesung wegen der Randanzielung korrigiert werden. Ist R der Halbmesser der Sonnenscheibe und z die Zenitdistanz der nach einem Rande gehenden Zielung, so ergibt sich der Horizontalwinkel R' zwischen der Zielung nach der Sonnenmitte und der Zielung nach einem Rande durch

$$\sin R' = \frac{\sin R}{\sin z}. \tag{4}$$

Weil R klein ist, so darf auch genommen werden:

$$R' = \frac{R}{\sin z}. \tag{4'}$$

Das zur Reduktion notwendige z kann jedesmal auf einige Minuten am Höhenkreise abgelesen oder aus

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t \qquad (5)$$

roh berechnet werden. Anstatt jede einer Randanzielung entsprechende Horizontalkreisablesung um den entsprechenden Winkel R' zu verbessern, ist es meist bequemer, nur das Mittel aus den beiden Kreisablesungen in Fernrohrlage 1 und 2 zu verbessern. Diese Verbesserung beträgt, wenn z_1 die Zenitdistanz nach dem linken Sonnenrande und z_2 diejenige nach dem rechten Sonnenrande vorstellt (und der Kreis rechtsinnig beziffert ist):

$$\frac{R}{\sin z_1} - \frac{R}{\sin z_2} = 2R \cdot \frac{\cos \frac{z_1 + z_2}{2} \sin \frac{z_2 - z_1}{2}}{\sin z_1 \sin z_2} \approx \frac{R'' \operatorname{ctg} z}{\sin z} \cdot \frac{z_2 - z_1}{\varrho}. \qquad (6)$$

Da die azimutale Änderung der Sonne zwischen den beiden aufeinander folgenden Messungen in den zwei Fernrohrlagen hinreichend genau proportional der Zeit erfolgt, so braucht das Mittel der beiden Ablesungen wegen dieser Änderung nicht verbessert zu werden.

Fügt man den jeweiligen Horizontalwinkel QZS nach Andeutung der Fig. 192 zu dem entsprechenden Azimut a hinzu, dann findet man das Azimut A der nach Q gehenden Richtung

$$A = a - \sphericalangle Q.\, Z.\, S. \qquad (7)$$

§ 137. Zahlenbeispiel.

Am 20. Juni 1907 Nachm. wurde auf dem Rundpfeiler der Technischen Hochschule zu Braunschweig ($\varphi = 52^0\,16'\,24''$; $\lambda = 17^m\,52{,}0^s$ westlich vom M. E. Z.-Meridian) mit einem Theodolit mit 10″ Nonienangabe und mit einer guten Taschenuhr mit zu vernachlässigendem Gange, für die sich durch eine nach § 133 etwa $^1/_2$ Stunde vorher ausgeführte Zeitbestimmung ergab M. E Z. $= u + 19{,}0^s$, nach dem Punkte Q = Andreasturm und nach der (untergehenden) Sonne folgende Messungen ausgeführt. (Siehe Seite 334.)

Da der Höhenkreis überhaupt nicht abgelesen wurde, berechnet man zunächst mit Gleichung (5) genähert die einzelnen Zenitdistanzen nach der Sonne zu den M. E. Z.-Zeiten $5^h\,39^m\,19^s$, $5^h\,40^m\,49^s$, $5^h\,45^m\,07^s$ und $5^h\,46^m\,26^s$ und entnimmt zu diesem Zwecke für M. E. Z. $\approx 5^h\,43^m$ aus einem astronomischen Jahrbuche hinreichend genau: $\mathfrak{Z} = +\,1^m\,07^s$; $\delta = +\,23^0\,26{,}2'$; $R = 15'\,46''$, so daß also wird

$$t_1 = 5^h\,39^m\,19^s - 17^m\,52^s - 1^m\,07^s = 5^h\,20^m\,20^s = 80^0\,05'\,00''$$

$$t_4 = 5\;\;46\;\;26 - 17\;\;52 - 1\;\;07 = 5\;\;27\;\;27 = 81\;\;51\;\;45$$

Zielpunkt (Ansicht im Fernrohr mit Dachprisma)	Kreislage	Uhrablesung u	Horizontalkreis Nonius I	Non. II	Mittel Verbesserung	Winkel QZS	Bemerkungen
Q	l		99° 58′ 10″	58″ 20″	99° 57′ 57″	0° 00′ 00″	($t = +22{,}5°$
⊕		$5^h\,39^m\,00^s$	150 06 20	06 20	149 57 40	49 59 41	$B_0 = 750{,}5$ mm)
					— 2		
⊕	r	40 30	329 49 00	49 00			
Q			279 58 00	57 20			
Q	r		321 22 00	21 40	321 22 22	0 00 00	
⊕		5 44 48	12 36 10	35 40	12 26 35	51 04 11	
					— 2		
⊕	l	46 07	192 17 20	17 10			
Q			141 22 50	22 60			

und deshalb

$$\cos z_1 = \sin 52^0\,16' \sin 23^0\,26' + \cos 52^0\,16' \cos 23^0\,26' \cos 80^0\,05'$$
$$= 0{,}7909 \cdot 0{,}3977 + 0{,}6120 \cdot 0{,}9175 \cdot 0{,}1722 = 0{,}4109$$
$$z_1 = 65^0\,44'$$
$$\cos z_4 = 0{,}3142 + 0{,}562 \cdot 0{,}1415 = 0{,}3937$$
$$z_1 = 66^0\,49'.$$

(Diese Rechnungen sind zum Teil nur mit dem gewöhnlichen Rechenschieber gemacht.) Die Änderung von $(66^0\,49' - 65^0\,44') = 65'$ darf auf die zwischenliegenden Zeiten t_2 und t_3 proportional der Zeit verteilt werden, folglich wird $z_2 = 65^0\,58'$; $z_3 = 66^0\,37'$.

Vernachlässigt man die Änderungen dieser berechneten Zenitdistanzen infolge der Refraktion, so folgt aus Gleichung (6) die Verbesserung der beiden gemittelten Werte zu:

$$946'' \cdot \frac{\operatorname{ctg} 65^0\,51'}{\sin 65^0\,51'} \cdot \frac{65^0\,44' - 65^0\,58'}{3438'} = -1{,}8''$$

$$946'' \cdot \frac{\operatorname{ctg} 66^0\,43'}{\sin 66^0\,43'} \cdot \frac{37' - 49'}{3438'} = -1{,}6''.$$

Diese beiden Werte sind oben als Verbesserungen beigesetzt.

Für die beiden Mittel $5^h \frac{39^m\,00^s + 40^m\,30^s}{2} + 19{,}0^s = 5^h\,40^m\,04{,}0^s$ und $5^h\,45^m \frac{48^s + 07^s}{2} + 19{,}0^s = 5^h\,45^m\,46{,}5^s$ ergeben sich z. B. mit dem Nautical Almanac (die entsprechenden mittleren Greenwicher Zeiten sind um 1^h kleiner):

$$\mathfrak{Z}_1 = +1^m\,07{,}4^s \quad \text{und} \quad \mathfrak{Z}_2 = +1^m\,07{,}4^s$$
$$\delta_1 = +23^0\,26'\,16'' \;„ \qquad \delta_2 = +23^0\,26'\,17''$$

folglich werden die entsprechenden beiden Stundenwinkel

$t_1 = 5^h\,40^m\,04{,}0^s - 17^m\,52{,}0^s - 1^m\,07{,}4^s = 5^h\,21^m\,04{,}6^s = 80^0\,16'\,09''$

$t_2 = 5\;\;45\;\;46{,}5 - 17\;\;52{,}0 - 1\;\;07{,}4 = 5\;\;26\;\;47{,}1 = 81\;\;41\;\;46{,}5.$

Mit diesen Werten folgt nach Gleichung (1)

Nr.	1	2
$\sin\varphi$ $\cos t$	9.89 814 9.22 794	9.98 814 9.15 964
$\sin\varphi\cos t$	9.12 608	9.05 778
$\sin\varphi\cos t =$ $-\cos\varphi\,\mathrm{tg}\,\delta =$	0,133 684 −0,265 271	0,114 229 −0,265 271
Zähler =	−0,131 587	−0,151 042
$\cos\varphi\,\mathrm{tg}\,\delta$	9.42 369	9.42 370
$\cos\varphi$ $\mathrm{tg}\,\delta$	9.78 668 9.63 701	9.78 668 9.63 702
Zähler $E\sin t$	$9.11\;922_n$ 0.00 630	$9.17\;910_n$ 0.00 457
$\mathrm{ctg}\,a$	$9.12\;552_n$	$9.18\;367_n$
$a =$ $-\sphericalangle Q.Z.S =$	97° 36′ 17″ −49 59 41	98° 40′ 43″ −51 04 11
$A =$	47 36 36	47 36 32

$\underline{A} = 47^0\,36'\,34'' \pm 2''$
(vom Südpunkte aus gezählt).

19. Kapitel.

Messungen mit Sternen.

Um lichtschwache Sterne mit dem Theodolitfernrohre anzielen zu können, muß das Fadenkreuz bzw. Gesichtsfeld künstlich beleuchtet werden (vgl. § 126). Um häufige Zeitumwandlungen zu vermeiden, benutzt man zweckmäßig eine nach Sternzeit regulierte Beobachtungsuhr (die täglich gegen mittlere Zeit $3^m\,56^s$ vorgeht).

Alle bisher mit der Sonne behandelten Methoden bleiben im wesentlichen unverändert, nur werden sie etwas einfacher, weil bei allen Fixsternen die Parallaxe und Halbmesserkorrektion zu Null wird und weil sich die Deklination der Planeten und Fixsterne während der Beobachtung nur um sehr kleine Beträge (die meist zu vernachlässigen sind) ändern. Für die Zeitbestimmungen kommen nach § 133 hauptsächlich in der Nähe des Äquators stehende Sterne (Zeitsterne)

in Betracht, nach denen möglichst in der Richtung des ersten Vertikals die Zenitdistanzen gemessen werden. Um die von der Bewegungsrichtung des Sternes gegen das Fadenkreuz herrührenden persönlichen Auffassungsfehler des Sterndurchgangs im Mittel zu beseitigen, mißt man häufig die Zenitdistanzen nach einem im Osten und einem im Westen stehenden Stern.

Ein ausgezeichneter Stern am nördlichen Himmel ist der Polarstern (α Ursae minoris), weil er nur einen kleinen Polabstand ($1\frac{1}{5}^0$) besitzt und deshalb seine Lage wenig verändert. Dieser Stern wird deshalb in unseren Breiten häufig zu Azimutmessungen (trotz der dabei unvermeidlichen steilen Zielungen) und (behufs Erhöhung der Genauigkeit in Verbindung mit Südsternen) zu Breitenmessungen verwendet.

§ 138. **Breitenbestimmung mit dem Polstern.**

Durch die Zeitbestimmung aus einigen nach Zeitsternen vor (und, wenn nötig, auch nach) der eigentlichen Breitenmessung möglichst im Ost- und Westzweige des ersten Vertikals gemessenen Zenitdistanzen soll der Stand Δu der Beobachtungsuhr gegen die Ortssternzeit Θ bekannt sein. Kann der Uhrgang du vernachlässigt werden, dann ergibt sich weiterhin die der Uhrablesung u entsprechende Ortssternzeit durch

$$\Theta = u + \Delta u. \tag{1}$$

Verwendet man aber eine nahezu nach mittlerer Zeit regulierte Beobachtungsuhr, deren Stand gegen Ortssternzeit zur Uhrablesung u_1 zu Δu_1 und zur Uhrablesung u_2 zu Δu_2 ermittelt werde, so folgt die der Ablesung u entsprechende Ortssternzeit ebenfalls aus

$$\Theta = u + \Delta u,$$

wobei aber

$$\Delta u = \Delta u_1 + \frac{\Delta u_2 - \Delta u_1}{u_2 - u_1}(u - u_1) = \Delta u_1 + du\,(u - u_1). \tag{1'}$$

Für du nimmt man hier zweckmäßig den stündlichen Gang.

Bezeichnen α und δ die aus den astronomischen Jahrbüchern entnommene Rektaszension und Deklination des Polsternes zur Zeit der Zenitdistanzmessungen, so folgt zunächst der Stundenwinkel jeder einzelnen Messung aus (siehe § 128)

$$t = \Theta - \alpha. \tag{2}$$

In Fig. 193 stellt P den Pol, S den Polarstern, Z den Zenitpunkt

des Beobachtungsortes und z die nach dem Polarsterne gemessene Zenitdistanz vor. Der Polabstand des Sternes ist dann

$$p = 90^0 - \delta\,. \qquad (3)$$

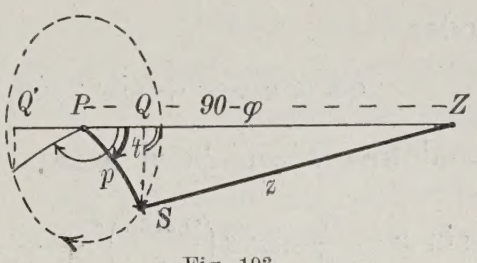


Fig. 193.

Fällt man von S aus auf die Seite $\widehat{P.Z}$ das sphärische Lot $\widehat{SQ}$, so folgt allgemein aus der Fig. 193

$$90^0 - \varphi = \widehat{Z.Q} + \widehat{Q.P} \quad \text{oder} \quad \varphi = 90^0 - \widehat{Z.Q} - \widehat{Q.P}. \qquad (4)$$

Außerdem ist:

$$\left.\begin{aligned} \sin t &= \frac{\sin \widehat{Q.S}}{\sin p} \quad \text{oder} \quad \sin \widehat{Q.S} = \sin p \cdot \sin t \\ \cos t &= \frac{\operatorname{tg} \widehat{P.Q}}{\operatorname{tg} p} \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg} \widehat{P.Q} = \operatorname{tg} p \cos t \\ \cos z &= \cos \widehat{Q.Z} \cos \widehat{Q.S} \quad \text{oder} \quad \cos \widehat{Q.Z} = \frac{\cos z}{\cos \widehat{QS}} \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Die scharfe Lösung mit den Gleichungen (5) ist nicht bequem, weil teilweise mit vielstelligen Logarithmen gerechnet werden muß. Man erhält durch Reihenentwicklungen bequemere Lösungen.

Wenn der Zenitpunkt Z vom Pole um einen größeren Betrag absteht, dann unterscheiden sich $\widehat{Z.S}$ und $\widehat{Z.Q}$ nur wenig. Setzt man deshalb

$$\widehat{Z.Q} = \widehat{Z.S} - x = z - x, \qquad (6)$$

so wird aus der letzten Gleichung von (5)

$$\cos (z - x) = \frac{\cos z}{\cos \widehat{Q.S}} \qquad (7)$$

und da $\widehat{Q.S}$ stets klein (höchstens $1\frac{1}{5}^0$), so konvergiert die entsprechende Reihe im Nenner sehr stark. Setzt man noch sehr genähert nach (5)

$$\left.\begin{aligned} \widehat{Q.S}'' &= p'' \cdot \sin t \\ \widehat{P.Q}'' &= p'' \cdot \cos t \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

so folgt aus (7)

$$\cos (z - x) = \cos z \left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{p \sin t}{\varrho}\right)^2 + \cdots\right\}$$

oder

$$\cos z \cos x + \sin z \sin x = \cos z + \frac{1}{2} \cos z \left(\frac{p \sin t}{\varrho}\right)^2 + \cdots$$

und hier hinreichend genau

$$\sin x = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} z \left(\frac{p \sin t}{\varrho}\right)^2 + \cdots \quad \text{oder} \quad x'' = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} z \frac{(p \sin t)^2}{\varrho''} + \cdots \tag{9}$$

Setzt man (6), (8) und (9) in Gleichung (4) ein, so wird

$$\varphi = 90^0 - \left\{ z + p'' \cos t - \operatorname{ctg} z \frac{p''^2}{2\varrho''} \sin^2 t \right\}. \tag{10}$$

Im letzten Gliede kann an Stelle des veränderlichen z auch φ und t eingeführt werden. Die vernachlässigten Glieder höherer Ordnung betragen in Deutschland höchstens etwa $\frac{3}{4}''$.

Die günstigste Zeit zur Messung ist die obere oder untere Kulmination des Polarsternes, weil hierbei größere Zeitfehler nur verschwindend kleine Breitenfehler verursachen; doch ist der Polarstern auch auf jedem Punkte seiner Bahn brauchbar.

Bei scharfen Breitenmessungen kombiniert man Zenitdistanzmessungen nach dem Polstern mit gleichviel solchen Messungen nach Zeitsternen in nahezu gleichen Zenitdistanzen (Zirkummeridianzenitdistanzen). Hat man dann aus den nach einem Sterne mit der Deklination δ_1 gemessenen Zirkummeridianzenitdistanzen (nach § 132) die auf den Meridian bezogene Zenitdistanz z_1 berechnet, so ist nach § 132

$$\varphi = \delta_1 + z_1. \tag{11}$$

Man sieht sogleich aus Gleichung (10) und (11), daß im Mittel aus zwei solchen Messungen die Breite richtig erhalten wird, wenn sowohl z, als auch z_1 um dieselbe konstante Größe falsch gemessen sind. Bei verschieden großen Zenitdistanzen z biegt sich z. B. das Zielfernrohr gegen den Vertikalkreis verschieden stark durch (angenähert entsprechend $b \sin z$, worin b die Biegungskonstante), so daß die Zenitdistanz jeweils um den Betrag $b \sin z$ falsch gefunden wird. Ist aber $z \approx z_1$, so hebt sich der Biegungseinfluß aus dem Mittel zwischen (10) und (11) fort. Zweckmäßig kombiniert man je drei bis vier Zenitdistanzmessungen in Fernrohrlage Ost und West nach dem Polstern mit ebensovielen Messungen nach einem in etwa gleicher Höhe kulminierenden Zeitsterne. Zur Eliminierung der Kreisteilungsfehler verdreht man nach der Messung jedes solchen Satzes den Höhenkreis annähernd um $\frac{180^0}{n}$ (n = Anzahl der Sätze).

Da das scharfe Einspielenlassen feiner Höhenlibellen viel Zeit in Anspruch nimmt, so liest man in der Regel den Stand der Blasenenden ab und korrigiert jede Kreisablesung um den dem Libellenausschlage entsprechenden Winkel.

Die Berechnung des Hauptgliedes $p'' \cos t$ in Gleichung (10) führt man etwa fünfstellig logarithmisch, die des zweiten Gliedes etwa vierstellig oder auch mit dem Rechenschieber aus. In den mehrfach erwähnten „Formeln und Hilfstafeln für geographische Ortsbestimmungen" von Albrecht und von Ambronn-Domke sind für die Reduktion auf den Meridian bzw. auf den Pol dienende Zahlentafeln enthalten.

§ 139. Zahlenbeispiel.

Mit einem Universalinstrument (ähnlich Fig. 56) mit exzentrischem Fernrohr, Kreisen von 16 cm Durchmesser und Schraubenmikroskopablesung auf 1″ sowie mit einem ungefähr nach mittlerer Zeit gehenden Taschenchronometer wurden am 7. September 1908, nachmittags, in Braunschweig ($\varphi \approx 52^0\,16'\,32''$) die folgenden Messungen gemacht. Der Teilwert der Höhenlibelle betrug $p' = 12{,}2''$ (er wäre zweckmäßig nur etwa 5″ groß) die Bezifferung der Libellenteilung vom in der Mitte angenommenen Nullpunkte aus ist so angebracht, daß einem negativen Stande der Blasenmitte eine Verkleinerung der Höhenkreisablesung um $\frac{l'+r'}{2} \cdot p'$ entspricht (l' und r' = Ablesungen am linken und rechten Blasenende). Die Lage des Zenitpunktes am Höhenkreise wurde mit einem terrestrischen Zielpunkte (genähert) bestimmt zu $Z_0 = 359^0\,29'\,32''$.

A. Zeitbestimmung.

Ziel: α Bootis (West).

Uhrablesung u (rohe M. E. Z.)	Fernrohrlage	Höhenkreis Zeiger A	Höhenkreis Zeig. B	Mittel	Libelle links −	Libelle rechts +	Verb. $\frac{l'+r'}{2} \cdot p'$	Bemerkungen
$7^h\,39^m\,56{,}8^s$	l	$300^0\,41'\,47''$	$41'\,58''$	$300^0\,41'\,52''$	8,0	7,5	− 3″	$t = +14{,}9^0$ C
43 00,8	l	300 13 54	14 04	300 13 59	8,1	7,3	− 5	$B_0 = 755{,}6$ mm
46 36,4	r	59 18 12	17 46	59 17 59	7,4	8,0	+ 4	
51 02,6	r	59 58 45	58 14	59 58 30	7,5	8,0	+ 3	

Die gemessenen Zenitdistanzen folgen deshalb zu

$$359^0\,29'\,32'' - 300^0\,41'\,49'' = 58^0\,47'\,43''; \quad 59^0\,15'\,38'';$$

$$59^0\,17'\,63'' - 359^0\,29'\,32'' = 59^0\,48'\,31''; \quad 60^0\,29'\,01''.$$

Mit den „Astronomisch geodätischen Hilfstafeln" z. B. von Ambronn-

Domke ergeben sich die zugehörigen Refraktionen zu: 1′33,6″; 1′35,3″; 1′ 37,5″; 1′ 40,1″, so daß die reduzierten Zenitdistanzen z werden:

$$58^0\,49'\,16{,}6''; \quad 59^0\,17'\,13{,}3''; \quad 59^0\,50'\,08{,}5''; \quad 60^0\,30'\,41{,}1''.$$

Aus dem Berliner Astronomischen Jahrbuche für 1908 entnimmt man für α Bootis am 7. September die scheinbaren Örter:

$$\alpha = 14^h\,11^m\,27{,}9^s; \quad \delta = +\,19^0\,39'\,44{,}7'',$$

so daß sich nach § 133 folgende Rechnung ergibt:

Nr.	1	2	3	4
$\varphi =$	52° 16′ 32″	52° 16′ 32″	52° 16′ 32″	52° 16′ 32″
$\delta =$	19 39 45	19 39 45	19 39 45	19 39 45
$z =$	58 49 17	59 17 13	59 50 08	60 30 41
$2s =$	130 45 34	131 13 30	131 46 25	132 26 58
$s =$	65 22 47	65 36 45	65 53 12,5	66 13 29
$s - \varphi =$	13 06 15	13 20 13	13 36 40,5	13 56 57
$s - \delta =$	45 43 02	45 57 00	46 13 27,5	46 33 44
$s - z =$	6 33 30	6 19 32	6 03 04,5	5 42 48
$\sin(s-\varphi)$	9.35 550	9.36 300	9.37 168	9.38 212
$\sin(s-\delta)$	9.85 485	9.85 657	9.85 857	9.86 101
$E\cos s$	0.38 028	0.38 415	0.38 877	0.39 453
$E\cos(s-z)$	0.00 285	0.00 265	0.00 243	0.00 217
$\mathrm{tg}^2\frac{t}{2}$	9.59 348	9.60 637	9.62 145	9.63 983
$\mathrm{tg}\frac{t}{2}$	9.79 674	9.80 318	9.81 072	9.81 991
$\frac{t}{2} =$	32° 03′ 24″	32° 26′ 24″	32° 53′ 30″	33° 26′ 49″
$t^0 =$	64 06 48	64 52 48	65 47 00	66 53 38
$t^h =$	$4^h\,16^m\,27{,}2^s$	$4^h\,19^m\,31{,}2^s$	$4^h\,23^m\,08{,}0^s$	$4^h\,27^m\,34{,}5^s$
$\alpha =$	14 11 27,9	14 11 27,9	14 11 27,9	14 11 27,9
$t+\alpha=\Theta =$	$18^h\,27^m\,55{,}1^s$	$18^h\,30^m\,59{,}1^s$	$18^h\,34^m\,35{,}9^s$	$18^h\,39^m\,02{,}4^s$
$u =$	7 39 56,8	7 43 00,8	7 46 36,4	7 51 02,6
$\Delta u =$	$+\,10^h\,47^m\,58{,}3^s$	$+\,10^h\,47^m\,58{,}3^s$	$+\,10^h\,47^m\,59{,}5^s$	$+\,10^h\,47^m\,59{,}8^s$

$$\Delta u_1 = +\,10^h\,47^m\,59{,}0^s$$

$$\text{um } u_1 = 7^h\,40^m \frac{-3{,}2+180{,}8+396{,}4+662{,}6}{4} = 7^h\,45^m\,09{,}1^s$$

Bei einer zweiten Berechnung wurden die obigen vier reduzierten Zenitdistanzen zu dem Mittelwert $\underline{z} = 59^0\,36'\,49{,}9''$ vereinigt, wobei die Unsicherheit in Z_0 eliminiert ist. Das entsprechende Mittel der

Uhrablesung ist $u_1 = 7^h 45^m 09{,}1^s$. Durch dieselbe Rechnung wie vorher (aber sechsstellig) folgt $\underline{t} = 4^h 21^m 40{,}1^s$, demnach $\underline{\Theta_1} = \underline{t} + \alpha = 18^h 33^m 08{,}0^s$ und $\Delta u_1 = \underline{\Theta_1} - u_1 = +10^h 47^m 58{,}9^s$, also dasselbe wie bei der Rechnung aus den Einzelwerten. Nach Beendigung der Breitenmessung (4 Sätze) wurde in derselben Weise mit α Tauri (Ost) gefunden zur Uhrablesung $u_2 = 14^h 06^m 26{,}4^s$; $\Theta_2 = 0^h 55^m 31{,}4^s$ also $\Delta u_2 = +10^h 49^m 05{,}0^s$. Trägt man in ein Koordinatensystem u_1 und u_2 als Abszissen, die zugehörigen Δu_1 und Δu_2 (nach Abspaltung eines konstanten Teiles von $10^h 48^m 0^s$) als Ordinaten auf, und verbindet diese beiden Punkte durch eine gerade Linie, so kann auch damit für jede beliebige Uhrablesung u (zwischen u_1 und u_2) sogleich die zugehörige Verbesserung Δu nach Gleichung (1′) (§ 138) abgelesen werden, so daß weiterhin wird $\Theta = u + \Delta u$.

B. Zur Bestimmung der Breite wurden zwischen den beiden Zeitbestimmungen 4 Sätze Zenitdistanzen nach dem Polstern und nach nahezu in gleicher Höhe kulminierenden Südsternen gemessen; bei einem wurden folgende Zahlen erhalten. (Siehe Seite 342.)

Man findet damit in tabellarischer Ordnung die einzelnen Zenitdistanzen durch $z' = r - Z_0 \overset{\text{od.}}{=} Z_0 - l$, denen die entsprechenden Refraktionen beigeschrieben sind.

Nr.	z'	Refraktion	Reduktion x auf den Meridian	z reduz.	Mittel	Polhöhe φ
1	43° 41′ 54″	+ 54,7″	− 246,4″	43° 38′ 42,3″		$\delta + z =$
2	43 39 13	+ 54,7	− 75,6	52,1		
3	43 38 10	+ 54,7	− 15,6	49,1	43° 38′ 42,6″	52° 16′ 24,9″
4	43 37 57	+ 54,7	− 15,0	36,7		
5	43 39 28	+ 54,8	− 105,1	37,7		
6	43 41 12	+ 54,8	− 211,0	35,8		

Nr.	z'	Refraktion	Reduktion auf den Pol	z reduz.	Mittel	Polhöhe φ
1	37° 27′ 44″	+ 43,9″	+ 917,8″	37° 43′ 45,7″		$90^0 - z =$
2	37 26 35	+ 43,9	+ 986,6	45,5		
3	37 25 35	+ 43,9	+ 1056,2	55,1	37° 43′ 35,8″	52° 16′ 24,2″
4	37 23 48	+ 43,8	+ 1138,1	29,9		
5	37 22 21	+ 43,8	+ 1215,7	20,5		
6	37 21 27	+ 43,8	+ 1267,5	18,3		

Zur Berechnung der Reduktion auf den Meridian beziehungsweise auf den Pol (nach Gleichung (7), § 132 und Gleichung (10), § 138) braucht man die Stundenwinkel $t = \Theta - \alpha$ für die einzelnen Zielungen.

Zielpunkt: α Aquilae ($\alpha = 19^h\,46^m\,19{,}6^s$; $\delta = +8^0\,37'\,42{,}3''$). $Z_0 = 359^0\,29'\,32''$ (genähert).

Fernrohrlage	Uhrablesung u	Zeiger A	Zeiger B	Mittel	Libelle −	Libelle +	Verb.	Bemerkungen	$\Delta u = 10^h\,48^m +$ / $\Delta' u$	$t' = u - (\alpha - 10^h\,48^m)$	$t = t' + \Delta' u$
r	$8^h\,46^m\,12{,}2^s$	$43^0\,12'\,00''$	$11'\,16''$	$43^0\,11'\,38''$	8,9	7,0	$-12''$	$t = +13{,}8^0$	$+\ 9{,}5^s$	$-\ 12^m\ 07{,}4^s$	$-\ 717{,}9^s$
	51 31,8	09 14	08 31	08 52	8,5	7,3	− 7		+ 10,2	− 6 47,8	− 397,6
	55 08,2	08 14	07 31	07 52	8,7	7,1	−10	$B_0 = 755{,}5$ mm	+ 11,1	− 3 11,4	− 180,3
l	9 01 04,6	315 51 48	50 59	315 51 24	7,0	8,8	+11		+ 12,1	+ 2 45,0	+ 177,1
	05 55,6	50 17	49 35	49 54	7,1	8,8	+10		+ 12,8	+ 7 36,0	+ 468,8
	09 10,4	48 28	47 50	48 09	7,1	8,9	+11	$t = +12{,}0^0$	+ 13,6	+ 10 50,8	+ 664,4

Zielpunkt: α Ursae minoris ($\alpha = 1^h\,26^m\,58{,}3^s$; $\delta = +88^0\,48'\,51{,}5''$).

Fernrohrlage	Uhrablesung u	Zeiger A	Zeiger B	Mittel	Libelle −	Libelle +	Verb.	Bemerkungen	$\Delta u = 10^h\,48^m +$ / $\Delta' u$	$t' = u - (\alpha - 10^h\,48^m)$	$t = t' + \Delta' u$
r	$9^h\,31^m\,21{,}4^s$	$36^0\,57'\,22''$	$56'\,47''$	$36^0\,57'\,04''$	7,1	9,0	$+12''$	$t = +12{,}0^0$	$+\ 17{,}2^s$	$-\ 5^h\ 07^m\ 36{,}9^s$	$-5^h\,07^m\,19{,}7^s$
	35 07,4	56 08	55 42	55 55	7,1	9,0	+12		+ 17,9	− 5 03 50,9	−5 03 33,0
	38 57,0	55 01	54 49	54 55	7,1	9,0	+12	$B_0 = 755{,}4$ mm	+ 18,7	− 5 00 01,3	−4 59 42,6
l	43 28,2	322 05 41	05 43	322 05 41	7,8	8,3	+ 3		+ 19,6	− 4 55 30,1	−4 55 10,5
	44 47,4	07 18	06 59	07 08	7,8	8,3	+ 3		+ 20,1	− 4 51 10,9	−4 50 50,8
	50 40,0	08 15	07 49	08 02	7,8	8,3	+ 3	$t = +12{,}0^0$	+ 20,7	− 4 48 18,3	−4 47 57,6

Es ist jeweils $\Theta = u + \Delta u$ und folglich $t = u + \Delta u - \alpha$. Da hier Δu groß ist, so spaltet man einen konstanten Teil, etwa $10^h 48^m 00^s$ ab, setzt also $\Delta u = 10^h 48^m + \Delta' u$ und schreibt: $t = u - (\alpha - 10^h 48^m) + \Delta' u$. Die einzelnen $\Delta' u$, $t' = u - (\alpha + 10^h 48^m)$ und $t = t' + \Delta' u$ sind den einzelnen Beobachtungen auf Seite 342 beigeschrieben.

Demnach ist:

$$x'' = [6.7367 - 10] \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin(\varphi - \delta)} (t^s)^2 = [6.6795 - 10] (t^s)^2.$$

Mit dieser Gleichung sind die einzelnen Werte x'' mit vierstelligen Logarithmen berechnet.

Die Reduktion auf den Pol ist nach Gleichung (10) § 138

$$p'' \cos t - \operatorname{ctg} z \frac{p''^2}{2\varrho''} \sin^2 t = 4268{,}5'' \cos t - \frac{4268{,}5^2}{412530} \operatorname{ctg} z \sin^2 t.$$

Rechnet man die einzelnen Stundenwinkel t ins Gradmaß um, so folgt:

t	$p \cos t$	2. Glied
$-$ 76° 49′ 55″	+ 972,4″	− 54,6″
− 75 53 15	+ 1040,8	− 54,2
− 74 55 39	+ 1110,0	− 53,8
− 73 47 37	+ 1191,3	− 53,2
− 72 42 42	+ 1268,5	− 52,8
− 71 59 24	+ 1319,7	− 52,2

Die Glieder $p \cos t$ sind fünfstellig logarithmisch, das zweite Glied mit

$z = (37° 28{,}5′ \text{ bis } 37° 22{,}2′)$ zu $(57{,}61″ \text{ bis } 57{,}94″) \sin^2 t$

mit dem gewöhnlichen Rechenschieber und einer Tafel der natürlichen Zahlen der sin der Winkel t berechnet.

Das Ergebnis der Messung dieses Satzes ist nach den Angaben auf Seite 341

$$\varphi = 52° 16′ \frac{24{,}9″ + 24{,}2″}{2} = 52° 16′ 24{,}6″.$$

Das Mittel aus 12 solchen an verschiedenen Tagen (von Assistent Biersack) gemessenen Sätzen gibt $52° 16′ 27{,}6″ \pm 0{,}8″$.

§ 140. Azimutmessung mit dem Polstern.

Man mißt meist bei Beginn der Morgen- und Abenddämmerung in beiden Fernrohrlagen gleich oft den Winkel zwischen der Richtung nach einem terrestrischen Zielpunkt und dem Polstern und bestimmt mit der Kippachsenlibelle bei jeder Anzielung des Polsternes die

Kippachsenneigung. Die Ortssternzeit der einzelnen Zielungen nach dem Polarsterne wird durch die entsprechenden Uhrablesungen gefunden. Die Breite φ des Theodolitstandortes wird als bekannt vorausgesetzt. Ist die Beobachtungsuhr leidlich zuverlässig, so daß damit die Stundenwinkel auf etwa 1^s richtig erhalten werden, dann kann der Polarstern in beliebigen Punkten seiner Bahn beobachtet werden, im gegenteiligen Falle beobachtet man ihn in seinen Digressionen (östlich oder westlich). (Der Zeitfehler dt verursacht im Maximum den Azimutfehler da, wenn der Polarstern in oberer oder unterer Kulmination steht. Bei einem Polabstande p und in der Breite φ wird hierbei, wie sich aus dem Dreieck Pol-Zenit-Stern leicht ergibt, $da'' = \frac{p'' \cdot 15\, dt^s}{\varrho'' \cos(\varphi \pm p)}$ und für $p \approx 71'$ und $\varphi = 52^0$ wird $da'' = 0{,}5\, dt^s$.)

Um die von der Bewegungsrichtung des Sternes herrührenden Fehler im Mittel unschädlich zu machen, sollte der Stern in diametralen Stellen seiner Bahn zur Messung benutzt werden.

Ist u die Uhrablesung beim Anzielen des Polarsternes, Δu die entsprechende Verbesserung um die Ortssternzeit Θ zu finden, und sind α, δ die Koordinaten des Polarsternes, so wird:

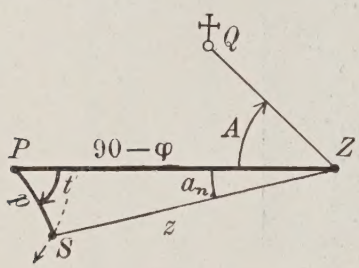


Fig. 194.

$$\Theta = u + \Delta u \tag{1}$$

$$t = \Theta - \alpha \tag{2}$$

$$p = 90^0 - \delta. \tag{3}$$

Das vom Nordpunkte aus gezählte Azimut a_n der nach dem Polarsterne S gehenden Richtung folgt aus dem sphärischen Dreiecke $P.Z.S$ der Fig. 194 durch den ctg-Satz:

$$\operatorname{ctg} p \sin(90^0 - \varphi) = \cos(90^0 - \varphi) \cos t + \sin t \operatorname{ctg} a_n$$

oder

$$\operatorname{tg} a_n = \frac{\sin t}{\operatorname{ctg} p \cos\varphi - \sin\varphi \cos t} = \frac{\operatorname{tg} p \sec\varphi \cdot \sin t}{1 - \operatorname{tg} p \operatorname{tg}\varphi \cos t}. \tag{4}$$

Die Gleichung (4) rechnet man fünf- bis sechsstellig logarithmisch; durch Benutzung der Albrechtschen Tafeln (§ 130) kann für das Argument $\log a = \log(\operatorname{tg} p \operatorname{tg}\varphi \cos t)$ sogleich $\log \frac{1}{1-a}$ gefunden werden.

Zählt man a_n vom Nordpunkte aus nach Osten positiv und nach Westen negativ, so ist in Gleichung (4) rechts noch ein negatives Vorzeichen beizufügen.

Sind a_q' und a_*' die nach Anzielen von Q und S gemachten,

aber wegen der Theodolitachsenfehlereinflüsse berichtigten Horizontalkreisablesungen, so folgt nach Fig. 194

$$A = a_n + a_q' - a_*'. \tag{5}$$

Das Azimut a_n muß wegen der täglichen Aberration des Lichtstrahles noch um die kleine Größe

$$+ 0{,}32'' \frac{\cos \varphi \cos a_n}{\sin z} \tag{6}$$

verbessert werden.

Ist die Kippachse um den jeweils mit der Achslibelle gemessenen Winkel i geneigt (+, wenn das rechte Ende zu hoch) und besitzt die Ziellinie den Fehler $+ c$ (+, wenn der Winkel zwischen dem linken Kippachsenende und der Zielrichtung $> 90^0$), so folgt nach § 25, Gleichung (6) die Verbesserung der Horizontalkreisablesung, wenn die Zielung unter der Zenitdistanz z erfolgt, zu

$$- i \operatorname{ctg} z + \frac{c}{\sin z}.$$

Sind z_* und z die Zenitdistanzen der Zielungen nach dem Sterne und nach dem irdischen Zielpunkte Q, a_q und a_* die wegen der Achsenfehlereinflüsse nicht verbesserten Kreisablesungen, so folgt für die eine Fernrohrlage aus (5):

$$A = a_{n.1} + a_{q.1} - a_{*.1} - i_1' \operatorname{ctg} z + i_1 \operatorname{ctg} z_{*.1} + \frac{c}{\sin z} - \frac{c}{\sin z_{*.1}}. \tag{7}$$

Durch das Durchschlagen des Fernrohres und Messen in der zweiten Fernrohrlage wird:

$$A = a_{n.2} + a_{q.2} - a_{*.2} - i_2' \operatorname{ctg} z + i_2 \operatorname{ctg} z_{*.2} - \frac{c}{\sin z} - \frac{c}{\sin z_{*.2}}. \tag{8}$$

Mittelt man die beiden Gleichungen (7) und (8) und berücksichtigt, daß die Zenitdistanz nach dem irdischen Objekte meist nahezu 90^0 beträgt und daß fernerhin die beiden Zenitdistanzen nach dem Sterne, wenn beide Messungen unmittelbar aufeinanderfolgen, gleich groß genommen werden dürfen, so wird:

$$A = \frac{a_{n.1} + a_{n.2}}{2} + \frac{a_{q.1} + a_{q.2}}{2} - \frac{a_{*.1} + a_{*.2}}{2} + \frac{i_1 + i_2}{2} \operatorname{ctg} z_*. \tag{9}$$

Die Messung der beiden Winkel i_1 und i_2 erfolgt nach § 17 mit der Kippachsenlibelle; z_* liest man am einfachsten am Höhenkreise (roh) ab.

Bei der Messung wird deshalb zweckmäßig in folgender Weise verfahren: Anzielen von Q, Ablesen $a_{q.1}$, Anzielen von S (sind zwei

sehr nahe beieinanderstehende Vertikalfäden vorhanden, so wird der Stern zweckmäßig mit beiden Fäden angezielt und es werden die beiden entsprechenden Uhr- und Kreisablesungen gemacht), Ablesen u_1, a_{*1} und Nivellieren der Kippachse; nach Durchschlagen des Fernrohres: Anzielen von S, Ablesen u_2, a_{*2} und Nivellieren der Kippachse, Anzielen von Q, Ablesen von a_{q2}.

Nach der Messung eines solchen Satzes wird der Horizontalkreis um $\frac{180^0}{s}$ (s = Anzahl der Sätze) verdreht usw.

$\frac{a_{n1} + a_{n2}}{2}$ berechnet man mit Gleichung (4) meist hinreichend genau sogleich für den gemittelten Stundenwinkel, der der gemittelten Uhrablesung $\frac{u_1 + u_2}{2}$ entspricht.

§ 141. Zahlenbeispiel.

Die folgenden Messungen wurden am 28. September 1907 Nm. auf einem Punkte mit $\varphi = 52^0\,16'\,25''$ mit dem in § 139 benutzten, nahezu berichtigten Theodoliten mit einfachem Fadenkreuz und mit einer nach Sternzeit gehenden Taschenuhr gemacht, für die gefunden wurde $\Theta = u + 8^m\,00{,}0^s$. Die Kippachsenlibelle hat den (zu großen) Teilwert 16,3″, ihre Füße sind nach 90° ausgeschnitten, so daß, wenn l_1 und r_1, bzw. l_2 und r_2 die Ablesungen an den Blasenenden nach Anzielen des Sternes vorstellen (l Ablesung des links von der Zielrichtung liegenden Blasenendes; die Ablesungen rechts vom Nullpunkte + gezählt) nach § 17 ist:

$$i'' = \frac{16{,}3}{4}(l_1 + r_1 + l_2 + r_2).$$

Der Zenitpunkt am Höhenkreis wurde annähernd auf $Z_0 = 0^0\,0'$ gestellt.

Fernrohrlage	Zielpunkt	Uhrablesung u	Horizontalkreis Zeiger 1	Horizontalkreis Zeig. 2	Mittel	Gesamtmittel	$Z_0 = 0$ Höhenkreis	Achslibelle l —	Achslibelle r +	Neigung i
l	Q=Rathaus		203°15′44″	13′04″	203°14′24″	203°13′28″	359°12′	7,4	7,6	+6″
	Polarstern	$17^h46^m36{,}0^s$	9 33 09	30 38	9 31 54	9 31 07	321 50	6,9	8,2	
r	Polarstern	17 53 08,8	189 31 42	29 00	189 30 20			6,8	8,3	+15″
	Rathaus		23 13 49	11 15	23 12 32			6,5	8,6	

Aus einem astronomischen Jahrbuche, z. B. dem Nautical Almanac für 1907 entnimmt man $\alpha = 1^h\,26^m\,51{,}1^s$; $\delta = +\,88^0\,48'\,39{,}0''$.

Die gemittelte Uhrablesung des Sterndurchganges ist $u = 17^h 49^m 52{,}4^s$ und demnach die entsprechende Ortssternzeit $\Theta = 17^h 57^m 52{,}4^s$; folglich $t = \Theta - \alpha = 16^h 31^m 01{,}3^s = 247^0 45' 19{,}5''$ und $p = 1^0 11' 21{,}0''$.

$\operatorname{tg} p$	8.31 7182	$\operatorname{tg} p$	8.31 7182
$E \cos \varphi$	0.21 3325	$\operatorname{tg} \varphi$	0.11 1470
$\sin t$	$9.96\ 6413_n$	$\cos t$	$9.57\ 8136_n$
	$8.49\ 6920_n$		$8.00\ 6788_n$
$1 - \operatorname{tg} p \operatorname{tg} \varphi \cos t$	0.00 4389		$-$ 0.010 1575
$-\operatorname{tg} a_n$	$8.49\ 2531_n$	$1 - \operatorname{tg} p \operatorname{tg} \varphi \cos t = 1{,}010\ 1575$	

$$a_n = + 1^0 46' 49{,}4''$$

$$+ \text{Aberration} + 0{,}4'' \quad \left(= + 0{,}32'' \frac{0{,}791 \cdot 1{,}000}{0{,}618}\right)$$

$$+ a_q = 203^0 13' 28''$$

$$+ i \operatorname{ctg} z = + 13{,}3'' \quad \left(= \frac{6'' + 15''}{2} \cdot 1{,}272\right)$$

$$205^0 00' 31{,}1''$$

$$- a_* = - 9\ 31\ 07$$

$$A = 195^0 29' 24{,}1''$$

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Mathematisch-physikalische Schriften für Ingenieure und Studierende

Herausgegeben von E. Jahnke.

In Bänden zu 6—8 Bogen. 8. Steif geheftet und gebunden.

Die Sammlung setzt sich zum Ziel, kurze Darstellungen zu bieten, welche für ein engbegrenztes Gebiet die mathematischen Methoden einfach und leichtfaßlich ableiten und deren Verwendbarkeit in den einzelnen Teilen von Physik und Technik aufdecken. Dabei ist Vollständigkeit der Beweisführung nicht erstrebt, vielmehr wird besonderer Wert darauf gelegt, Dinge, die für die Anwendungen von Wichtigkeit sind, nicht zugunsten wissenschaftlicher Strenge zurücktreten zu lassen. Die Darstellung der einzelnen Gebiete ist so gehalten, daß jede ein abgeschlossenes Ganzes für sich bildet.

I. Einführung in die Theorie des Magnetismus. Von Dr. R. Gans, Professor an der Universität Tübingen. Mit 40 Figuren. [VI u. 110 S.] 1908. Steif geh. M. 2.40, in Leinwand geb. M. 2.80.

II. Elektromagnetische Ausgleichsvorgänge in Freileitungen und Kabeln. Von K. W. Wagner, Ingenieur in Charlottenburg. Mit 23 Figuren. [IV u. 109 S.] 1908. Steif geh. M. 2.40, in Leinwand geb. M. 2.80.

III. Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität und des Magnetismus. Von Dr. Cl. Schaefer, Privatdozent an der Universität Breslau. Mit Bildnis J. C. Maxwells und 32 Figuren. [VIII u. 174 S.] 1908. Steif geh. M. 3.40, in Leinwand geb. M. 3.80.

IV. Die Theorie der Besselschen Funktionen. Von Dr. P. Schafheitlin, Professor am Sophien-Realgymnasium zu Berlin. Mit 1 Figurentafel. [V u. 129 S.] 1908. Steif geh. M. 2.80, in Leinwand geb. M. 3.20.

V. Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. Von Dr. E. Jahnke, Professor an der Kgl. Bergakademie zu Berlin, und F. Emde, Ingenieur in Berlin. Mit 53 Figuren. [XII u. 176 S.] gr. 8. 1909. In Leinwand geb. M. 6.—

VI. 1 u. 2. Die Vektoranalysis und ihre Anwendung in der theoretischen Physik. Von Dr. W. v. Ignatowski in Berlin. In 2 Teilen.

I. Teil. Die Vektoranalysis. Mit 27 Figuren. [VIII u. 112 S.] 1909. Steif geh. M. 2.60, in Leinwand geb. M. 3.—

II. — Anwendung der Vektoranalysis in der theoretischen Physik. Mit 14 Figuren. [IV u. 123 S.] 1910. Steif geh. M. 2.60, in Leinwand geb. M. 3.—

VII. Theorie der Kräftepläne. Von Dr. H. E. Timerding, Professor an der Technischen Hochschule zu Braunschweig. Mit 46 Figuren. [VI u. 99 S.] 1910. Steif geh. M. 2.60, in Leinwand geb. M. 3.—

VIII. Mathematische Theorie der astronomischen Finsternisse. Von Dr. P. Schwahn, Direktor der Gesellschaft und Sternwarte „Urania" in Berlin. Mit 20 Fig. [VI u. 128 S.] 8. 1910. Steif geh. M. 3.20, in Leinwand geb. M. 3.60.

IX. Die Determinanten. Von Geh. Hofrat Dr. E. Netto, Professor an der Universität Gießen. [VI u. 130 S.] 8. 1910. Steif geh. M. 3.20, in Leinwand geb. M. 3.60.

X. 1. Einführung in die kinetische Theorie der Gase. Von Dr. A. Byk, Privatdozent an der Universität und der Technischen Hochschule in Berlin. 2 Teile. I. Teil: Die idealen Gase. Mit 14 Figuren. [V u. 102 S.] 1910. Steif geh. M. 2.80, in Leinwand geb. M. 3.20.

XI. 1. Grundzüge der mathematisch-physikalischen Akustik. Von Dr. A. Kalähne, Professor an der Technischen Hochschule in Danzig. 2 Teile.

I. Teil: [VII u. 144 S.] 1910. Steif geh. M. 3.20, in Leinwand geb. M. 3.60.

In Vorbereitung befinden sich zunächst folgende weitere Bändchen:

Debye, die Randwertaufgaben i. d. theor. Physik.
Galle, die mathematischen Instrumente.
Gans, Potentialtheorie.
Goldhammer, Dispersion und Absorption des Lichtes.
Grübler, Getriebelehre.
Grüneisen, Schwingungsprobleme.
v. Karman, Festigkeitsprobleme der modernen Maschinentechnik.
Krause-Naetsch, Theorie d. ellipt. Funktionen.
Krüger, Thermoelektrizität.
Lewent, konforme Abbildung.
Lichtenstein, über Berechnung spezieller elektrischer und magnetischer Felder. (2 Teile.)
Marcolongo, Einführung in die Elastizitätstheorie. (2 Teile.)
Matschoß, aus der Berufsgeschichte des Ingenieurs an Hand seiner Werke.
v. Mises, technische Hydromechanik. (2 Teile.)
Möller, Grundlagen der Zeit- und Ortsbestimmungen.
Orlich, die Grundlagen der Wechselstromtechnik.
Rogowski, die Streuung des Transformators.
Rothe, die Fourierschen Reihen.
— die partiellen Differentialgleichungen.
Rüdenberg, elektromagn. Schwingungen.
Rümelin, Theorie der Ionisation der Gase. (2 Teile.)
Schering, Seismik.
Sumec, die Wechselstrommotoren.
Timpe, ausgewählte Spannungsprobleme des Bauingenieurs.
Valentiner, Temperaturmessungen.

Die Sammlung wird fortgesetzt.

Geodäsie und Geophysik, unter Mitwirkung von R. Bourgeois, G. H. Darwin, F. Exner, S. Finsterwalder, F. R. Helmert, S. Hough, H. Meldau, J. M. Pernter, P. Pizzetti, C. Reinhertz †, A. Schmidt, W. Trabert, redigiert von Ph. Furtwängler und E. Wiechert. A. u. d. T.: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Band VI, 1. In 2 Teilbänden. Man verlange Prospekt!

Baule, Dr. **Anton**, Geh. Reg.-Rat, Professor an der Kgl. Forstakademie zu Hann.-Münden, Lehrbuch der Vermessungskunde. 2., erweiterte und vielfach umgearbeitete Auflage. Mit 280 Figuren. [VIII u. 471 S.] gr. 8. 1901. In Leinwand geb. *M* 8.80.

Bruns, Dr. **H.**, Professor der Astronomie an der Universität Leipzig, Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens. [VI u. 159 S.] gr. 8. 1903. Geh. *M* 3.40, in Leinwand geb. *M* 4.—

Czuber, Hofrat Dr. **E.**, Professor an der Technischen Hochschule zu Wien, Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. 2. Auflage in 2 Bänden.

I. Band. Wahrscheinlichkeitstheorie. Fehlerausgleichung. Kollektivmaßlehre. Mit 18 Figuren. [X u. 410 S.] gr. 8. 1908. In Leinwand geb. *M* 12.—

II. Band. Mathematische Statistik, mathematische Grundlagen der Lebensversicherung. [X u. 470 S.] 1910. In Leinwand geb. *M* 14.—

Darwin, **G. H.**, Professor an der Universität Cambridge, Ebbe und Flut, sowie verwandte Erscheinungen im Sonnensystem. Autorisierte deutsche Ausgabe nach der 2. englischen Auflage von A. Pockels. Mit Einführungswort von G. v. Neumayer und 43 Abbildungen. [XXII u. 344 S.] 8. 1902. Geh. *M* 6.80.

Eggert, Dr. O., Professor an der Technischen Hochschule zu Danzig, Einführung in die Geodäsie. Mit 237 Figuren. [X u. 437 S.] gr. 8. 1907. In Leinwand geb. *M* 10.—

Frischauf, Dr. **J.**, Professor an der Universität Graz, die Abbildungslehre und deren Anwendung auf Kartographie und Geodäsie. Mit 5 Figuren. [32 S.] gr. 8. 1905. Geh. *M* 1.—

Gauß, **Carl Friedrich**, Werke. Herausgegeben von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen. 10 Bände. gr. 4. Kart.

Band IV: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Geometrie. 2. Abdr. [492 S.] 1880. *M* 25.—

— IX: Geodätische Nachträge zu Band IV; insbesondere Hannoversche Gradmessung. [IV u. 528 S.] 1903. *M* 26.—

Haentzschel, Dr. **E.**, Professor an der Kgl. Technischen Hochschule zu Charlottenburg, das Erdsphäroid und seine Abbildung. Mit 16 Abbildungen. [VIII u. 139 S.] gr. 8. 1903. Geb. *M* 3.40.

Helmert, Geheimrat Dr. **F. R.**, Professor an der Universität Berlin, die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie. 2 Teile. gr. 8. Geh. *M* 38.—

Einzeln: Einleitung u. I. Teil. Die mathematischen Theorien. Mit vielen Figuren. [XV u. 631 S.] 1880. *M* 18.—

II. Teil. Die physikalischen Theorien, mit Untersuchungen über die mathematische Erdgestalt auf Grund der Beobachtungen. Mit Figuren und 2 lithographischen Tafeln. [XVI u. 610 S.] 1884. *M* 20.—

—— die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Mit Anwendungen auf die Geodäsie, die Physik und die Theorie der Meßinstrumente. 2. Auflage. [XVIII u. 578 S.] gr. 8. 1907. In Leinw. geb. *M* 16.—

Klein, Dr. F., Geh. Regierungsrat, Professor an der Universität Göttingen, und A. Sommerfeld, über die Theorie des Kreisels. 4 Hefte. gr. 8.

I. Heft. Die kinematischen und kinetischen Grundlagen der Theorie. [IV u. 196 S.] 1897. Geh. *M* 5.60, geb. *M* 6.60.

II. — Durchführung der Theorie im Falle des schweren symmetrischen Kreisels. [VI u. 315 S.] 1898. Geh. *M* 10.—, geb. *M* 11.—

III. — Die störenden Einflüsse. Astronomische und geophysikalische Anwendungen. [VI u. 247 S.] 1903. Geh. *M* 9.—, geb. *M* 10.—

IV. — Die technischen Anwendungen der Kreiseltheorie. [IV u. 218 S.] gr. 8. 1910.

Kröhnke, G. H. A., , Handbuch
zum A elinien. Für
alle vork t. 14. Auflage.
Mit 1 F geb. *M* 1.80.

Loria, Dr. G., larstellende
Geomet ot bearbeitete
deutsche

I. Teil: .] gr. 8. 1907.

II. —

Markoff, Dr. ferenzenrech-
nung. A und E. Prümm.
Mit Vor . Geh. *M* 7.—

Schilling, Dr nzig, über die
Anwend dere über die
Photog rt die Benutzung
des Proj rträge, gehalten
bei Gele tik und Physik,
Göttinge [VI u. 198 S.]
gr. 8. 1

Schulze, Bru ung der Landes-
aufnahm Unter besonderer
Berücksi aufnahme nebst
einigen nischen Arbeiten
Deutschl Kriegsakademie
gehaltene . 305 S.] gr. 8.
1903. G

Trabert, Dr. kosmischen
Physik.

Weber, Dr. H traßburg i. E.,
Encyklo h für Lehrer
und Stud

I. Band: er. 3. Auflage.

II. — Wellstein und
7. *M* 12.—

III. — r, J. Wellstein
und R. H. Weber (Rostock). Mit 358 Figuren. [XIII u. 666 S.] 1907. *M* 14.—

Zöppritz, Dr. K., weil. Professor an der Universität Königsberg i. Pr., Leitfaden der Kartenentwurfslehre. Für Studierende der Erdkunde und deren Lehrer. In 2. neubearbeiteter und erweiterter Auflage herausgegeben von Dr. A. Bludau, Professor am Gymnasium zu Coesfeld. In 2 Teilen.

I. Teil: Die Kartenprojektionslehre. Mit 100 Figuren und zahlreichen Tabellen. [X u. 178 S.] gr. 8. 1899. Geh. *M* 4.80, in Leinwand geb. *M* 5.80.

II. — Kartographie und Kartometrie. Mit 12 Figuren, 2 Tabellen und 2 Tafeln [VIII u. 109 S.] gr. 8. 1908. Geh. *M* 3.60, in Leinwand geb. *M* 4.40.

University of Toronto Library

DO NOT REMOVE THE CARD FROM THIS POCKET

Acme Library Card Pocket
Under Pat. "Ref. Index File"
Made by LIBRARY BUREAU

Author Hohenner, H.
Title Geodäsie.
144796
Astron. H.

G. E. STECHERT & Co. NEW YORK